Corrigé du devoir surveillé n°3

Exercice 1.

1. On a $\widehat{\mathrm{BAC}} = 180° - 45° = 135°$ donc

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos(\widehat{\mathrm{BAC}}) = 3 \times 2\sqrt{2} \times \cos(135°) = 6\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

i.e. $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -6}$.

2. Notons H le projeté orthogonal de C sur [AB]. Grâce au quadrillage, AH = 2 et AB = 5 donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2 \times 5$ i.e. $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 10}$.

3. Comme ABDC est un parallélogramme, AC = BD = 4 et $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$. Ainsi, grâce à la première identité de polarisation,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}(6^2 - 5^2 - 4^2)
\end{aligned}$$

i.e. $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -\frac{5}{2}}$.

4. Les coordonnées des vecteurs sont $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(-5\,;2)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(-2\,;-3)$ donc, comme le repère est orthonormé, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -5 \times (-2) + 2 \times (-3)$ i.e. $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 4}$.

Exercice 2.

1. On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(4-1\,;-2-1)$ donc $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(3\,;-3)}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(5-1\,;2-1)$ donc $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(4\,;1)}$.

2. Comme le repère est orthonormé, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3 \times 4 + (-3) \times 1$ i.e. $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 9}$.

3. Comme le repère est orthonormé, $\mathrm{AB} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{2 \times 9}$ donc $\boxed{\mathrm{AB} = 3\sqrt{2}}$ et $\mathrm{AC} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\| = \sqrt{4^2 + 1^2}$ donc $\boxed{\mathrm{AC} = \sqrt{17}}$.

4. On en déduit que $\cos(\widehat{\mathrm{BAC}}) = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\mathrm{AB} \times \mathrm{AC}} = \dfrac{9}{3\sqrt{2} \times \sqrt{17}} = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$ et ainsi, à l'aide de la calculatrice, $\boxed{\widehat{\mathrm{BAC}} \approx 59°}$.

Exercice 3.

1. En appliquant la formule d'Al-Kashi dans le triangle ABD, il vient

$$\mathrm{BD}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2 - 2 \times \mathrm{AB} \times \mathrm{AD} \times \cos(\widehat{\mathrm{BAD}}) = 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 25 + 16 - 40 \times \frac{1}{2}$$

donc $\mathrm{BD}^2 = 31$ i.e. $\boxed{\mathrm{BD} = \sqrt{21}}$.

2. a. Comme ABCD est un parallélogramme, $\overrightarrow{\text{BC}} = \overrightarrow{\text{AD}}$ donc

$$\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = \overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AD}} = \text{AB} \times \text{AD} \times \cos(\widehat{\text{BAD}}) = 5 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 20 \times \frac{1}{2}$$

i.e. $\boxed{\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = 10}$.

b. D'après les identités remarquables,

$(\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{BC}})^2 = \overrightarrow{\text{AB}}^2 + 2\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} + \overrightarrow{\text{BC}}^2 = \text{AB}^2 + 2\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} + \text{BC}^2 = 5^2 + 2 \times 10 + 4^2.$

donc $\boxed{(\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{BC}})^2 = 61}$

c. Par la relation de Chasles, on en déduit que $\overrightarrow{\text{AC}}^2 = 61$ et donc $\boxed{\text{AC} = \sqrt{61}}$.

Exercice 4. Comme le repère est orthonormé, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times (m+1) + m \times 2 = 3m + 1$. Ainsi, $\vec{u}\,(1\,;m)$ et $\vec{v}\,(m+1\,;2)$ sont orthogonaux si et seulement si $3m + 1 = 0$ i.e. $\boxed{m = -\frac{1}{3}}$.

Exercice 5.

1. D'après la formule d'Al-Kashi, $\text{BC}^2 = \text{AB}^2 + \text{AC}^2 - 2 \times \text{AB} \times \text{AC} \times \cos(\widehat{\text{BAC}})$ i.e. $\text{BC}^2 = \text{AB}^2 + \text{AC}^2 - 2\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}}$. On en déduit que $2\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = \text{AB}^2 + \text{AC}^2 - \text{BC}^2$ i.e. $\boxed{\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = \frac{1}{2}(\text{AC}^2 + \text{AB}^2 - \text{BC}^2)}$.

2. On a montré en cours que $\boxed{\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = \text{AI}^2 - \frac{1}{4}\text{BC}^2}$.

3. On déduit des questions précédentes que $\frac{1}{2}(\text{AC}^2 + \text{AB}^2 - \text{BC}^2) = \text{AI}^2 - \frac{1}{4}\text{BC}^2$ donc, en multipliant chaque membre par 2, on obtient $\text{AC}^2 + \text{AB}^2 - \text{BC}^2 = 2\text{AI}^2 - \frac{1}{2}\text{BC}^2$ et donc $\text{AB}^2 + \text{AC}^2 = 2\text{AI}^2 - \frac{1}{2}\text{BC}^2 + \text{BC}^2$ donc finalement, $\boxed{\text{AB}^2 + \text{AC}^2 = 2\text{AI}^2 + \frac{1}{2}\text{BC}^2}$.

4. D'après le résultat de la question **3.**,

$$2\text{AI}^2 = \text{AB}^2 + \text{AC}^2 - \frac{1}{2}\text{BC}^2 = 3^2 + 4^2 - \frac{1}{2}6^2 = 7$$

donc $\text{AI}^2 = \frac{7}{2}$ et donc, finalement, $\boxed{\text{AI} = \sqrt{\frac{7}{2}}}$.

Exercice 6.

1. a. Pour tout réel x, $f(x) = (x-1)^2 - 1 + 13$ donc $\boxed{f(x) = (x-1)^2 + 12}$.

b. Pour tout réel x, $(x-1)^2 \geqslant 0$ donc $(x-1)^2 + 12 \geqslant 12$ i.e. $f(x) \geqslant 12$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f(x) > 0}$.

2. a. Le nombre 1 est solution de (E_m) si et seulement si $1 + (m+1) + m - 3 = 0$ i.e. $2m - 1 = 0$ ce qui équivaut à $m = \frac{1}{2}$. Ainsi, <u>l'unique valeur de m telle que 1 soit solution de (E_m) est 0,5</u>.

Notons r l'autre solution de $(E_{0,5})$. Alors, $1 \times r = m - 3 = 0{,}5 - 3 = -2{,}5$. Ainsi, $\boxed{\text{l'autre solution de } (E_{0,5}) \text{ est } -2{,}5}$.

b. Le discriminant de (E_m) est

$$\Delta = (m+1)^2 - 4 \times 1 \times (m-3) = m^2 + 2m + 1 - 4m + 12 = m^2 - 2m + 13$$

donc $\Delta = f(m)$.

Ainsi, d'après la question **1.b.**, $\Delta > 0$ donc $\boxed{(E_m) \text{ possède deux solutions réelles}}$.

Exercice 7.

1. **a.** Par définition, $u_2 = \dfrac{1(1+2)}{(1+1)^2}u_1 = \dfrac{3}{4} \times 1$ donc $\boxed{u_2 = \frac{3}{4}}$.

   De même, $u_3 = \dfrac{2(2+2)}{(2+1)^2}u_2 = \dfrac{8}{9} \times \dfrac{3}{4}$ donc $\boxed{u_3 = \dfrac{2}{3}}$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$u_{n+2} = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} \times \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}u_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{(n+1)^2(n+2)^2}u_n$$

   et, en simplifiant la fraction, $\boxed{u_{n+2} = \dfrac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}u_n}$;

2. **a.** À l'aide de la calculatrice, on conjecture que (u_n) est décroisante.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, par définition, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$. Or,

$$1 - \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n+1-(n^2+2n)}{(n+1)^2} = -\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 0$$

   donc $1 - \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 0$ i.e. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$. Comme $u_n > 0$, on conclut que $u_{n+1} \leqslant u_n$.

   Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

Exercice 8.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$.

   a. On a

$$\begin{aligned} f(a+h) &= (a+h)((a+h)^2+2) = (a+h)(a^2+2ah+h^2+2) \\ &= a^3+2a^2h+ah^2+2a+a^2h+2ah^2+h^3+2h \\ &= a^3+3a^2h+3ah^2+h^3+2a+2h \end{aligned}$$

   donc

$$\begin{aligned} f(a+h)-f(a) &= a^3+3a^2h+3ah^2+h^3+2a+2h-a(a^2+2) \\ &= a^3+3a^2h+3ah^2+h^3+2a+2h-a^3-2a \\ &= 3a^2h+3ah^2+h^3+2h \end{aligned}$$

   On en déduit que $t(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{3a^2h+3ah^2+h^3+2h}{h}$ donc $t(h) = 3a^2+3ah+h^2+2$ soit encore $\boxed{t(h) = 3a^2+1+3ah+h^2}$.

   b. Ainsi, $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = 3a^2+2$ donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } a \text{ et } f'(a) = 3a^2+2}$.

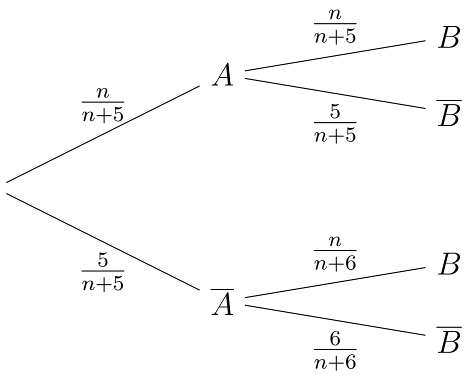
2. Par théorème, $T : y = f'(1)(x-1)+f(1)$. On déduit de la question précédente que $f'(1) = 3 \times 1^2 + 2 = 5$. Or, $f(1) = 1 \times (1^2+2) = 3$ donc $T : y = 5(x-1)+3$ i.e. $\boxed{T : y = 5x-2}$.

3. Pour tout réel a, $f'(a) = f'(a) = 3a^2+2 \geqslant 2$ donc il n'existe aucun réel a tel que $f'(a) = 0$. Comme $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a, on conclut que $\boxed{\text{la courbe } \mathcal{C} \text{ n'admet aucune tangente parallèle à l'axe des abscisses}}$.

Exercice 9.

1. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur les tirages. Ainsi, la probabilité de A est $\boxed{P(A) = \dfrac{n}{n+5}}$.

2. On peut représenter la situation par l'arbre pondéré suivant :



3. Les évènements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)\\
&= \frac{n}{n+5} \times \frac{n}{n+5} + \frac{5}{n+5} \times \frac{n}{n+6}\\
&= \frac{n^2}{(n+5)^2} + \frac{5n}{(n+5)(n+6)}\\
&= \frac{n^2(n+6) + 5n(n+5)}{(n+5)^2(n+6)}
\end{aligned}$$

Or, $n^2(n+6)+5n(n+5) = n\left[n(n+6) + 5(n+5)\right] = n(n^2+6n+5n+25) = n(n^2+11n+25)$ donc $\boxed{P(B) = \dfrac{n(n^2+11n+25)}{(n+5)^2(n+6)}}$.

4. Les évènements A et B sont indépendants si et seulement si $P(B) = P_A(B)$ i.e. si et seulement si $\dfrac{n(n^2+11n+25)}{(n+5)^2(n+6)} = \dfrac{n}{n+5}$ ce qui équivaut à $\dfrac{n^2+11n+25}{(n+5)(n+6)} = 1$. Or, $(n+5)(n+6) = n^2+6n+5n+30 = n^2+11n+30 > n^2+11n+25$ donc $\dfrac{n^2+11n+25}{(n+5)(n+6)} \neq 1$. Ainsi, <u>il n'existe aucune valeur de n pour laquelle A et B sont indépendants.</u>