Corrigé du devoir surveillé n°1

Exercice 1. — SUJET A.

Exercice 2. — Deux nombres réels a et b vérifient $a+b=4$ et $ab=1$ si et seulement s'ils sont racines de l'équation $x^2-4x+1=0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta=(-4)^2-4\times1\times1=12>0$ donc celle-ci possède deux solutions réelles :

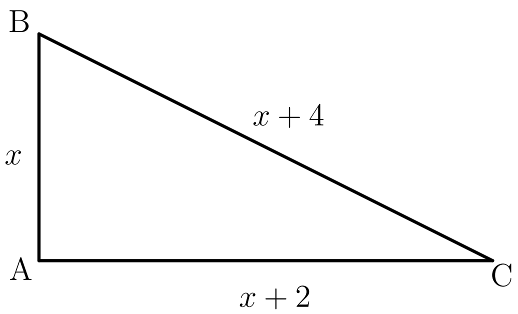
$$x_1=\frac{-(-4)-\sqrt{12}}{2\times1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}\qquad\text{et}\qquad x_2=\frac{-(-4)+\sqrt{12}}{2\times1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}.$$

Ainsi, $\boxed{2+\sqrt{3}\text{ et }2-\sqrt{3}\text{ sont deux réels dont la somme est 4 et la produit est 1}}$.

Exercice 3. — Posons $X=x^2$ de telle sorte que l'équation $x^4-2x^2-3=0$ se réécrit $X^2-2X-3=0$. Comme $3+(-1)=2$ et $3\times(-1)=-3$, les solutions de $X^2-2X-3=0$ sont $X_1=-1$ et $X_2=3$. Ainsi, $x^4-2x^2-3=0$ équivaut à $x^2=-1$ ou $x^2=3$. Comme $-1<0$, l'équation $x^2=-1$ n'a pas de solution. Par ailleurs, $x^2=3$ équivaut à $x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$.

Ainsi, finalement, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } x^4-2x^2-3=0 \text{ est } \{-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\}}$.

Exercice 4. Notons $\mathrm{AB}=x$ et faisons une figure.



Comme ABC est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, $\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2$ i.e. $(x+4)^2=x^2+(x+2)^2$. Or,

$$(x+4)^2=x^2+(x+2)^2\Leftrightarrow x^2+8x+16=x^2+x^2+4x+4\Leftrightarrow -x^2+4x+12=0\Leftrightarrow x^2-4x-12=0$$

Comme $6+(-2)=4$ et $6\times(-2)=-12$, les solutions de cette dernière équation sont 6 et -2. Comme $x>0$, on conclut que $x=6$.

Ainsi, $\boxed{\mathrm{AB}=6,\ \mathrm{AC}=8 \text{ et } \mathrm{BC}=10}$.

Exercice 5.

1. **a.** et **c.**

   Explications. Comme f est une fonction affine, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3$. Ainsi, **a.** est vraie et **b.** est fausse.

   De plus, $f(4) = 3 \times 4 - 9 = 3 = f'(4)$ donc **c.** est vraie.

2. **b.**

   Explications. Comme l'équation de T est $y = -3x + 5$, la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point d'abscisse $x = 2$ et $y = -3 \times (-2) + 5 = 11$ donc **a.** est fausse.

   Comme le coefficient directeur de T est -3, $f'(2) = -3$ donc **b.** est vraie.

   L'énoncé ne donne aucune information sur le nombre dérivée en -3 donc on ne peut pas affirmer que **c.** est vraie.

3. **b.** et **c.**

   Explications. On a montré en cours que g n'est pas dérivable en 0 donc **a.** est fausse.

   Par propriété, pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ donc **b.** est vraie.

   Comme $g'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2\times 2} = \frac{1}{4}$ et $g(4) = \sqrt{4} = 2$, l'équation réduite de T est $y = \frac{1}{4}(x-4) + 2$ i.e. $y = \frac{1}{4}x - 1 + 2$ soit $y = \frac{1}{4}x + 1$.

4. **c.**

   D'après le graphique, la pente de T est positive donc **a.** est fausse.

   La droite T passe par les points $A\,(4\,;2)$ et $B\,(6\,;5)$ donc $f'(4)$, qui est son coefficient directeur, vaut $\frac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}} = \frac{5-2}{6-4} = \frac{3}{2}$.

   Ainsi, **b.** est fausse et **c.** est vraie.

Exercice 6.

1. **a.** On a

$$\begin{aligned} f(a+h) &= (a+h)^3 - 2(a+h)^2 - 4(a+h) + 5 \\ &= a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 2(a^2 + 2ah + h^2) - 4a - 4h + 5 \\ &= a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 2a^2 - 4ah - 2h^2 - 4a - 4h + 5 \end{aligned}$$

En déduire que la fonction f est dérivable en a et déterminer $f'(a)$. De plus, $f(a) = a^3 - 2a^2 - 4a + 5$ donc

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 2a^2 - 4ah - 2h^2 - 4a - 4h + 5 \\ &\qquad - (a^3 - 2a^2 - 4a + 5) \\ &= a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 2a^2 - 4ah - 2h^2 - 4a - 4h + 5 \\ &\qquad - a^3 + 2a^2 + 4a - 5 \\ &= 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 4ah - 2h^2 - 4h \end{aligned}$$

Finalement, on obtient $t(h) = \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 4ah - 2h^2 - 4h}{h}$ et donc

$$\boxed{t(h) = 3a^2 - 4a - 4 + h^2 + 3ah - 2h}.$$

   b. On déduit de la question précédente que $\lim\limits_{h \to 0} = 3a^2 - 4a - 4$ donc f est dérivable en a et $\boxed{f'(a) = 3a^2 - 4a - 4}$.

2. On déduit de la question précédente que $f'(-1) = 3(-1)^2 - 4(-1) - 4 = 3$ et $f(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - 4(-1) + 5 = 6$ don $T : y = 3(x - (-1)) + 6$ i.e. $T : y = 3x + 3 + 6$ soit finalement $\boxed{T : y = 3x + 9}$.

3. La tangente T_a est horizontale si et seulement si son coefficient directeur est nul i.e. $f'(a) = 0$. On est donc ramené à résoudre l'équation $3a^2 - 4a - 4 = 0$. Le discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times (-4)^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 64 > 0$ donc l'équation a deux solutions réels :

$$a_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{64}}{2 \times 3} = -\frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad a_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{64}}{2 \times 3} = 2$$

Ainsi, l'ensemble des réels a tels que la tangente T_a à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a soit horizontale est $\{-\frac{2}{3} ; 2\}$.

4. La somme des coefficients de f est nul donc 1 est racine de f. Ainsi, f se factorise par $(x-1)$ i.e. il existe des réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $f(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$. Or, pour tout réel x,

$$(x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$$

donc, par unicité de la forme développée,

$$a = 1 \qquad b - a = -2 \qquad c - b = -4 \qquad -c = 5$$

donc $a = 1$, $b = -1$ et $c = -5$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = (x - 1)(x^2 - x - 5)$ donc

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ou } x^2 - x - 5 = 0.$$

Le discriminant de $x^2 - x - 5$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 21 > 0$ donc l'équation $x^2 - x - 5 = 0$ possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{21}}{2 \times 1} = \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{21}}{2 \times 1} = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}.$$

On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } f(x) = 0 \text{ est } \{1 ; \frac{1-\sqrt{21}}{2} ; \frac{1+\sqrt{21}}{2}\}}$.