♦ Corrigés des exercices du chapitre 1

1) Bases de numération

Exercice 1. On considère une nombre N écrit en base 10. Déterminer N sachant que

1. le chiffre des unités de N est 3 ;
2. le nombre de centaines de N est 247 ;
3. le chiffre des dizaines de N est 2.

Solution. Par définition, $N = 247 \times 100 + 2 \times 10 + 3 = 24\,723$.

Exercice 2. Écrire en base 10 les nombres suivants (sachant que pour les bases supérieures à 10, on utilise la lettre A pour désigner 11, la lettre B pour 12, etc.)

$$N = \overline{10011101}^2 \qquad M = \overline{1\mathrm{BD}5}^{17} \qquad P = \overline{1234}^7 \qquad Q = \overline{\mathrm{BCDE}}^{16}$$

Solution.

$$\begin{aligned}
N &= 1 \times 2^7 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 = 157 \\
M &= 1 \times 17^3 + 11 \times 17^2 + 13 \times 17 + 5 = 8\,318 \\
P &= 1 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 3 \times 7 + 4 = 466 \\
Q &= 11 \times 16^3 + 12 \times 16^2 + 13 \times 16 + 14 = 48\,350
\end{aligned}$$

Exercice 3. Déterminer l'écriture du nombre 12 345 en base 7, en base 11 et en base 20.

Solution.
<u>En base 7 :</u>

$$\begin{array}{r|l} 12345 & 7 \\ \cline{2-2} 53 & 1763 \\ 44 & \\ 25 & \\ 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1763 & 7 \\ \cline{2-2} 36 & 251 \\ 13 & \\ 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 251 & 7 \\ \cline{2-2} 41 & 35 \\ 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 35 & 7 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$$

Ainsi, $12\,345 = \overline{50664}^7$.

<u>En base 11 :</u>

$$\begin{array}{r|l} 12345 & 11 \\ \cline{2-2} 13 & 1122 \\ 24 & \\ 25 & \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1122 & 11 \\ \cline{2-2} 022 & 102 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 102 & 11 \\ \cline{2-2} 3 & 9 \end{array}$$

Ainsi, $12\,345 = \overline{9303}^{11}$.

<u>En base 20 :</u>

$$\begin{array}{r|l} 12345 & 20 \\ \cline{2-2} 34 & 617 \\ 145 & \\ 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 617 & 20 \\ \cline{2-2} 17 & 30 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 20 \\ \cline{2-2} 10 & 1 \end{array}$$

Ainsi, $12\,345 = \overline{1\mathrm{AH}5}^{20}$.

Exercice 4 (CRPE – Montpellier – 1998)**.** En base sexagésimale,

$$\overline{(2)(19)(51)}^{60} = 2 \times 60^2 + 19 \times 60 + 51.$$

1. Écrire en base 10 le nombre $\overline{(3)(0)(17)(48)}^{60}$.

2. Écrire en base 60 le nombre 54 325 432.

Solution.

1. Par définition, $\overline{(3)(0)(17)(48)}^{60} = 3 \times 60^3 + 17 \times 60 + 48 = 649\,068$.

2.

$$\begin{array}{cccccccc|l}
5 & 4 & 3 & 2 & 5 & 4 & 3 & 2 & 6\,0 \\ \cline{9-9}
 & & 3 & 2 & 5 & & & & 9\,0\,5\,4\,2\,3 \\
 & & & 2 & 5 & 4 & & & \\
 & & & & 1 & 4 & 3 & & \\
 & & & & & 2 & 3 & 2 & \\
 & & & & & & 5 & 2 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc|l}
9 & 0 & 5 & 4 & 2 & 3 & 6\,0 \\ \cline{7-7}
3 & 0 & 5 & & & & 1\,5\,0\,9\,0 \\
 & & 5 & 4 & 2 & & \\
 & & & & 2 & 3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc|l}
1 & 5 & 0 & 9 & 0 & 6\,0 \\ \cline{6-6}
 & 3 & 0 & 9 & & 2\,5\,1 \\
 & & & 9 & 0 & \\
 & & & 3 & 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|l}
2 & 5 & 1 & 6\,0 \\ \cline{4-4}
 & 1 & 1 & 4
\end{array}$$

donc $54\,325\,432 = \overline{(4)(11)(30)(23)(52)}^{60}$.

Exercice 5. Effectuer les calculs suivants en posant les opérations et sans utiliser la base 10.

$$\begin{array}{ll}
\overline{101}^2 + \overline{100011}^2 & \overline{123}^7 + \overline{25}^7; \\
\overline{10010}^2 - \overline{101}^2; & \overline{3412}^5 - \overline{244}^5; \\
\overline{1011}^2 \times \overline{1001}^2; & \overline{812}^9 \times \overline{37}^9.
\end{array}$$

Solution.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & {}^1 & {}^1 & {}^1 & \\
 & & & & 1 & 0 & 1 \\
+ & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

donc $\overline{101}^2 + \overline{100011}^2 = \overline{101000}^2$.

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & {}_1 0 & {}_1 0 & 1 & {}_1 0 \\
- & & & 1 & 0 & 1 \\
- & {}_1 & {}_1 & & {}_1 & \\ \hline
 & & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

donc $\overline{10010}^2 - \overline{101}^2 = \overline{1101}^2$.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & \times & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
 & & {}^1 & {}^1 & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\
+ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
+ & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
+ & 1 & 0 & 1 & 1 & & & \\ \hline
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

donc $\overline{1011}^2 \times \overline{1001}^2 = \overline{1100011}^2$.

$$\begin{array}{cccc}
 & & {}^1 & \\
 & 1 & 2 & 3 \\
+ & & 2 & 5 \\ \hline
 & 1 & 5 & 1
\end{array}$$

donc $\overline{123}^7 + \overline{25}^7 = \overline{151}^7$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & 3 & 4 & {}_1 1 & {}_1 2 \\
- & & 2 & 4 & 4 \\
- & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\
\hline
 & 3 & 1 & 1 & 3
\end{array}$$

donc $\overline{3412}^5 - \overline{244}^5 = \overline{3113}^5$.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 8 & 1 & 2 \\
 & & \times & & 3 & 7 \\
\hline
 & & {\scriptstyle 6} & & {\scriptstyle 1} & \\
 & {\scriptstyle 2} & & & & \\
 & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & & \\
 & & & 2 & 7 & 5 \\
+ & & 6 & 3 & 6 & \\
\hline
 & 3 & 3 & 6 & 5 & 5
\end{array}$$

donc $\overline{812}^9 \times \overline{37}^9 = \overline{33655}^9$.

Exercice 6 (CRPE – Toulouse – 1998)**.** Déterminer les nombres à 3 chiffres en écriture décimale qui ne sont pas des multiples de 10 et tels que

1. le chiffre des dizaines est quadruple de celui des unités ;
2. en retranchant 297 à ce nombre, on obtient le nombre écrit à l'envers (par exemple, si le nombre de départ est 721, on obtient 127).

Solution. Les nombres cherchés sont les nombres de la forme $\overline{abc}$ tels que $c \neq 0$ (car le nombre n'est pas un multiple de 10), $b = 4c$ et $\overline{abc} - \overline{297} = \overline{cba}$. Comme a est un chiffre, il est compris entre 0 et 9 donc c ne peut valoir que 1 ou 2.

Si $c = 1$ alors $b = 4$ et $a \times 10^2 + 4 \times 10 + 1 - 297 = 10^2 + 4 \times 10 + a$ c'est-à-dire $100a - 256 = 140 + a$. On en déduit que $99a = 396$ donc $a = \frac{396}{99} = 4$. Ainsi, une solution possible est 441.

Si $c = 2$ alors $b = 8$ et $a \times 10^2 + 8 \times 10 + 2 - 297 = 2 \times 10^2 + 8 \times 10 + a$ c'est-à-dire $100a - 215 = 280 + a$. On en déduit que $99a = 495$ donc $a = \frac{495}{99} = 5$. Une autre solution possible est 582.

On vérifie bien que $441 - 297 = 144$ et $582 - 297 = 285$.

Exercice 7 (CRPE – Montpellier – 1997)**.**

1. Quelle est l'écriture, en base 10, du plus grand nombre qui s'écrive avec deux chiffres en base 8 ?
2. Quelle est l'écriture, en base 10, du plus grand nombre qui s'écrive avec deux chiffres en base 12 ?
3. Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1. En base n, le plus grand nombre qui s'écrive avec un seul chiffre est $n - 1$.
   - **a.** Déterminer le plus grand nombre qu'on peut écrire en base n avec deux chiffres.
   - **b.** Quel est le plus petit entier n pour lequel 224 (écrit en base 10) s'écrit en base n avec deux chiffres ?

Solution.

1. Le plus grand nombre à deux chiffres en base 8 est $\overline{77}^8$ i.e. $7 \times 8 + 7 = 63$.
2. Le plus grand nombre à deux chiffres en base 12 est $\overline{\mathrm{BB}}^{12}$ i.e. $11 \times 12 + 11 = 143$.
3. **a.** Le plus grand nombre à deux chiffres en base n est $\overline{(n-1)(n-1)}^n$ i.e. $(n-1) \times n + (n-1) = n^2 - 1$.
   - **b.** Pour que 224 s'écrive avec deux chiffres en base n, il faut que $n^2 - 1 \geqslant 224$ i.e. $n^2 \geqslant 225$. Or, $\sqrt{225} = 15$ donc $n \geqslant 15$. De plus, $224 = 14 \times 15 + 14$ donc $224 = \overline{(14)(14)}^{15}$ s'écrit bien avec deux chiffres en base 15. L'entier n cherché est donc $n = 15$.

Exercice 8 (CRPE – Créteil – 2000)**.** Soit A un nombre entier écrit en base 10.

1. Déterminer une condition nécessaire sur le chiffre des unités de A pour que A soit le carré d'un entier naturel. Cette condition est-elle suffisante ?
2. Déterminer une condition nécessaire sur le chiffre des unités de A pour que A soit le produit de deux entiers naturels consécutifs. Cette condition est-elle suffisante ?

Solution.

1. Dans une multiplication, le chiffre des unités du produit est le chiffre des unités du produit des chiffres des unités des deux nombres qu'on multiplie. Ainsi, le chiffre des unités de A^2 est le chiffres des unités du carré du dernier chiffre de A. Il suffit donc d'examiner le chiffre des unités des carrés des entiers de 0 à 9 :

chiffre des unités de A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
chiffre des unités de A^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Ainsi, pour que A soit un carré, il est nécessaire que son chiffre des unités soit 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.

Cette condition n'est pas suffisante. Par exemple, le chiffre des unités de 10 est 0 mais 10 n'est pas le carré d'un entier.

2. Pour la même raison, il suffit de raisonner sur les chiffres des unités :

chiffre des unités de A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
chiffre des unités de $A+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
chiffre des unités de $A(A+1)$	0	2	6	2	0	0	2	6	2	0

Ainsi, pour que A soit le produit de deux entiers consécutifs, il est nécessaire que son chiffre des unités soit 0, 2 ou 6.

Cette condition n'est pas suffisante. Par exemple, le chiffre des unités de 10 est 0 mais 10 n'est pas le produit de deux entiers consécutifs (puisqu'il ne peut s'écrit que 1×10 ou 2×5).

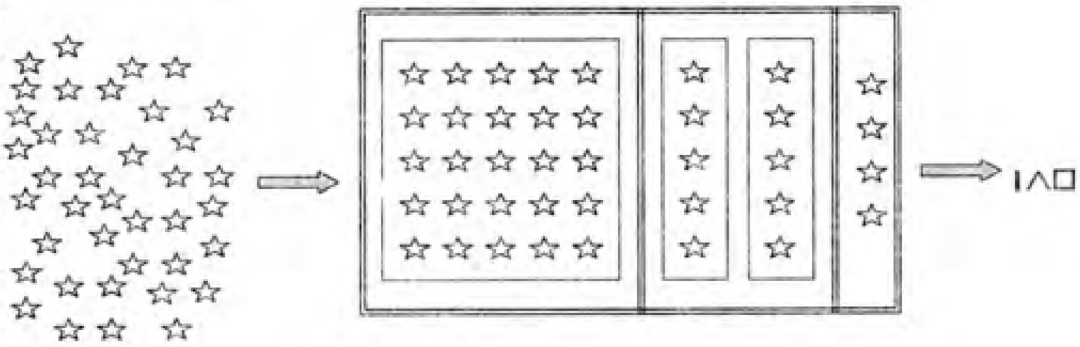
Exercice 9 (CRPE – Lille – 2005)**.** Dans la tribu des Cincofiles, on a une manière particulière de compter. Lors d'un voyage dans cette tribu, un chercheur a ramené un certain nombre d'observations qu'il a retranscrites dans un carnet. Voici ce qu'il a noté sur la manière de compter des Cincofiles :

- C'est une numération de position :
- Il n'y a que cinq symboles pour noter les nombres :

● qui correspond à notre zéro
| qui correspond à notre 1

∧ qui correspond à notre 2
∇ qui correspond à notre 3
□ qui correspond à notre 4

- Une observation :



- Des exemples de transcriptions :

|∇	□∧	∧●□	||∇□
8	22	54	169

1. En expliquant votre démarche :

a. transcrire dans notre système de numération le nombre noté par les Cincofiles « □□□ ».

b. transcrire dans le système Cincofile le nombre que nous notons « 273 ».

2. Sans passer par une transcription dans notre système de numération décimale et en justifiant votre réponse, écrire en écriture Cincofile :

a. le nombre qui précède le nombre « ∇□● » dans le système Cincofile ;

b. le nombre qui suit le nombre « ∧□□ » dans le système Cincofile.

Solution.

1. L'écriture « cincofile » n'est rien d'autre que l'écriture en base 5.

a. Le nombre noté « □□□ » est $4 + 4 \times 5 + 4 \times 5^2 = 124$.

b.

$$\begin{array}{r|l} 273 & 5 \\ \cline{2-2} 23 & 54 \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 54 & 5 \\ \cline{2-2} 4 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$$

Ainsi, $273 = \overline{2043}^5$ donc, en écriture cincofile, il se note « ∧ ● □∇ ».

2. a. La question revient effectuer la soustraction $\overline{340}^5 - \overline{1}^5$:

$$\begin{array}{rccc} & 3 & 4 & {}_10 \\ - & & & 1 \\ - & & {}_1 & \\ \hline & 3 & 3 & 4 \end{array}$$

donc $\overline{340}^5 - \overline{1}^5 = \overline{334}^5$ et ainsi le prédécesseur du nombre « ∇□● » est « ∇∇□ ».

b. La question revient effectuer l'addition $\overline{244}^5 + \overline{1}^5$:

$$\begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ & 2 & 4 & 4 \\ + & & & 1 \\ \hline & 3 & 0 & 0 \end{array}$$

donc $\overline{244}^5 + \overline{1}^5 = \overline{300}^5$ et ainsi le successeur du nombre « ∧□□ » est « ∇ ● ● ».

2) Division euclidienne

Exercice 10. Effectuer la division euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants.

1. $a = 1\,432$ et $b = 351$.
2. $a = 12\,025$ et $b = 11$.
3. $a = 124$ et $b = 999$.

Solution.

1.

$$\begin{array}{r|l} 1\,4\,3\,2 & 3\,5\,1 \\ \cline{2-2} 2\,8 & 4 \end{array}$$

donc $1\,432 = 4 \times 351 + 28$.

2.

$$\begin{array}{r|l} 1\,2\,0\,2\,5 & 1\,1 \\ \cline{2-2} 1\,0\,2 & 1\,0\,9\,3 \\ 3\,5 & \\ 2 & \end{array}$$

donc $12\,025 = 1\,093 \times 11 + 2$.

3. Comme $999 > 124$, la division euclidienne est $124 = 0 \times 999 + 124$.

Exercice 11 (CRPE – Créteil – 2004)**.** Sachant que $36\,202\,744 = 9\,658 \times 3\,748 + 4\,560$, donner le quotient de la division euclidienne de $36\,202\,744$ par $3\,748$.

Solution. $36\,202\,744 = 9\,658 \times 3\,748 + 4\,560$ n'est pas la division euclidienne car $4\,560 > 3\,748$. Cela signifie qu'on peut encore faire apparaître $3\,748$ dans $4\,560$. En l'occurrence, $4\,560 = 3\,748 + 812$ donc

$$36\,202\,744 = 9\,658 \times 3\,748 + 3\,748 + 812 = 9\,659 \times 3\,748 + 812$$

et, comme $821 < 3\,748$, on a bien la division euclidienne de $36\,202\,744$ par $3\,748$.

Exercice 12 (CRPE – Bordeaux – 2000)**.** On considère deux entiers naturels a et a'. Dans la division euclidienne par 11, le reste de a est r et celui de a' est r'.

1. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $a + a'$ par 11.
2. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $3a$ par 11.

Solution. Par définition, il existe des entiers naturels q et q' tels que $a = 11q + r$ et $a' = 11q' + r'$ avec r et r' compris entre 0 et 10.

1. Dès lors, $a + a' = 11q + r + 11q' + r' = 11(q + q') + (r + r')$. Si $r + r' < 11$, l'écriture précédente est la division euclidienne de $a + a'$ par 11 donc le reste est $r + r'$. En revanche, si $r + r' \geqslant 11$ alors l'écriture précédente n'est pas la division euclidienne de $a + a'$ par 11. Comme $r < 11$ et $r' < 11$ alors $11 \leqslant r + r' < 22$ donc $0 \leqslant r + r' - 11 < 11$. Ainsi, $a + a' = 11(q + q') + 11 + (r + r' - 11) = 11(q + q' + 1) + (r + r' - 11)$ avec $0 \leqslant r + r' - 11 < 11$ donc, dans ce cas, le reste de $a + a$" dans la division par 11 est $r + r' - 11$.

2. De même, $3a = 3(11q + r) = 11(3q) + 3r$. Si $3r < 11$ i.e. si $r \leqslant 3$ alors le reste dans la division euclidienne de $3a$ par 11 est $3r$. Sinon, on peut écrire $3a = 11(3q) + 11 + 3r - 11 = 11(3q + 1) + 3r - 11$ avec $3r - 11 \geqslant 0$. Si $3r - 11 < 11$ i.e. si $r \leqslant 7$ alors le reste dans la division euclidienne de $3a$ par 11 est $3r - 11$. Sinon, on peut écrire $3a = 11(3q) + 22 + 3r - 22 = 11(3q + 2) + 3r - 22$ avec $3r - 22 \geqslant 0$. De plus, comme $r < 11$, $3r - 22 < 11$ donc, dans ce cas, le reste de $3a$ dans la division par 11 est $3r - 22$.
Pour résumer, le reste de $3a$ dans la division par 11 est
   - $3r$ si $0 \leqslant r \leqslant 3$;
   - $3r - 11$ si $4 \leqslant r \leqslant 7$;
   - $3r - 22$ si $8 \leqslant r \leqslant 11$.

Exercice 13 (CRPE – Reims – 1997)**.** Vous comptez de 7 en 7, à partir de 38, jusqu'au plus grand nombre inférieur ou égal à 365.

1. Quel est le dernier nombre atteint ?
2. Combien y a-t-il de nombres atteints (38 y compris) ?
3. Par quels nombres peut-on remplacer 365 sans modifier les deux réponses précédentes ?

Solution.

1. Il s'agit de savoir combien de fois 7 apparaît entre 38 et 365. Pour cela, on peut faire le division euclidienne de $365 - 38 = 327$ par 7 :

$$\begin{array}{r|l} 3\,2\,7 & 7 \\ \cline{2-2} 4\,7 & 4\,6 \\ 5 & \end{array}$$

Ainsi, $327 = 46 \times 7 + 5$ donc $365 = 327 + 38 = 46 \times 7 + 5 + 38$ donc le plus grand nombre qu'on peut atteindre est $46 \times 7 + 38 = 360$.
2. Les nombres qu'on atteints sont 38, $38 + 7$, $38 + 2 \times 7$, ..., $38 + 46 \times 7$ donc il y a 47 nombres atteints.
3. Pour obtenir les mêmes résultats, il faut que le nombre soit de la forme $38 + 46 \times 7 + r$ avec $0 \leqslant r < 7$. Il s'agit donc de 360, 361, 362, 363, 364, 365 et 366.

Exercice 14 (CRPE – Lyon – 1993)**.** Un enfant range toutes les petites voitures dont il dispose.
Il les met par rangées de 6 : il lui en reste 3.
Il les met par rangées de 5 : il n'en reste pas.

1. S'il les range par 3, en reste-t-il ? Justifier cette réponse.
2. S'il les range par 2, en reste-t-il ? Justifier cette réponse.
3. Quel peut être le nombre de voitures de cet enfant, sachant qu'il en a moins de 100 ?

Solution. Notons N le nombre de petites voitures.

1. La première information assure qu'il existe un entier q tel que $N = 6q + 3$ donc $N = 3(2q + 1)$. Ainsi, il peut faire $2q + 1$ groupes de 3 donc s'il range les voitures par 3, il n'en reste pas.
2. De même, $N = 6q + 2 + 1 = 2(3q + 1) + 1$ donc s'il range les voitures par 2 alors il lui en reste 1.
3. On sait que N est de la forme $6q + 3$. De plus, s'il range les voitures par 5, il n'en reste pas donc N est aussi de la forme $5q'$. Ainsi, N est un impair multiple de 5 donc N vaut 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85 ou 95. Parmi ces nombres, on élimine ceux donc le reste dans la division par 6 n'est pas 3 : $5 = 6 \times 0 + 5$, $25 = 4 \times 6 + 1$, $35 = 6 \times 5 + 5$, $55 = 6 \times 9 + 1$, $65 = 6 \times 10 + 5$, $85 = 6 \times 14 + 1$ et $95 = 6 \times 15 + 5$. Il reste $15 = 6 \times 2 + 3$, $45 = 6 \times 7 + 3$ et $75 = 6 \times 12 + 3$.
Ainsi, le nombre de petites voitures est 15, 45 ou 75.

3) Diviseurs et multiples

Exercice 15. Déterminer les diviseurs de 12, ceux de 75 et ceux de 121.

Solution. Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12.
Les diviseurs de 75 sont 1, 3, 5, 15, 25 et 75
Les diviseurs de 121 sont 1, 11 et 121.

Exercice 16. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera chacune de ses réponses.

1. Si un entier est divisible par 3 alors il est divisible par 6.
2. Si un entier est divisible par 6 alors il est divisible par 3.
3. Si un entier n est divisible par 4 et par 6 alors il est divisible par 6×4.
4. Si un entier est un multiple pair de 5 alors son chiffre des unités (en base dix) est 0.
5. Si les trois derniers chiffres d'un nombre écrit en base 10 sont 1 (centaine), 2 (dizaines) et 5 (unités) alors ce nombre est divisible par 125.
6. Si les deux derniers chiffres d'un nombre écrit en base 10 sont 1 (dizaine) et 5 (unités) alors ce nombre est divisible par 15.

Solution.

1. Faux. Le nombre 3 est divisible par 3 (car $3 = 3 \times 1$) mais pas par 6.
2. Vrai. Si n est divisible par 6 alors il existe un entier q tel que $n = 6q$ donc $n = 3(2q)$ et ainsi, comme $2q$ est un entier, 3 divise n.
3. Faux. Le nombre 12 est divisible par 6 et par 4 car $12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$ mais 12 n'est pas un multiple de 24.
4. Vrai. Le chiffre des unités d'un nombre divisible par 5 est 0 ou 5. Or, si le chiffre des unités est 5 alors le nombre est impair donc le chiffre des unités d'un nombre pair divisible par 5 est 0.
5. Vrai. Notons m le nombre des milliers de l'entier N considéré. Alors, $N = 1\,000m + 125$. Or, $1\,000 = 8 \times 125$ donc $N = 8 \times 125 \times m + 125 = 125(8m + 1)$. Comme $8m + 1$ est un entier, on en déduit que 125 divise N.
6. Faux. Par exemple, 115 se termine par 15 mais $115 = 7 \times 15 + 10$ donc 15 ne divise pas 115.

Exercice 17 (CRPE – Aix-Marseille – 2000)**.** Déterminer le nombre $a = \overline{mcdu}^{10}$ tel que $a > 7\,000$, a est divisible par 45, a est impair et le chiffre des milliers de a est le double de celui des centaines.

Solution. Comme $a > 7\,000$, $m \geqslant 7$ donc m vaut 7, 8 ou 9. De plus, on sait que m est le double de c donc m est pair Ainsi, $m = 8$ et donc $c = 4$. Comme a est divisible par 45, il est en particulier divisible par 5 donc u vaut 0 ou 5 et, comme a est impair, $u = 5$. Ainsi, a vaut 8 405, 8 415, 8 425, 8 435, 8 445, 8 455, 8 465, 8 475, 8 485 ou 8 495. Parmi ces nombres, seul 8 415 est divisible par 45 donc $a = 8\,415$.

Exercice 18 (CRPE – Lyon – 1998)**.** Les multiples de 21 dont l'écriture décimale nécessite deux chiffres exactement sont : 21, 42, 63 et 84. Pour écrire cette liste, il faut 8 caractères d'imprimerie.

1. Combien en faut-il pour écrire la liste des multiples de 21 dont l'écriture décimale nécessite trois chiffres exactement ?

2. Même question avec cinq chiffres.

Solution.

1. Il s'agit de compter le nombre de multiples de 21 entre 100 et 999. La division euclidienne de 100 par 21 est $100 = 4 \times 21 + 16$ donc le premier multiple de 21 après 100 est $5 \times 21 = 105$. De même, la division euclidienne de 999 par 21 est $999 = 47 \times 21 + 12$ donc le dernier multiple de 21 avant 999 est $47 \times 21 = 987$. Ainsi, les multiples de 21 compris entre 100 et 999 sont 5×21, 6×21, ..., 47×21 : il y en a donc 43. Comme chacun de ces nombres possèdent 3 chiffres, il faut donc $43 \times 3 = 129$ caractères pour les écrire.

2. On raisonne de même avec les multiples de 21 ente 10 000 et 99 999. La division euclidienne de 10 000 par 21 est $10\,000 = 476 \times 21 + 4$ donc le premier multiple de 21 après 10 000 est $477 \times 21 = 10\,017$. De même, la division euclidienne de 99 999 par 21 est $99\,999 = 4\,761 \times 21 + 18$ donc le dernier multiple de 21 avant 99 999 est $4761 \times 21 = 99\,981$. Ainsi, les multiples de 21 compris entre 10 000 et 99 999 sont 477×21, 478×21, ..., $4\,761 \times 21$: il y en a donc $4\,761 - 477 + 1 = 4\,285$. Comme chacun de ces nombres possèdent 5 chiffres, il faut donc $4\,285 \times 5 = 21\,425$ caractères pour les écrire.

Exercice 19 (CRPE – Groupement 3 – 2019)**.**

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $30n + 25$ est divisible par 5.

2. Voici un programme de calcul :

choisir un nombre entier multiplier par 3 ajouter 5 élever au carré soustraire neuf fois le carré du nombre de départ

a. Montrer que si le nombre choisi au départ est 8 alors le résultat du programme est 265. On détaillera les calculs.

b. Quel résultat obtient-on si l'entier choisi au départ et -56 ?

c. Montrer que, quel que soit l'entier choisi au départ, le résultat du programme de calcul est divisible par 5.

Solution.

1. Soit un entier naturel n. Alors, $30n + 25 = 5 \times 6n + 5 \times 5 = 5(6n + 5)$ donc, comme $6n + 5$ est un entier, 5 divise $30n + 25$.

2. **a.** Si on part de 8 alors on obtient successivement $8 \times 3 = 24$, $24 + 5 = 29$, $29^2 = 841$ et $841 - 9 \times 8^2 = 265$. Ainsi, on obtient bien 265.

b. Si on part de -56 alors on obtient successivement $-56 \times 3 = -168$, $-168 + 5 = -163$, $(-163)^2 = 26\,569$ et $26\,569 - 9 \times (-56)^2 = -1\,655$. Ainsi, on obtient bien $-1\,655$.

c. Soit n le nombre choisi au départ. On obtient successivement $3n$, $3n + 5$, $(3n + 5)^2$ et $(3n + 5)^2 - 9 \times n^2$. Or,

$$(3n + 5)^2 - 9n^2 = (3n)^2 + 2 \times 3n \times 5 + 5^2 - 9n^2 = 9n^2 + 30n + 25 - 9n^2 = 30n + 25$$

donc, d'après le première question, le résultat est bien divisible par 5.

Exercice 20 (CRPE – Créteil – 2004)**.** Un entier N a pour écriture décimale $\overline{72a83b}^{10}$. Sachant que N est divisible par 6 et par 45,

1. déterminer la valeur de b ;
2. déterminer N.

Solution.

1. Comme N est divisible par 6, il est divisible par 2 donc pair et ainsi b est pair. De même, comme N est divisible par 45, il est divisible par 5 donc b vaut 0 ou 5. On conclut donc que $b = 0$.
2. Comme N est divisible par 45, il est divisible par 9 donc la somme de ces chiffres est divisible par 9. Or, cette somme est $7+2+a+8+3+0 = 20+a$. Le seul chiffre a qui donne un diviseur de 9 est $a = 7$ qui donne $27 = 9 \times 3$. Ainsi, $N = 727\,830$.

Exercice 21 (CRPE – Amiens – 2002)**.** Soit $N = \overline{mcdu}$ un nombre entier naturel écrit en base 10 pour lequel $m > c > d > u > 0$.

1. Quel est le plus petit entier N possible ?
2. Quel est le plus grand entier N possible ?
3. Dresser la liste des entiers N pour lesquels le chiffre des milliers est 6.

   On note N' le nombre obtenu à partir de N en permutant le chiffre des unités avec celui des milliers et le chiffres des centaines avec celui des dizaines. On note de plus $D = N - N'$.
4. Exprimer D en fonction de m, c, d et u.
5. Montrer que D est un multiple de 9.
6. Quelle est la valeur maximale de D ? Pour quelle(s) valeur(s) de N, D est-il maximal ?
7. Quelle est la valeur minimale de D ? Pour quelle(s) valeur(s) de N, D est-il minimal ?

Solution.

1. Comme $m > c > d > u > 0$, au minimum u vaut 1, d vaut 2, C vaut 3 et d vaut 4 donc le plus petit entier possible est $4\,321$.
2. De même, au maximum $m = 9$, $c = 8$, $d = 7$, $u = 6$ donc le plus grand entier possible est $9\,876$.
3. Si $m = 6$ alors N vaut $6\,321$, $6\,421$, $6\,521$, $6\,431$, $6\,421$, $6\,521$, $6\,541$, $6\,432$, $6\,532$, $6\,542$, $6\,543$.
4. Par définition, $N = 1000m + 100c + 10d + u$ et $N' = 1000u + 100d + 10c + m$ donc $D = 1000m + 100c + 10d + u - (1000u + 100d + 10c + m) = 999m + 90c - 90d - 999u$.
5. On remarque que $D = 9(111m + 10c - 10d - 111u)$ donc, comme $111m + 10c - 10d - 111u$ est un entier, D est un multiple de 9.
6. Le nombre D est maximal si m et c sont maximaux et d et u sont minimaux i.e. si $m = 9$, $c = 8$, $u = 1$ et $d = 2$. La valeur de minimale de D est donc $999 \times 9 + 90 \times 8 - 90 \times 2 - 999 \times 1 = 8\,532$ et il est atteint pour $N = 9\,821$.
7. En remarquant que $N = 999(m-u) + 90(c-d)$, on observe que D est minimale si $m-u$ et $c-d$ sont minimaux. Comme $m > c > d > u$, cela se produit si $c - d = 1$ et $m - u = 3$. Ainsi, la valeur minimale de D est $3\,087$ et elle est atteinte si N vaut $9\,876$, $8\,765$, $7\,654$, $6\,543$, $5\,432$ ou $4\,321$.

Exercice 22 (CRPE – Orléans-Tours – 1998)**.**

1. Que vaut $\overline{132}^{6}$? Est-il multiple de 6 ? Est-il multiple de 2 ?
2. $\overline{324}^{6}$, $\overline{222}^{6}$, $\overline{550}^{6}$ sont-ils multiples de 6 ? Sont-ils multiples de 2 ?

3. Énoncer et montrer les critères de divisibilité par 6 et 2 pour un nombre de la forme $\overline{abc}^6$.

4. Montrer que $\overline{325}^6$, $\overline{212}^6$, $\overline{555}^6$ sont multiples de 5.

5. Énoncer et montrer le critère de divisibilité par 5 pour un nombre de la forme $\overline{abc}^6$.

Solution.

1. Par définition, $\overline{132}^6 = 1 \times 6^2 + 3 \times 6 + 2 = 56$. Comme $56 = 9 \times 6 + 2$, $\overline{132}^6$ n'est pas un multiple de 6 mais, comme il est pair, il s'agit d'un multiple de 2.

2. $\overline{324}^6 = 3 \times 6^2 + 2 \times 6 + 4 = 124 = 20 \times 6 + 4$ donc $\overline{324}^6$ n'est pas divisible par 6 mais, comme il est pair, il est divisible par 2.
$\overline{222}^6 = 2 \times 6^2 + 2 \times 6 + 2 = 86 = 14 \times 6 + 2$ donc $\overline{222}^6$ n'est pas divisible par 6 mais, comme il est pair, il est divisible par 2.
$\overline{550}^6 = 5 \times 6^2 + 5 \times 6 = 210 = 35 \times 6$ donc $\overline{550}^6$ est divisible par 6 mais, comme il est pair, il est divisible par 2.

3. Par définition, $\overline{abc}^6 = a \times 6^2 + b \times 6 + c = 6(6a + b) + c$ avec $0 \leqslant c < 6$ donc il s'agit de la division euclidienne de $\overline{abc}^6$ par 6. On en déduit que ce nombre est divisible par 6 si et seulement si $c = 0$.
De même, $\overline{abc}^6 = a \times 6^2 + b \times 6 + c = 2(18a + 3b) + c$ avec $0 \leqslant c < 6$ et ce nombre est pair si et seulement si c est pair.

4. $\overline{325}^6 = 3 \times 6^2 + 2 \times 6 + 5 = 125 = 25 \times 5$, $\overline{212}^6 = 2 \times 6^2 + 1 \times 6 + 2 = 80 = 16 \times 5$ et $\overline{555}^6 = 5 \times 6^2 + 5 \times 6 + 5 = 215 = 43 \times 5$ donc ces trois nombres sont divisibles par 5.

5. Par définition,

$$\overline{abc}^6 = a \times 6^2 + b \times 6 + c = 36a + 6b + c = 35a + a + 5b + b + c = 5(7a + b) + a + b + c.$$

Dès lors, $\overline{abc}^6$ est divisible par 5 si et seulement si $a + b + c$ est divisible par 5. Autrement dit, $\overline{abc}^6$ est divisible par 5 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 5.

Exercice 23 (CRPE – Groupement 1 – 2011)**.** L'écriture en base 3 d'un nombre n positif est de la forme $\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$ où

— k est un entier naturel ;
— les termes a_0, a_1, ..., a_{k-1} et a_k sont compris entre 0 et 2 ;
— $a_k > 0$ sauf si $n = 0$ (auquel cas $k = 0$ et $a_0 = 0$) ;
— les termes a_0, a_1, ..., a_{k-1}, a_k sont alors appelés les chiffres de l'écriture en base 3 de n.

Toutes les réponses devront être justifiées.

1. a. Vérifier que l'écriture en base 3 du nombre 11 est $\overline{102}$.

b. Quelle est l'écriture en base 3 du nombre 74 ?

c. Que peut-on dire d'un nombre dont l'écriture en base 3 se termine par le chiffre « 0 » ?

2. On s'intéresse aux nombres entiers n dont aucun chiffre de l'écriture en base 3 ne prend la valeur 2. On appellera ces nombres des entiers 2-lacunaires. Par exemple, $12 = \overline{110}$ est 2-lacunaire alors que $19 = \overline{201}$ ne l'est pas.

a. Déterminer le nombre d'entiers 2-lacunaires compris entre 0 et 100.

b. À quelle condition nécessaire et suffisante un nombre 2-lacunaire possédant 4 chiffres en base 3 est-il divisible par 2 ?

3. On appelle nombres 1-lacunaires les nombres entiers n dont aucun chiffre de l'écriture en base 3 ne prend la valeur 1.

a. Montrer que tout entier 1-lacunaire est le double d'un entier 2-lacunaire.

b. Montrer que tout entier peut se décomposer comme la somme d'un entier 2-lacunaire et d'un entier 1-lacunaire.

c. Montrer que cette décomposition n'est pas toujours unique.

Solution.

1. a. $\overline{102} = 1 \times 3^2 + 0 \times 3 + 2 = 9 + 2 = 11$ donc l'écriture en base 3 de 11 est bien $\overline{102}$.

b.

$$\begin{array}{r|l} 74 & 3 \\ \cline{2-2} 14 & 24 \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 2 \end{array}$$

Ainsi, $74 = \overline{2202}$.

c. Si l'écriture d'un nombre N en base 3 se termine par 0 alors ce nombre est de la forme $a_k \times 3^k + a_{k-1} \times 3^{k-1} + \cdots + a_1 \times 3 = 3(a_k \times 3^{k-1} + a_{k-1} \times 3^{k-2} + \cdots + a_1)$ donc N est divisible par 3.

2. a. Écrivons 100 en base 3 :

$$\begin{array}{r|l} 100 & 3 \\ \cline{2-2} 10 & 33 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 33 & 3 \\ \cline{2-2} 03 & 11 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$$

donc $100 = \overline{10201}$. Un nombre 2-lacunaire inférieur ou égal à 100 a donc une écriture en base 3 de la forme :

- $\overline{a}$ avec a valant 0 ou 1 ;
- $\overline{1a}$ avec a valant 0 ou 1 ;
- $\overline{1ab}$ avec a et b valant 0 ou 1 ;
- $\overline{1abc}$ avec a, b et c valant 0 ou 1 ;
- $\overline{10abc}$ avec a, b et c valent 0 ou 1.

Ainsi, le nombre d'entiers 2-lacunaires inférieurs à 100 est $2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^3 = 24$.

b. Un nombre 2-lacunaire N à 4 chiffres a une écriture de la forme $\overline{1abc}$ avec a, b et c valant 0 ou 1. Son écriture en base 10 est donc

$$N = 3^3 + a \times 3^2 + b \times 3 + c = 27 + 9a + 3b + c = 2(13 + 4a + b) + 1 + a + b + c.$$

Comme $2(13 + 4a + b)$ est pair, le nombre N est divisible par 2 si et seulement si $1 + a + b + c$ est pair i.e. si et seulement si $a + b + c$ est impair. Comme a, b et c valent 0 ou 1, ceci équivaut à dire que soit les trois chiffres a, b et c sont tous égaux à 1 soit qu'un seul d'entre eux est égal à 1. Ainsi, le nombre $\overline{1abc}$ est divisible par 2 si et seulement si son écriture contient soit 4 fois le chiffre 1 soit exactement 2 fois le chiffres 1. On conclut donc que N est divisible par 2 si et seulement si son écriture en base 3 contient un nombre pair de chiffre 1.

3. a. Un nombre 1-lacunaire N s'écrit $\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$ avec des chiffres a_0, a_1, ..., a_k qui ne valent pas 1 donc qui valent soit 0 soit 2. Considérons le nombre $N' = \overline{b_k b_{k-1} \cdots b_1 b_0}$ où, pour tout i entre 0 et k, $b_i = \frac{a_i}{2}$ (i.e. $b_i = 0$ si $a_i = 0$ et $b_i = 1$ si $a_i = 2$). Alors, N' est un nombre 2-lacunaire (puisque ces chiffres sont 0 ou 1) et, par construction, $N = 2N'$.

b. L'idée est de rassembler les 1 dans un nombre est le 2 dans un autre. Par exemple, $\overline{12022011}$ peut s'écrire comme la somme de $\overline{10000011}$ et de $\overline{2022000}$ où le premier est 2-lacunaire et le second est 1-lacunaire. Considérons un entier $N = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$ écrit en base 3. On pose, pour tout i entre 0 et k,

- $b_i = 0$ si $a_i = 0$ ou si $a_i = 1$ et $b_i = 1$ sinon ;
- $c_i = 0$ si $a_i = 0$ ou si $a_i = 2$ et $c_i = 2$ sinon.

Alors, $N = N_1 + N_2$ où $N_1 = \overline{b_k b_{k-1} \cdots b_1 b_0}$ et $N_2 = \overline{c_k c_{k-1} \cdots c_1 c_0}$. (En fait, on fait ici une petite entorse à la définition car les nombres b_k, b_{k-1}, ... ou c_k, c_{k-1}, ... peuvent être nuls.)

c. Le nombre $\overline{10}$ peut s'écrire $\overline{0} + \overline{10}$ ou $\overline{2} + \overline{1}$ donc la décomposition n'est pas unique.