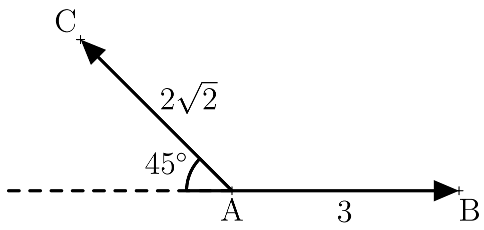
Devoir surveillé n°3

Durée : 2 heures

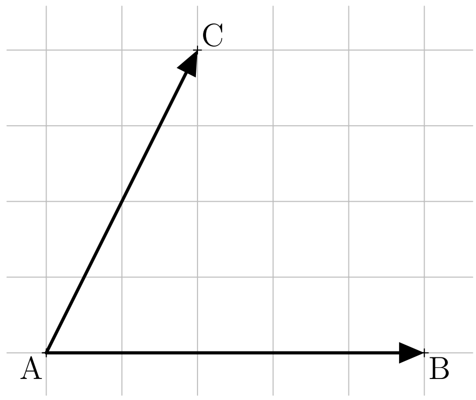
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Exercice 1. (4 points) — Dans chacun des cas suivants, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

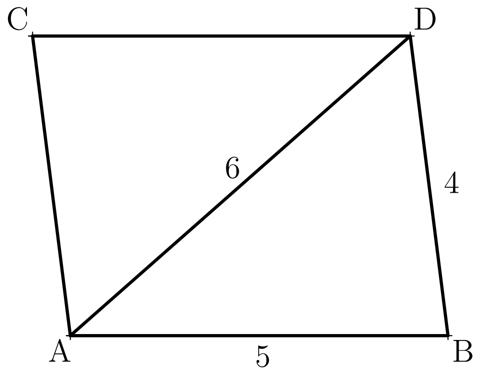
1. Les pointillés prolongent [AB].



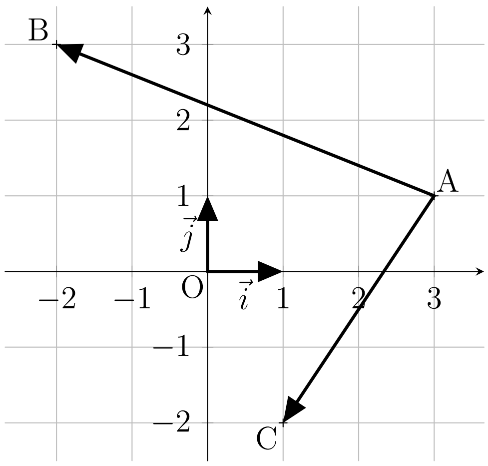
2. Le quadrillage est composé de carrés de côté 1.



3. ABDC est un parallélogramme



4. Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé.



Exercice 2. (4 points) — Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère les points A (1 ; 1), B (4 ; −2) et C (5 ; 2).

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. En déduire la valeur de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

3. Calculer les longueurs AB et AC.

4. En déduire une valeur arrondie au degré près de $\widehat{BAC}$.

Exercice 3. (5 points) — On considère un parallélogramme ABCD tel que AB = 5, AD = 4 et $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$.

1. Calculer la longueur BD.

2. a. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

b. Développer puis calculer $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2$.

c. En déduire la longueur AC.

Exercice 4. (2 points) — Le plan est muni d'un repère orthonormé. Déterminer la valeur du réel m telle que les vecteurs $\vec{u}\,(1\,;m)$ et $\vec{v}\,(m+1\,;2)$ soient orthogonaux.

Exercice 5. (5 points) — Soit ABC un triangle. On note I le milieu de [BC].

1. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{1}{2}(\mathrm{AC}^2 + \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BC}^2)$.

2. Rappeler l'expression de $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ en fonction de AI et BC vue en cours.

3. Déduire des questions précédentes que $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2\mathrm{AI}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{BC}^2$.

4. On suppose dans cette question que AB $= 3$, AC $= 4$ et BC $= 6$.
Calculer AI.

Exercice 6. (5 points)

1. On considère la fonction trinôme du second degré $f : x \mapsto x^2 - 2x + 13$

a. Déterminer la forme canonique de f.

b. En déduire que, pour tout réel x, $f(x) > 0$.

2. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation du second degré $(E_m) : x^2 + (m+1)x + m - 3 = 0$ d'inconnue x.

a. Pour quelle(s) valeur(s) de m le nombre 1 est-il solution de (E_m) ?
Quelle est alors l'autre solution de (E_m) ?

b. Montrer que, quelle que soit la valeur de m, l'équation (E_m) possède deux solutions réelles.

Exercice 7. (5 points) — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}u_n$.

1. a. Calculer les valeurs exactes de u_2 et u_3. On détaillera les calculs sur la copie.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = \dfrac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}u_n$.

2. a. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variation de (u_n).

b. On admet que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer la conjecture précédente.

Exercice 8. (5 points) — On considère la fonction $f : x \mapsto x(x^2+2)$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a. Soit $h \in \mathbb{R}^*$. Calculer $f(a+h) - f(a)$ et en déduire que le taux de variation de f entre a et $a+h$ est $t(h) = 3a^2 + 2 + 3ah + h^2$.

b. Justifier que f est dérivable en a et déterminer $f'(a)$.

2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

3. La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une tangente parallèle à l'axe des abscisses ?

Exercice 9. (5 points) — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules noires et 5 boules rouges. On tire au hasard une boule dans l'urne. Si la boule est noire, on la remet dans l'urne et si elle est rouge, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire dans l'urne. On effectue ensuite un second tirage d'une boule dans l'urne. On note A : « Tirer une boule noire au premier tirage » et B : « Tirer une boule noire au second tirage »

1. Déterminer la probabilité de A.

2. Traduire la situation par un arbre pondéré.

3. Montrer que la probabilité de B est égale à $\dfrac{n(n^2+11n+25)}{(n+5)^2(n+6)}$.

4. Existe-t-il une valeur de l'entier n pour laquelle A et B sont indépendants ?