♦ Chapitre 13. — Équations de droites et de cercle du plan

Dans tout ce paragraphe, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$.

I. — Rappels

1) Vecteurs directeurs

Si $\mathcal{D}$ est une droite du plan et $\vec{v}$ un vecteur non nul, on dit que $\vec{v}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ s'il existe deux points A et B appartenant à $\mathcal{D}$ tels que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Si $\vec{v}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ alors un vecteur non nul $\vec{w}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ si et seulement si $\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{v}$ c'est-à-dire si et seulement s'il existe un réel non nul k tel que $\vec{w} = k\vec{v}$.

2) Équations de droites

Une droite $\mathcal{D}$ du plan peut être représentée :

1. par une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ (où a, b, c sont trois réels tels que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$) ; le vecteur $\vec{v}\,(-b\,;a)$ est alors un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

2. par une équation réduite de la forme
   - $y = mx + p$ (où m et p sont des réels quelconques) si $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ; dans ce cas, m est le coefficient directeur de $\mathcal{D}$ et p est son ordonnée à l'origine.
   - $x = k$ (où k est un réel quelconque) si $\mathcal{D}$ est parallèle à l'axe de ordonnées.

3) Distance dans le plan

Si $A\,(x_A\,;y_A)$ et $B\,(x_B\,;y_B)$ alors

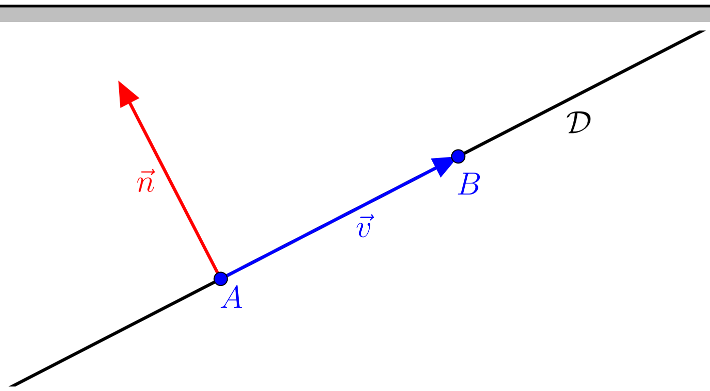
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

II. — Vecteur normal à une droite

1) Définition

Définition 1

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. On dit qu'un vecteur <u>non nul</u> $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{D}$ si $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$.



Propriété 2

Soit $\mathcal{D}$ un droite du plan et $\vec{n}$ un vecteur non nul. Alors, $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Démonstration. Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Si $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{D}$ alors $\vec{n}$ est normal à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$ donc il est orthogonal à $\vec{v}$. Réciproquement, supposons que $\vec{n}$ soit orthogonal à $\vec{v}$. Soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Alors, il existe un réel k tel que $\vec{w} = k\vec{v}$ donc

$$\vec{w} \cdot \vec{n} = (k\vec{v}) \cdot \vec{n} = k(\vec{v} \cdot \vec{n}) = k \times 0 = 0$$

donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{w}$. Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$ donc $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{D}$. □

Propriété 3

Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites du plan. Soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$. Alors, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{w}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

Démonstration. Soit A et B deux points distincts de $\mathcal{D}$ et soit C et D deux points de $\mathcal{D}'$ tels que $\overrightarrow{CD} = \vec{w}$. Alors, d'après la propriété 17 du chapitre 6, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux i.e. si et seulement si $\vec{w}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$. Comme $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, on déduit de la propriété 2 que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{w}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$. □

Exemple 4. Considérons les droites $\mathcal{D} : 6x + 2y + 5 = 0$ et $\mathcal{D}' : x - 3y + 12 = 0$. Le vecteur $\vec{v}\,(-2\,;6)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et le vecteur $\vec{w}\,(3\,;1)$ est un vecteur directeur à $\mathcal{D}'$. Ainsi, $\vec{v} \cdot \vec{w} = (-2) \times 3 + 6 \times 1 = -6 + 6 = 0$ donc $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et donc $\mathcal{D}'$ est perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

Remarque 5. De manière générale, si $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ et $\mathcal{D}' : a'x + b'y + c' = 0$ alors $\vec{v}\,(-b\,;a)$ dirige $\mathcal{D}$ et $\vec{w}\,(-b'\,;a')$ dirige $\mathcal{D}$ donc, d'après la propriété 17 du chapitre 6, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ i.e. $(-b)(-b') + aa' = 0$ i.e. $aa' + bb' = 0$. Cela revient aussi à dire que les vecteurs $\vec{n}\,(a\,;b)$ et $\vec{n}'\,(a'\,;b')$ sont orthogonaux. Ainsi, on a équivalence entre (1) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires, (2) un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est orthogonal à un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ et (3) un vecteur normal à $\mathcal{D}$ est orthogonal à un vecteur normal à $\mathcal{D}'$.

Corollaire 6

Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{D}$. Alors, un vecteur non nul $\vec{n}'$ est normal à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\vec{n}'$ est colinéaire à $\vec{n}$.

Démonstration. Soit Δ une droite dirigée par $\vec{n}$ et Δ' une droite dirigée par $\vec{n}'$. Alors, comme $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{D}$, Δ est perpendiculaire à $\mathcal{D}$ d'après la propriété 3. Par cette même propriété, $\vec{n}'$ est normal à $\mathcal{D}$ si et seulement si Δ' est perpendiculaire à $\mathcal{D}$ ce qui équivaut à dire, puisque $\Delta \perp \mathcal{D}$, que Δ et Δ' sont parallèles. Or, deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires donc on conclut que $\vec{n}'$ est normal à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\vec{n}'$ est colinéaire à $\vec{n}$. □

2) Lien avec les équations de droites

Propriété 7

Si $\mathcal{D}$ est une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ alors le vecteur $\vec{n}\,(a\,;b)$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

Démonstration. Le vecteur $\vec{v}\,(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et

$$\vec{v}\cdot\vec{n} = -b \times a + a \times b = -ab + ab = 0$$

donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et donc, par la propriété 2, $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{D}$. □

Exemple 8. Un vecteur normal à la droite $\mathcal{D} : -x + 2y + 6 = 0$ est $\vec{n}\,(-1\,;2)$.

Propriété 9

1. Si $\mathcal{D}$ est une droite d'équation réduite $y = mx + p$ alors le vecteur $\vec{n}\,(m\,;-1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.
2. Si $\mathcal{D}$ est une droite d'équation réduit $x = k$ alors le vecteur $\vec{n}\,(1\,;0)$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

Démonstration.

1. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation réduite $y = mx + p$. Cette équation (réduite) est équivalente à l'équation (cartésienne) $mx + (-1)y + p = 0$ donc, d'après la propriété 7, le vecteur $\vec{n}\,(m\,;-1)$ est normal à $\mathcal{D}$.
2. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation réduite $x = k$. Cette équation (réduite) est équivalente à l'équation (cartésienne) $x + 0y + (-k) = 0$ donc, d'après la propriété 7, le vecteur $\vec{n}\,(1\,;0)$ est normal à $\mathcal{D}$.

□

Propriété 10

On considère deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations réduites $\mathcal{D} : y = mx + p$ et $\mathcal{D}' : y = m'x + p'$. Alors, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$.

Démonstration. Le vecteur $\vec{n}\,(m\,;-1)$ est normal à $\mathcal{D}$ et le vecteur $\vec{n}'\,(m'\,;-1)$ est normal à $\mathcal{D}'$. Or, d'après la remarque 5, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux ce qui équivaut à dire que $m \times m' + (-1) \times (-1) = 0$ i.e. $mm' + 1 = 0$ soit encore $mm' = -1$. □

Propriété 11

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point du plan. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ est la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Démonstration. Notons $(a\,;b)$ les coordonnées de n, $(x_A\,;y_A)$ celles de A et $\mathcal{D}$ l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$. Notons que $A \in \mathcal{D}$ car $\overrightarrow{AA}\cdot\vec{n} = \vec{0}\cdot\vec{n} = 0$. De plus, pour tout point $M\,(x\,;y)$, $\overrightarrow{AM}\,(x - x_A\,;y - y_A)$ donc

$$\begin{aligned} M\,(x\,;y) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow (x - x_A) \times a + (y - y_A) \times b = 0 \\ &\Leftrightarrow ax - ax_A + by - by_A = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + (-ax_A - by_A) = 0 \end{aligned}$$

Posons $c = -ax_A - by_A$. Alors, $M\,(x\,;y) \in \mathcal{D}$ si et seulement si $ax + by + c = 0$ donc $\mathcal{D}$ est une droite de vecteur normal $\vec{n}$.

On conclut donc que $\mathcal{D}$ est la droite passant par a et de vecteur normal $\vec{n}$. □

Exemple 12. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A\,(-1\,;2)$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(2\,;-3)$.

Première méthode. On utilise la propriété précédente :

$$\begin{aligned} M\,(x\,;y) \in d &\Leftrightarrow (x-(-1)) \times 2 + (y-2) \times (-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x+1) - 3(y-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + 2 - 3y + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 3y + 8 = 0 \end{aligned}$$

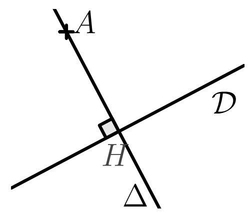
Ainsi, une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est $2x - 3y + 8 = 0$.

Seconde méthode. Comme $\vec{n}\,(2\,;-3)$ est normal à $\mathcal{D}$, une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est de la forme $2x - 3y + c = 0$ où c est un réel. De plus, $A \in \mathcal{D}$ donc $2x_A - 3y_A + c = 0$ i.e. $c = -2x_A + 3y_A = -2 \times (-1) + 3 \times 2 = 2 + 6 = 8$. Ainsi, une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est $2x - 3y + 8 = 0$.

3) Projeté orthogonal

Définition 13 : (Rappel)

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan et A un point du plan. On note Δ la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par A et H le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de Δ.
Le point H est appelé le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$.



Remarque 14. Si A appartient à la droite $\mathcal{D}$ alors $H = A$.

Exemple 15. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $2x-5y+1 = 0$ et A le point de coordonnées de $(-3\,;2)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{D}$.

Notons Δ la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par A. Alors, le vecteur $\vec{v}\,(5\,;2)$ qui est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est un vecteur normal à Δ. Dès lors,

$$\begin{aligned} M\,(x\,;y) \in \Delta &\Leftrightarrow (x-(-3)) \times 5 + (y-2) \times 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 5(x+3) + 2(y-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x + 15 + 2y - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x + 2y + 11 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, une équation cartésienne de Δ est $5x + 2y + 11 = 0$. Or, H est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et Δ donc ses coordonnées sont solutions du système :

$$(S) \begin{cases} 2x - 5y + 1 = 0 \\ 5x + 2y + 11 = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, on peut procéder soit par substitution soit par combinaisons linéaires.

Utilisons cette dernière méthode :

$$\begin{cases} 2x - 5y + 1 = 0 & L_1 \\ 5x + 2y + 11 = 0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2x - 5y + 1) + 5(5x + 2y + 11) = 0 & L_1 \leftarrow 2L_1 + 5L_2 \\ 5(2x - 5y + 1) - 2(5x + 2y + 11) = 0 & L_2 \leftarrow 5L_1 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 10y + 2 + 25x + 10y + 55 = 0 \\ 10x - 25y + 5 - 10x - 4y - 22 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 29x + 57 = 0 \\ -29y - 17 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{57}{29} \\ y = -\frac{17}{29} \end{cases}$$

Ainsi, les coordonnées de H sont $\left(-\frac{57}{29}\,;-\frac{17}{29}\right)$. Soit $\mathcal{D}$ une droite et A un point du plan.

Définition 16

Soit $\mathcal{D}$ une droite et A un point du plan. Notons H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$. La distance AH est appelée la distance de A à $\mathcal{D}$. On la note $d(A, \mathcal{D})$.

Exemple 17. Si on reprend la situation de l'exemple 15 alors

$$d(A, \mathcal{D}) = AH = \sqrt{\left(-\frac{57}{29} - (-3)\right)^2 + \left(-\frac{17}{29} - 2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{30}{29}\right)^2 + \left(-\frac{75}{29}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{29}} = \frac{15}{\sqrt{29}}$$

Propriété 18

Soit $\mathcal{D}$ une droite et A un point du plan. Pour tout point M de $\mathcal{D}$, $AM \geqslant d(A, \mathcal{D})$ avec égalité si et seulement si M est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{D}$. Notons H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$. Si $M = H$, par définition, $AH = d(A, \mathcal{D})$. Si $M \neq H$ alors le triangle AHM est rectangle en M et AM est l'hypoténuse de ce triangle donc $AM > AH$ i.e. $AM > d(A, \mathcal{D})$. On a donc bien montré que, pour tout point M de $\mathcal{D}$, $AM \geqslant d(A, \mathcal{D})$ avec égalité si et seulement si M est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$. □

III. — Équations cartésiennes de cercle

Définition 19

Soit un réel $R > 0$ et A un point du plan. Le cercle de centre A et de rayon R, noté $\mathscr{C}(A, R)$, est l'ensemble des points M du plan tels que $AM = R$.

Remarque 20. On considère parfois que le cercle de centre A et rayon 0 est réduit au seul point A.

Propriété 21

Soit A et B deux points du plan. L'ensemble de points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux est le cercle de diamètre $[AB]$ i.e. le cercle de centre I, milieu de $[AB]$, et de rayon $\frac{AB}{2}$.

Démonstration. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan tels $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ soient orthogonaux. Notons I le milieu de $[AB]$. Alors,

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} \cdot \left(-\overrightarrow{IA}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \left(\underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}}_{=\overrightarrow{0}}\right) - \overrightarrow{IA}^2 = 0 \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow MI^2 = IA^2 \Leftrightarrow IM = IA
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{E}$ est le cercle de centre I et de rayon IA, autrement dit le cercle de diamètre $[AB]$. □

Propriété 22

Soit un réel $R > 0$ et $A\,(x_A\,; y_A)$ un point du plan. Alors, un point $M\,(x\,; y)$ appartient à $\mathscr{C}(A, R)$ si et seulement si $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$.

Démonstration. Par définition, $M\,(x\,; y) \in \mathscr{C}(A, R)$ si et seulement si $AM = R$. Comme AM et R sont des nombres positifs, cela équivaut à $AM^2 = R^2$. Or, $AM^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2$ donc finalement $M\,(x\,; y) \in \mathscr{C}(A, R)$ si et seulement si $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$. □

Définition 23

On dit que l'équation $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$ est l'équation cartésienne réduite du cercle $\mathscr{C}(A, R)$.

Exemple 24.

1. Le cercle de centre $A\,(-2\,; 3)$ et de rayon $R = 4$ a pour équation réduite $(x - (-2))^2 + (y - 3)^2 = 4^2$ i.e. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$.
2. L'équation $(x + 1)^2 + (y + 8)^2 = 5$ est l'équation réduite du cercle de centre $A\,(-1\,; -8)$ et de rayon $\sqrt{5}$ (car elle peut se réécrire $(x - (-1))^2 + (y - (-8))^2 = \sqrt{5}^2$.
3. Le cercle trigonométrique a pour équation réduite $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2$ i.e. $x^2 + y^2 = 1$.

Propriété 25

Soit u, v et w des réels quelconques. Alors, l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M\,(x\,; y)$ du plan tels que $x^2 + y^2 + ux + vy + w = 0$ est soit un cercle, soit un point, soit l'ensemble vide.

Démonstration. Remarquons que $x^2 + ux$ est un polynôme du second degré en x. Sa forme canonique est $(x + \frac{u}{2})^2 - \frac{u^2}{4}$. De même, $y^2 + vy$ est un polynôme du second degré en y et sa forme canonique est $(y + \frac{v}{2})^2 - \frac{v^2}{4}$. On a donc

$$\begin{aligned} M\,(x\,;y) \in \mathscr{E} &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + ux + vy + w = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{u}{2}\right)^2 - \frac{u^2}{4} + \left(y + \frac{v}{2}\right)^2 - \frac{v^2}{4} + w = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{u}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{v}{2}\right)^2 = \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} - w \end{aligned}$$

Notons A le point de coordonnées $\left(-\frac{u}{2}\,; -\frac{v}{2}\right)$ et $T = \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} - w$. On a donc

$$M\,(x\,;y) \in \mathscr{E} \Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = T$$

Trois cas sont alors possibles :

- si $T < 0$ alors $\mathscr{E} = \varnothing$ car, pour tous réels x et y, $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 \geqslant 0$;
- si $T = 0$ alors $\mathscr{E} = \{A\}$ car $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = 0$ si et seulement si $x - x_A = 0$ et $y - y_A = 0$ i.e. $x = x_A$ et $y = y_A$;
- si $T > 0$ alors $\mathscr{E} = \mathscr{C}(A, \sqrt{T})$ car $M \in \mathscr{E}$ si et seulement si $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (\sqrt{T})^2$.

□

Remarque 26. Dans le cas où $\mathscr{E}$ est un cercle, on dit que $x^2 + y^2 + ux + vy + w = 0$ est une équation cartésienne (non réduite) de $\mathscr{C}$.

Exemple 27. Dans chaque cas suivant, déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M\,(x\,;y)$ vérifiant l'équation donnée.

1. $\mathscr{E} : x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$
On a

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0 &\Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow (x - (-1))^2 + (y - (-2))^2 = 3^2 \end{aligned}$$

donc $\mathscr{E}$ est le cercle de centre $A\,(-1\,;-2)$ et de rayon $R = 3$.

2. $\mathscr{E} : x^2 + y^2 + x - y + 1 = 0$
On a

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + x - y + 1 = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

donc $\mathscr{E}$ est $\varnothing$ car $-\frac{1}{2} < 0$.

3. $\mathscr{E} : x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$
On a

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0 &\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 + 13 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ et } y + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ et } y = -3 \end{aligned}$$

donc $\mathscr{E}$ est réduit au point $A\,(2\,;-3)$.

Exercice 28. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M\,(x\,;y)$ du plan tels que $x^3 + xy^2 + 4x^2 + xy - 5x = 0$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} x^3 + xy^2 + 4x^2 + xy - 5x = 0 &\Leftrightarrow x\left(x^2 + y^2 + 4x + y - 5\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 + 4x + y - 5 = 0 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x + y - 5 = 0 &\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{37}{4} \\ &\Leftrightarrow (x - (-2))^2 + \left(y - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$M\,(x\,;y) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x - (-2))^2 + \left(y - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2$$

donc $\mathscr{E}$ est la réunion de l'axe des ordonnées et du cercle de centre $A\left(-2\,;-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{37}}{2}$.