⧫ Chapitre 10. Nombres complexes

I. — Définitions

Théorème 1. — Admis

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes, qui possède les propriétés suivantes :

1. L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$. Autrement dit, tout nombre réel est un nombre complexe.
2. Les opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication et division) connues sur $\mathbb{R}$ se prolongent à l'ensemble $\mathbb{C}$ avec les mêmes règles opératoires.
3. L'ensemble $\mathbb{C}$ contient un élément noté i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
4. Tout nombre complexe z peut s'écrire de manière unique sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont des réels. Cette écriture s'appelle la forme algébrique de z.

Définition 2

Soit z un nombre complexe. On écrit $z = a + ib$ sous forme algébrique. Alors,

1. Le nombre réel a est appelé la partie réelle de z. On la note $\mathrm{Re}(z)$.
2. Le nombre réel b est appelé la partie imaginaire de z. On la note $\mathrm{Im}(z)$.

⚠ Si z est un nombre complexe alors, par définition, la partie imaginaire de z est un nombre réel.

Exemple 3. Déterminer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3 - 4\mathrm{i} \qquad z_2 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad z_3 = \frac{1}{2} \qquad z_4 = -0{,}7\mathrm{i}.$$

Définition 4

Soit z un nombre complexe. On dit que z est imaginaire pur si $\mathrm{Re}(z) = 0$. L'ensemble des imaginaires purs se note $\mathrm{i}\mathbb{R}$.

Exemple 5. Ainsi, $\mathrm{i} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, $-5\mathrm{i} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ mais $1 + 2\mathrm{i} \notin \mathrm{i}\mathbb{R}$.

L'unicité de l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique entraîne immédiatement les propriétés suivantes.

Propriété 6

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire. En particulier, un nombre complexe z est nul si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = 0$.

Propriété 7

Soit z un nombre complexe. On écrit $z = a + ib$ sous forme algébrique. Alors,

1. z est réel si et seulement si $b = 0$.

2. Le nombre 0 est le seul nombre complexe qui est à la fois réel et imaginaire pur.

II. — Calculs dans $\mathbb{C}$

1) Addition et soustraction

Si $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ sont deux complexes écrits sous formes algébriques alors

$$z + z' = (a + \mathrm{i}b) + (a' + \mathrm{i}b') = (a + a') + \mathrm{i}(b + b').$$

On a donc $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$.

On procède de même pour la soustraction :

$$z - z' = (a + \mathrm{i}b) - (a' + \mathrm{i}b') = (a - a') + \mathrm{i}(b - b').$$

On a donc $\mathrm{Re}(z - z') = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z - z') = \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z')$.

2) Multiplication

Pour la multiplication, on procède par distributivité comme dans $\mathbb{R}$ en utilisant le fait que $\mathrm{i}^2 = -1$. Ainsi, si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ sont deux complexes écrits sous formes algébriques alors

$$zz' = (a + \mathrm{i}b)(a' + \mathrm{i}b') = aa' - bb' + \mathrm{i}(ab' + a'b).$$

Les propriétés de distributivité étant les mêmes dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$, on dispose dans $\mathbb{C}$ des mêmes identités remarquables : pour tous complexes z et z',

$$(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2 \qquad (z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2 \qquad (z - z')(z + z') = z^2 - z'^2.$$

En particulier, on peut remarquer que, pour tous réels a et b,

$$(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 - (\mathrm{i}b)^2 = a^2 - \mathrm{i}^2 b^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2.$$

3) Inverse et quotient

Comme pour les réels, tout nombre complexe non nul possède un unique inverse i.e. pour tout nombre complexe $z \neq 0$, il existe un unique nombre complexe z' tel que $z \times z' = 1$. On note cet inverse z^{-1} ou $\frac{1}{z}$.

Pour déterminer cet inverse, on chasse les i du dénominateur en multipliant $a + ib$ par $a - ib$ de sorte à faire apparaître une identité remarquable. Ainsi, si $z = a + ib$ est un complexe non nul écrit sous forme algébrique alors

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + \mathrm{i}b} = \frac{a - \mathrm{i}b}{(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b)} = \frac{a - \mathrm{i}b}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \mathrm{i}\frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

De même, si z et z' sont deux complexes tels que $z' \neq 0$, on peut définir le quotient $\frac{z}{z'}$ par $z \times \frac{1}{z'}$. Pour déterminer la forme algébrique d'un quotient, on procède alors comme pour l'inverse : si $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ sont deux complexes écrits sous formes algébriques tels que $z' \neq 0$ alors

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + \mathrm{i}b}{a' + \mathrm{i}b'} = \frac{(a + \mathrm{i}b)(a' - \mathrm{i}b')}{(a' + \mathrm{i}b')(a' - \mathrm{i}b')} = \frac{aa' - \mathrm{i}ab' + \mathrm{i}ba' - \mathrm{i}^2bb'}{a'^2 + b'^2} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \mathrm{i}\frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}.$$

Le produit, l'inverse et le quotient ne sont pas compatibles avec la partie réelle et la partie imaginaire i.e., en général, $\mathrm{Re}(zz') \neq \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(zz') \neq \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z')$ et de même pour l'inverse et le quotient.

4) Puissances entières

Soit z un nombre complexe et n un entier relatif. Si $n > 0$, on pose $z^n = \underbrace{z \times z \times \cdots \times z}_{n \text{ fois}}$, si $n = 0$, on pose $z^n = 1$ et, si $n < 0$, on pose $z^n = \dfrac{1}{z^{-n}} = \dfrac{1}{\underbrace{z \times z \times \cdots \times z}_{-n \text{ fois}}}$.

Exemple 8. Soit $z = 1 + 2\mathrm{i}$ et $z' = 2 - \mathrm{i}$. Calculer $z + z'$, $z - z'$, zz', $\frac{1}{z}$ et $\frac{z}{z'}$.

Remarque 9. Toutes les propriétés algébriques vues dans $\mathbb{R}$ comme les identités remarquables, la formule du binôme de Newton, les calculs de sommes restent vraies dans $\mathbb{C}$. De même, les principes de résolution des équations restent les mêmes dans $\mathbb{C}$.

5) Équations

Exemple 10. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z + 2 = (3 + 2\mathrm{i})z - 1 + \mathrm{i}$ d'inconnue z.

Propriété 11

Un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Exemple 12.

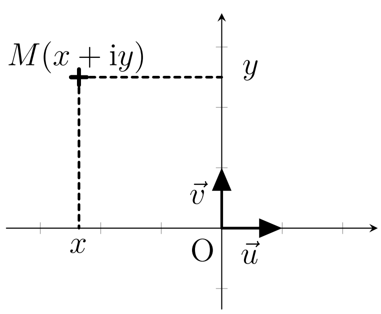
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (F) : $(\mathrm{i}z - 1)(z - \mathrm{i}) = 0$ d'inconnue z.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (G) : $z^2 + 1 = 0$ d'inconnue z.

III. — Le plan complexe

Dans toute la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

Définition 13

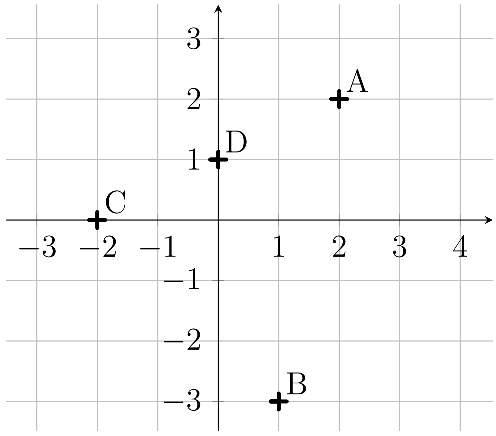
Soit M un point du plan de coordonnées cartésiennes $(x\,;y)$. On dit que le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est l'affixe du point M et on le note z_M.
Inversement, si $z = x + \mathrm{i}y$ est un complexe écrit sous forme algébrique, on dit que le point M de coordonnées $(x\,;y)$ est l'image de z dans le plan et on note alors $M(z)$.



Remarque 14. On établit ainsi une bijection entre l'ensemble des points du plan et l'ensemble des nombres complexes. Une fois bijection établie, le plan est appelé plan complexe ou plan d'Argand-Cauchy.

L'axe des abscisses est alors appelé l'axe réel et l'axe des ordonnées est appelé l'axe des imaginaires (purs).

Exemple 15. Sur le graphique ci-contre, lire les affixes des points A, B, C et D et placer les points E$(3+\mathrm{i})$, F$(-1+2\mathrm{i})$, G$(-2\mathrm{i})$ et H(3).



Définition 16

Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur du plan de coordonnées $(x\,;y)$. Alors, le complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est appelé l'affixe de $\overrightarrow{w}$ et on la note $z_{\overrightarrow{w}}$.

IV. — Conjugaison

Définition 17

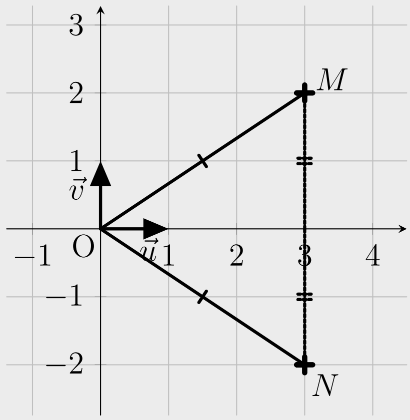
Soit z un nombre complexe. Si z s'écrit sous forme algébrique $z = a + ib$ alors le nombre complexe $a - ib$ est appelé le nombre complexe conjugué de z et on le note $\overline{z}$ (ce qui se lit « z barre »).

Exemple 18. Déterminer les conjugués des complexes suivants :

$$z_1 = 1 + 3\mathrm{i} \qquad z_2 = 3\mathrm{i} - 2 \qquad z_3 = -4 \qquad z_4 = \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad z_5 = 3 + \mathrm{i}(2 + \mathrm{i})$$

Propriété 19

Soit z un nombre complexe et M le point d'affixe z. Alors, $\overline{z}$ est l'affixe du symétrique N de M par rapport à l'axe des réels.
En particulier, l'axe des réels est la médiatrice du segment $[MN]$ et OM = ON.



Propriété 20

Soit z et z' deux complexes. Alors,

1. $z = z' \Longleftrightarrow \overline{z} = \overline{z'}$ **2.** $\overline{\overline{z}} = z$ **3.** $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\operatorname{Im}(z)$

4. $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$ **5.** $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$ **6.** $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$.

Propriété 21. — Compatibilité avec les opérations

Soit z et z' deux complexes et n un entier. Alors,

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
2. $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$.
3. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$. En particulier, si $k \in \mathbb{R}$, $\overline{kz} = k\overline{z}$.
4. Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.
5. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Exemple 22.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer le conjugué de $Z = \dfrac{2z + \mathrm{i}}{3 - 2\mathrm{i}}$ en fonction de $\overline{z}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z.

$$(H) : 2\overline{z} + \mathrm{i} = 3 + 5\mathrm{i} \qquad (K) : z + 2\mathrm{i}\overline{z} = 3 + \mathrm{i}$$

V. — Équations du second degré à coefficients réels

Propriété 23

Soit $P : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré à coefficients dans $\mathbb{R}$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. Alors,

1. Si $\Delta > 0$, l'équation $P(z) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$ à savoir
$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
2. Si $\Delta = 0$, l'équation $P(z) = 0$ admet exactement une solution dans $\mathbb{C}$ qui est la même que dans $\mathbb{R}$ à savoir
$$z_0 = \frac{-b}{2a}.$$
3. Si $\Delta < 0$, l'équation $P(z) = 0$ admet exactement deux solutions complexes conjuguées dans $\mathbb{C}$ qui sont
$$z_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple 24. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : z^2 - 2z + 5 = 0 \qquad (E_2) : 2z^2 - z + 1 = 0 \qquad (E_3) : 2z^2 - z - 1 = 0.$$

VI. — Module, arguments et forme trigonométrique

1) Module d'un nombre complexe

Définition 25

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique. Alors, on définit le module de z, noté $|z|$, par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

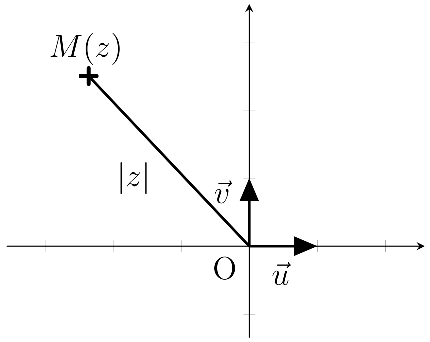
Exemple 26. Calculer le module des complexes $z_1 = 1 + \mathrm{i}$, $z_2 = -2 - 5\mathrm{i}$, $z_3 = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Remarque 27.

1. Géométriquement, le module d'un complexe z s'interprète comme la distance $\mathrm{O}M$ où M est le point d'affixe z.

2. Par définition, le module d'un nombre complexe est un réel positif ou nul et $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

3. Si z est réel alors le module du complexe z coïncide avec la valeur absolue du réel z.



Propriété 28

Soit z un nombre complexe. Alors, $|-z| = |z|$, $|\bar{z}| = |z|$ et $|z|^2 = z\bar{z}$.

Corollaire 29

Soit z et z' deux nombres complexes.

1. $|zz'| = |z|\,|z'|$.

2. Pour tout entier naturel n, $|z^n| = |z|^n$ (avec la convention $z^0 = 1$).

3. Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

4. si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

Propriété 30. — Inégalité triangulaire

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors,

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|\,.$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement s'il existe un réel $k \geqslant 0$ tels que $z' = kz$ ou $z = kz'$ (on dit alors que z et z' sont positivement liés.)

Remarque 31. Pour tout nombre complexe z, $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.

2) Complexes de module 1

Notation 32. L'ensemble des nombres de complexes de module 1 se note $\mathbb{U}$.

Exemple 33. $1 \in \mathbb{U}$, $\mathrm{i} \in \mathbb{U}$ et on a vu précédemment que $\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{U}$.

Propriété 34. — Stabilité par les opérations

L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par produit, inverse, quotient, puissance entière et conjugaison. Autrement dit, pour tout $(z\,;z') \in \mathbb{U}^2$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $zz' \in \mathbb{U}$, $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$, $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{U}$, $z^n \in \mathbb{U}$ et $\overline{z} \in \mathbb{U}$.

Propriété 35

Soit z un nombre complexe. Les propositions suivantes sont équivalentes ;

1. $z \in \mathbb{U}$;
2. $M(z)$ appartient au cercle trigonométrique.
3. il existe un réel θ tel que $z = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

Exemple 36. Montrer que $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} \in \mathbb{U}$ et déterminer un réel θ tel que $z = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

3) Forme trigonométrique et arguments d'un complexe non nul

Propriété 37

Soit z un complexe non nul. Alors, il existe un réel θ tel que $z = |z|\,(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$.

Définition 38

L'écriture précédente est appelée une forme trigonométrique du complexe z et le nombre θ est appelé un argument de z. On note alors $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$.

Méthode 39

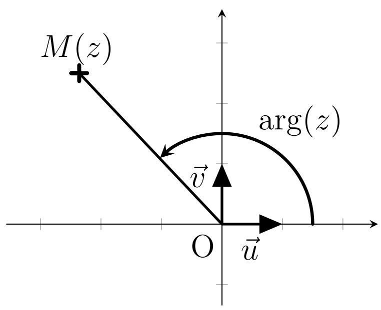
1. Si on connaît une forme trigonométrique $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ d'un complexe non nul, pour déterminer sa forme algébrique $z = a + ib$, il suffit d'écrire que $a = r\cos(\theta)$ et $b = r\sin(\theta)$.
2. Si on connaît la forme algébrique de $z = a + ib$ d'un complexe non nul, pour déterminer sa forme trigonométrique, on écrit que $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ puis on factorise dans z le nombre r afin de faire apparaître les cosinus et sinus d'un angle.

Exemple 40. Déterminer une forme trigonométrique des complexes suivants

$$z_1 = 1 \qquad z_2 = \mathrm{i} \qquad z_3 = 1 - \mathrm{i} \qquad z_4 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Remarque 41. Soit z un complexe non nul.

1. Le nombre z admet une infinité de formes trigonométriques différentes ainsi qu'une infinité d'arguments qui sont cependant tous égaux modulo 2π.
2. Géométriquement, un argument de z s'interprète comme une mesure en radians de l'angle orienté formé par $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$.
3. Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument.



Propriété 42

Si un complexe non nul z s'écrit $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ avec $r > 0$ alors $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta \ [2\pi]$.

Exemple 43. Déterminer le module et un argument des complexes suivants

$$z_1 = 3(\cos(3) + \mathrm{i}\sin(3)) \qquad z_2 = -5\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$$
$$z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad z_4 = 2(-\cos(3) + \mathrm{i}\sin(3)).$$

4) Forme exponentielle

Définition 44

On définit l'exponentielle imaginaire d'un réel θ, notée $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, par

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta).$$

Exemple 45. Déterminer la forme algébrique de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$.

Il découle de la propriété 37 que tout nombre complexe non nul z s'écrit sous la forme $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où θ est un argument de z.

Définition 46

Si $z \neq 0$, l'écriture $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ s'appelle une forme exponentielle de z.

Exemple 47. Déterminer une forme exponentielle des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + \mathrm{i} \qquad z_2 = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad z_3 = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

Remarque 48. On déduit du corollaire 42 que si un complexe z s'écrit $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ alors $r = |z|$ et θ est un argument de z.

Propriété 49

Pour tous réels θ et θ',

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}.$$

Propriété 50

Soit un complexe z. Alors, $z \in \mathbb{U}$ si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Autrement dit, $\mathbb{U} = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

Propriété 51

Soit r et r' deux réels strictement positifs et θ et θ' deux réels (quelconques). Alors,

1. $\overline{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$;
2. $-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}$;
3. $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = rr'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$;
4. Pour tout entier naturel n, $(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$;
5. $\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \frac{r}{r'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$.

Exemple 52. Déterminer la forme algébrique de $(1+\mathrm{i})^{2021}$.

Exemple 53. On pose $j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. Montrer que $j^3 = 1$ puis que $j^2 + j + 1 = 0$.

Exemple 54. On considère le nombre complexe $Z = \frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.

1. Écrire $z_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $z_2 = 1 - \mathrm{i}$ sous forme exponentielle et en déduire une forme exponentielle de Z.
2. Déterminer la forme algébrique de Z.
3. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Propriété 55. — Formule de de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier naturel n,

$$(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

Exemple 56. Retrouver les formules de duplication à l'aide de la formule de de Moivre.

Propriété 57. — Formules d'Euler

Pour tout réel θ,

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

Exemple 58. Soit $\theta \in \,]-\pi\,;\pi[$. Déterminer module et argument du nombre complexe

$$z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1}.$$

VII. — Exercices

Exercice 1. Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

$$z_1 = (2-4\mathrm{i}) - (5-4\mathrm{i}) \quad z_2 = (1-\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}) \quad z_3 = (2+\mathrm{i})^2 \quad z_4 = \frac{1}{6+8\mathrm{i}} \quad z_5 = \frac{1-\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$$

$$z_6 = \mathrm{i}^{2022} \quad z_7 = \frac{1}{3-\mathrm{i}} \quad z_8 = \frac{2}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}} \quad z_9 = \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \quad z_{10} = \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$$

Exercice 2. On considère les nombres complexes $z_1 = 1+\mathrm{i}$ et $z_2 = 2-3\mathrm{i}$.
Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

a) $z_3 = z_1 + z_2$; *b*) $z_4 = z_1 z_2$; *c*) $z_5 = \dfrac{1}{z_1}$; *d*) $z_6 = \dfrac{z_1}{z_2}$

e) $z_7 = \overline{z_1}$; *f*) $z_8 = \overline{z_1 - z_2}$; *g*) $z_9 = \dfrac{1}{\overline{z_2}}$: *h*) $z_{10} = \dfrac{z_2}{z_1}$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z_n = (2-2\mathrm{i})^{4n}$. Déterminer $\mathrm{Re}(z_n)$ et $\mathrm{Im}(z_n)$.

Exercice 4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que $z - \overline{z}(\mathrm{i}z+1)$ est un imaginaire pur.

Exercice 5. Pour tout complexe z, on pose $Z = z - 2\overline{z} + \mathrm{i}$.

1. Calculer Z dans les cas suivants : $z = 0$; $z = \mathrm{i}$ puis $z = 1-\mathrm{i}$.
2. On écrit z sous forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$. Déterminer la forme algébrique Z en fonction de x et y.
3. En déduire que Z est imaginaire pur si et seulement si z imaginaire pur.

Exercice 6. Démonter que, si z est un imaginaire pur et si n est un entier naturel impair, alors z^n est également un imaginaire pur.

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $(E) : (1+2\mathrm{i})z = 1 - 2\mathrm{i}z$.
2. $(F) : (z+\mathrm{i})(\mathrm{i}z+1) = 0$.
3. $(G) : 2z + \overline{z} = \mathrm{i} + 2$.
4. $(H) : z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$.

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

$(E_1)\ 2z^2 - 2z + 5 = 0 \quad (E_2) - z^2 + 2z - 5 = 0 \quad (E_3)\ z^2 + z - 1 = 0 \quad (E_4)\ 3z^2 - 5z + 3 = 0$

$(E_5)\ z^2 + 81 - 18z = 25 \quad (E_6)\ 25 + z^2 + 10z = 16 \quad (E_7)\ 2z^2 - 8z + 3 = -z^2 + 2z$

Exercice 9. Étant donné un nombre complexe w, on dit qu'un nombre complexe u est une racine carrée de w si $u^2 = w$.

1. Soit $w \in \mathbb{C}$. Supposons que u est une racine carrée de w.
   - **a.** Montrer que l'équation $z^2 = w$ est équivalente à l'équation $(z-u)(z+u) = 0$.
   - **b.** En déduire que w possède au plus deux racines carrées.
2. On suppose que u est une racine carrée du nombre i et on écrit u sous forme algébrique $u = a + \mathrm{i}b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
   - **a.** Justifier que $\begin{cases} a^2 = b^2 \\ 2ab = 1 \end{cases}$

b. En déduire que $a \in \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}} \, ; \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ et que $a = b$.

c. Déterminer l'ensemble des racines carrées de i.

Exercice 10. Calculer les modules des nombres complexes suivants.

$z_1 = (5+2\mathrm{i})-4(2+3\mathrm{i}) \qquad z_2 = \sqrt{3}-2\mathrm{i} \qquad z_3 = (1+2\mathrm{i})\times 5(2-3\mathrm{i}) \qquad z_4 = -2(\sqrt{3}-\mathrm{i})+4(6-\mathrm{i})$

Exercice 11. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = -5 \qquad z_{\mathrm{B}} = 3-4\mathrm{i} \qquad z_{\mathrm{C}} = -4-3\mathrm{i} \qquad z_{\mathrm{D}} = -4+3\mathrm{i}.$$

1. Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe.
2. Montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle de centre O.

Exercice 12. Parmi les complexes suivants, déterminer ceux qui appartiennent à $\mathbb{U}$.

$$z_1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\mathrm{i} \qquad z_2 = -\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}\mathrm{i} \qquad z_3 = \frac{2\sqrt{6}+\mathrm{i}}{5} \qquad z_4 = \frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

Exercice 13. On considère les complexes suivants :

$$z_1 = 4\mathrm{i} \qquad z_2 = -10 \qquad z_3 = 5-5\mathrm{i} \qquad z_4 = \sqrt{3}+\mathrm{i}.$$

Calculer les modules des nombres complexes suivants :

$$a = z_1 z_2 \qquad b = \frac{z_4}{z_1} \qquad c = \frac{z_2}{z_3} \qquad d = z_3^2 \times z_2.$$

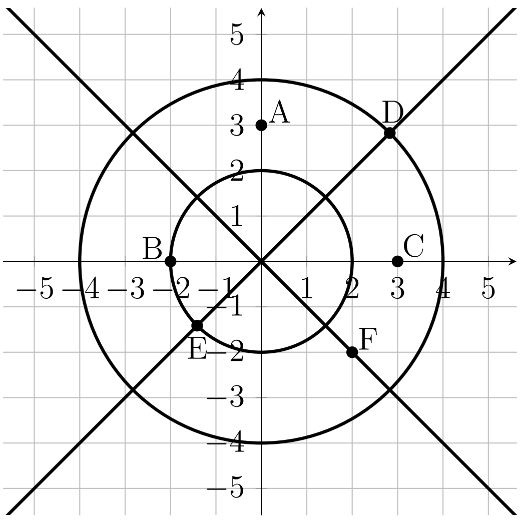
Exercice 14. Montrer que les complexes suivants appartiennent à $\mathbb{U}$.

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} \qquad z_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \qquad z_3 = \mathrm{i} \qquad z_4 = \frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{i}.$$

Exercice 15.

1. Démontrer que z est un imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.
2. Pour tout nombre complexe $z \neq 1$, on pose $c = \frac{z+1}{z-1}$. Démontrer que l'ensemble des nombres complexes $z \neq 1$ tels que c soit imaginaire pur est $\mathbb{U} \setminus \{1\}$.

Exercice 16. Déterminer graphiquement un argument de chacun des nombres complexes z_{A}, z_{B}, z_{C}, z_{D}, z_{E} et z_{F}.



Exercice 17. Placer les points A, B, C, D et E tels que

1. $|z_\mathrm{A}| = 2$ et $\arg(z_\mathrm{A}) = \frac{3\pi}{2}\ [2\pi]$;
2. $|z_\mathrm{B}| = 3$ et $\arg(z_\mathrm{B}) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$;
3. $|z_\mathrm{C}| = 1$ et $\arg(z_\mathrm{C}) = -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$;
4. $|z_\mathrm{D}| = 4$ et $\arg(z_\mathrm{D}) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$;
5. $|z_\mathrm{E}| = 5$ et $\arg(z_\mathrm{E}) = -\pi\ [2\pi]$;

Exercice 18. Dans chacun des cas suivants, donner la forme algébrique de z.

1. $|z| = 3$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$;
2. $|z| = 2$ et $\arg(z) = \pi\ [2\pi]$;
3. $|z| = 1$ et $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$;
4. $|z| = 5$ et $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$;
5. $|z| = 4$ et $\arg(z) = -\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$;

Exercice 19. Déterminer module et argument des nombres complexes suivants.

$$z_1 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad z_2 = -2 \qquad z_3 = \sqrt{3} + 3\mathrm{i} \qquad z_4 = -4 - 4\mathrm{i}.$$

Exercice 20. Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique.

$$z_1 = -6\mathrm{i} \qquad z_2 = 5 - 5\mathrm{i} \qquad z_3 = -\sqrt{3} + 3\mathrm{i} \qquad z_4 = -2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Exercice 21. Placer dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_\mathrm{A} = 5\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

$z_\mathrm{B} = 2\left(\cos\left(3\dfrac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right)$

$z_\mathrm{C} = 3\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{63}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)\right)$

Exercice 22. Écrire les complexes suivants sous forme exponentielle.

$$a = 4\mathrm{i} \qquad b = -11 \qquad c = -\frac{7\mathrm{i}}{2} \qquad d = 1 + \mathrm{i}.$$

Exercice 23. Écrire les complexes suivants sous forme algébrique.

$$a = 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \qquad b = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \qquad c = 5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \qquad d = 7\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

Exercice 24. Écrire sous forme exponentielle les complexes suivants

$$a = \frac{8\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} \qquad b = -5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \qquad c = 4\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{7}} \qquad d = 2\times\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} \qquad e = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}\right)^5 \qquad f = \frac{\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^5}{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^7}$$

Exercice 25. On considère les nombres complexes $z_1 = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$ et $z_2 = 1 - \mathrm{i}$.

1. Déterminer la forme exponentielle de z_1 et celle de z_2.
2. En déduire les formes exponentielles de $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ et $\frac{z_1^3}{z_2^4}$.

Exercice 26. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $z = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z^n - \frac{1}{z^n} = 2\mathrm{i}\sin(nx)$.

2. Déterminer une expression analogue pour $z^n + \frac{1}{z^n}$.

Exercice 27. Soit z et z' deux complexes de module 1.

1. Justifier l'existence de deux réels θ et α tels que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

2. Montrer que, si $z' \neq z$, alors $\frac{zz'-1}{z'-z}$ est un réel.

3. Montrer que $\frac{z^2-1}{z}$ est un imaginaire pur.

Exercice 28. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les formules d'Euler, linéariser :

$$\cos^3(x) \qquad \cos^4(x) \qquad \cos^2(x)\sin^2(x).$$

Exercice 29. Soit $x \in \mathbb{R}$. exprimer $\sin(3x)$ et $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.

Exercice 30. On considère le nombre complexe $w = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}}$.

1. Vérifier les égalités suivantes :

$$w^5 = 1 \qquad w^8 = w^3 \qquad w^4 = \frac{1}{w} \qquad (1-w)(1+w+w^2+w^3+w^4) = 0.$$

2. On pose $s = w + w^4$ et $t = w^2 + w^3$. Déduire de la question précédente les égalités suivantes :

$$s^2 = 2 + t \qquad 1 + s + t = 0.$$

3. **a.** En isolant t dans la deuxième égalité et en remplaçant t par son expression dans la première, montrer que $s^2 + s - 1 = 0$.

b. En déduire les deux valeurs possibles pour s.

4. Montrer que $s = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$ et en déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

Exercice 31. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(2k\theta).$$

1. On pose :

$$U_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\theta} \qquad \text{et} \qquad V_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}k\theta}.$$

a. Justifier que $U_n(\theta) = (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + 1)^n$.

b. En factorisant par $e^{\mathrm{i}\theta}$, montrer que $U_n(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \times 2^n \cos^n(\theta)$.

c. En déduire la valeur de $V_n(\theta)$.

2. Conclure que $S_n(\theta) = 2^n \cos^n(\theta)\cos(n\theta)$.