

◆ Corrigés des exercices du chapitre 9

1 Exercices

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer à partir de quel rang la suite (u_n) est définie et calculer les 3 premiers termes de la suite.

$$\text{a) } u_n = -n^2 + n + 1 \quad \text{b) } u_n = \frac{1}{n-3} \quad \text{c) } u_n = \sqrt{n^2 - 4}$$

Solution.

a) (u_n) est définie à partir du rang 0. Les trois premiers termes sont $u_0 = -0^2 + 0 + 1 = 1$, $u_1 = -1^2 + 1 + 1 = 1$ et $u_2 = -2^2 + 2 + 1 = -1$.

b) (u_n) est définie pour tout entier n tel que $n - 3 \neq 0$ c'est-à-dire $n \neq 3$. Puisque l'énoncé demande un rang à partir duquel (u_n) est définie, on peut dire que (u_n) est définie à partir du rang 4. Dans ce cas, les trois premiers termes sont $u_4 = \frac{1}{4-3} = 1$, $u_5 = \frac{1}{5-3} = \frac{1}{2}$ et $u_6 = \frac{1}{6-3} = \frac{1}{3}$.

c) (u_n) est définie pour tout entier n tel que $n^2 - 4 \geq 0$ c'est-à-dire $n \geq 2$. Les trois premiers termes sont $u_2 = \sqrt{2^2 - 4} = 0$, $u_3 = \sqrt{3^2 - 4} = \sqrt{5}$ et $u_4 = \sqrt{4^2 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{n}{n+1}$.

1. Calculer les 3 premiers termes de cette suite.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $u_n + 1$, u_{n+1} , $u_n - 1$ et u_{n-1} en fonction de n .

Solution.

1. Les trois premiers termes de (u_n) sont $u_0 = \frac{0}{0+1} = 0$, $u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$.
2. On a :

$$u_n + 1 = \frac{n}{n+1} + 1 = \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+1} = \frac{n+n+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$u_n - 1 = \frac{n}{n+1} - 1 = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} = \frac{n-(n+1)}{n+1} = \frac{n-n-1}{n+1} = -\frac{1}{n+1}$$

$$u_{n-1} = \frac{n-1}{(n-1)+1} = \frac{n-1}{n-1+1} = \frac{n-1}{n}$$

Exercice 3. Dans chaque cas, calculer les 3 premiers termes de la suite (u_n)

$$\text{a) } \begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \geq 0, u_{n+1} = u_n^2 + u_n \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} u_5 = 1 \\ \text{pour tout } n \geq 5, u_{n+1} = u_n - n \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ \text{pour tout } n \geq 1, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1} \end{cases}$$

Solution. a) $u_0 = 1$, $u_1 = u_0^2 + u_0 = 1 + 1 = 2$, $u_2 = u_1^2 + u_1 = 2^2 + 2 = 6$.

b) $u_5 = 1$, $u_6 = u_{5+1} = u_5 - 5 = 1 - 5 = -4$, $u_7 = u_{6+1} = u_6 - 6 = -10$.

c) $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{u_1}{u_1+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ et $u_3 = \frac{u_2}{u_2+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Exercice 4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 5n$.

1. Calculer les 3 premiers termes de (u_n) .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n et de n .

Solution.

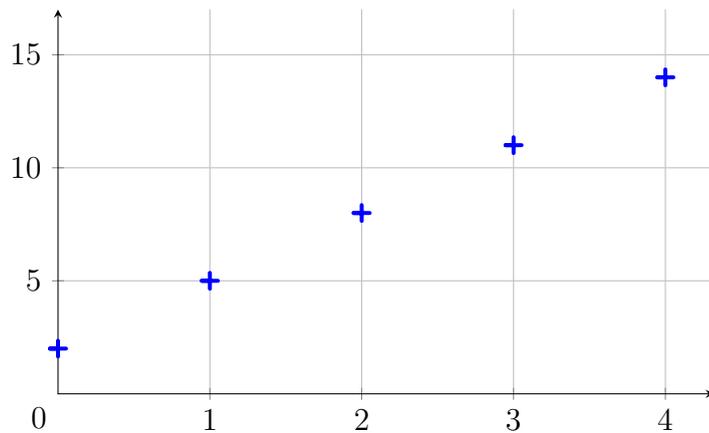
1. Les trois premiers termes de (u_n) sont $u_0 = 1$, $u_1 = u_{0+1} = u_0^2 - 5 \times 0 = 1^2 - 0 = 1$ et $u_2 = u_{1+1} = u_1^2 - 5 \times 1 = 1^2 - 5 = -4$.
2. Par définition, $u_{n+2} = u_{(n+1)+1} = u_{n+1}^2 - 5(n+1)$. Or, $u_{n+1} = u_n^2 - 5n$ donc $u_{n+2} = (u_n - 5n)^2 - 5(n+1) = u_n^2 - 2 \times u_n \times 5n + (5n)^2 - 5n - 5 = u_n^2 - 10nu_n + 25n^2 - 5n - 5$.

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, représenter les 5 premiers points du nuage de points associé à la suite (u_n) .

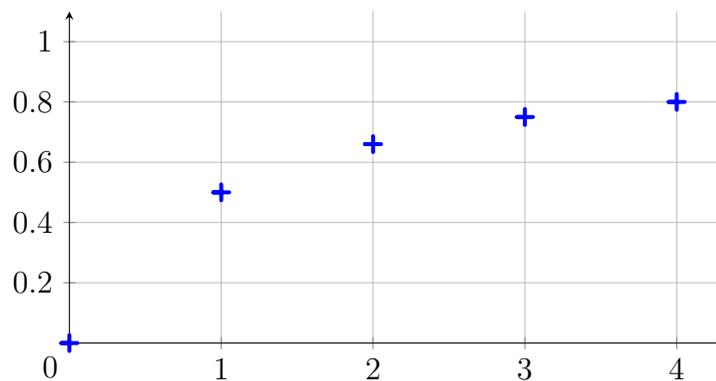
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n + 2$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n}{n+1}$.
3. $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 - u_n^2$.
4. $u_2 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 2$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{n-1}$.

Solution.

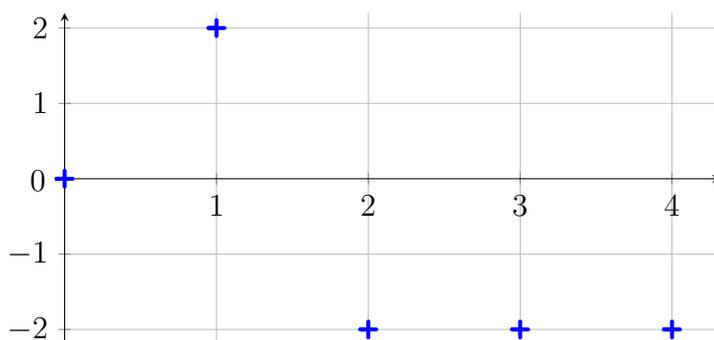
1. $u_0 = 2$, $u_1 = 5$, $u_2 = 8$, $u_3 = 11$ et $u_4 = 14$.



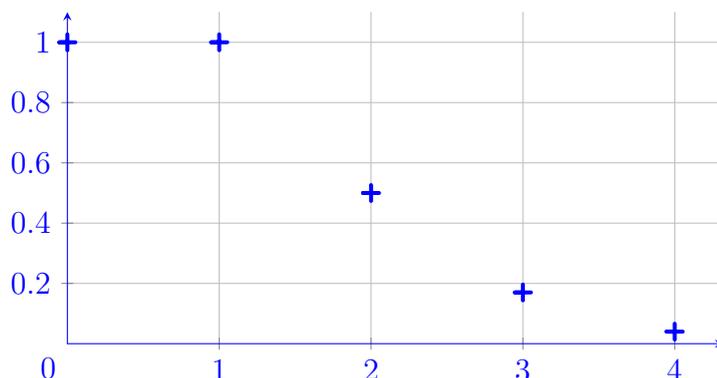
2. $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{2}{3}$, $u_3 = \frac{3}{4}$ et $u_4 = \frac{4}{5}$.



3. $u_0 = 0$, $u_1 = u_{0+1} = 2 - u_0^2 = 2$, $u_2 = u_{1+1} = 2 - u_1^2 = -2$, $u_3 = u_{2+1} = 2 - u_2^2 = -2$ et $u_4 = u_{3+1} = 2 - u_3^2 = -2$.



4. $u_2 = 1$, $u_3 = u_{2+1} = \frac{u_2}{2-1} = 1$, $u_4 = u_{3+1} = \frac{u_3}{3-1} = \frac{1}{2}$, $u_5 = u_{4+1} = \frac{u_4}{4-1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ et $u_6 = u_{5+1} = \frac{1}{5-1} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$.



Exercice 6. On considère deux suites (a_n) et (b_n) définies par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{3a_n + 2b_n}{5} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = 2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = \frac{2a_n + 3b_n}{5} \end{cases}$$

- Calculer a_1 , b_1 , a_2 et b_2 .
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = a_n + b_n$. Démontrer que la suite (s_n) est constante.
- En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 3 - a_n$.

Solution.

- Par définition, $a_1 = \frac{3a_0 + 2b_0}{5} = \frac{3 \times 1 + 2 \times 2}{5} = \frac{7}{5}$ et $b_1 = \frac{2a_0 + 3b_0}{5} = \frac{2 \times 1 + 3 \times 2}{5} = \frac{8}{5}$.
De même, $a_2 = \frac{3a_1 + 2b_1}{5} = \frac{3 \times \frac{7}{5} + 2 \times \frac{8}{5}}{5} = \frac{37}{25}$ et $b_2 = \frac{2a_1 + 3b_1}{5} = \frac{2 \times \frac{7}{5} + 3 \times \frac{8}{5}}{5} = \frac{38}{25}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{3a_n + 2b_n}{5} + \frac{2a_n + 3b_n}{5} \\ &= \frac{3a_n + 2b_n + 2a_n + 3b_n}{5} = \frac{5a_n + 5b_n}{5} = a_n + b_n = s_n. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n$ donc (s_n) est constante.

- Par définition, $s_0 = a_0 + b_0 = 1 + 2 = 3$. Comme (s_n) est constante, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = 3$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = 3$ i.e. $b_n = 3 - a_n$.

Exercice 7. Étudier les variations des suites suivantes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 3$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{n+2}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{n}{n+1}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 1 - \frac{1}{n+3}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \frac{2^n}{5^n}$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \frac{2^n}{7^{n+1}}$.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_{n+1} = (n+1)^2 + 3 = n^2 + 2n + 1 + 3 = n^2 + 2n + 4$ donc $u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 4 - (n^2 + 3) = n^2 + 2n + 4 - n^2 - 3 = 2n + 1 \geq 0$ car $n \geq 0$. Ainsi, (u_n) est croissante.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $0 < n+1 \leq n+2$ donc $\frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{n+3}$ i.e. $u_n \geq u_{n+1}$. Ainsi, (u_n) est décroissante.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1 - (n^2 + 2n)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \geq 0 \end{aligned}$$

car $n \geq 0$. Ainsi, (w_n) est croissante.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 - \frac{1}{n+1+2} - \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = -\frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{-(n+2)}{(n+3)(n+2)} + \frac{n+3}{(n+2)(n+3)} = \frac{-n-2+n+3}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} \geq 0 \end{aligned}$$

car $n \geq 0$.

On conclut donc que (t_n) est croissante.

5. Comme $2 > 0$ et $5 > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $s_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{2^n \times 2}{5^n \times 5}$ donc

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{\frac{2^n \times 2}{5^n \times 5}}{\frac{2^n}{5^n}} = \frac{2^n \times 2}{5^n \times 5} \times \frac{5^n}{2^n} = \frac{2}{5} \leq 1$$

donc (s_n) est décroissante.

6. Comme $2 > 0$ et $7 > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $z_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{7^{n+1+1}} = \frac{2^n \times 2}{7^{n+1} \times 7}$ donc

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{\frac{2^n \times 2}{7^{n+1} \times 7}}{\frac{2^n}{7^{n+1}}} = \frac{2^n \times 2}{7^{n+1} \times 7} \times \frac{7^{n+1}}{2^n} = \frac{2}{7} \leq 1$$

donc (z_n) est décroissante.

Exercice 8. Étudier les variations des suites suivantes.

1. (u_n) est définie par $u_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1 - 2u_n)$.
2. (v_n) est définie par $v_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 2n$.
3. (w_n) est définie par $w_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + n - 5$.
4. (t_n) est définie par $t_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = t_n + (-1)^n$.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_{n+1} - u_n = u_n(1 - 2u_n) - u_n = u_n - 2u_n^2 - u_n = -2u_n^2 \leq 0$ donc (u_n) est décroissante.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $v_{n+1} - v_n = v_n - 2n - v_n = -2n \leq 0$ car $n \geq 0$. Ainsi, (v_n) est décroissante.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $w_{n+1} - w_n = w_n + n - 5 - w_n = n - 5$. Or, $n - 5 \geq 0$ si et seulement si $n \geq 5$ donc (w_n) est croissante à partir du rang 5.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $t_{n+1} - t_n = t_n + (-1)^n - t_n = (-1)^n$. Or, si n est pair $(-1)^n \geq 0$ et, si n est impair, $(-1)^n \leq 0$. Ainsi, le signe de $t_{n+1} - t_n$ alterne avec la parité de n donc (t_n) n'est monotone à partir d'aucun rang.

Exercice 9. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{2^n}{n^2}$.

1. Calculer, à l'aide de la calculatrice, les 10 premiers termes de (u_n) et conjecturer que (u_n) est monotone à partir d'un rang que l'on déterminera.
2. Démontrer la conjecture de la question précédente.

Solution.

1. À l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que (u_n) est croissante à partir du rang 3.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{2^n}{n^2} = \frac{2^n \times 2}{(n+1)^2} - \frac{2^n}{n^2} = \frac{2^n \times 2 \times n^2}{n^2(n+1)^2} - \frac{2^n(n+1)^2}{n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{2^n(2n^2 - (n+1)^2)}{n^2(n+1)^2} = \frac{2^n(2n^2 - n^2 - 2n - 1)}{n^2(n+1)^2} = \frac{2^n(n^2 - 2n - 1)}{n^2(n+1)^2} \end{aligned}$$

Comme $2^n > 0$ et $n^2(n+1)^2 > 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le signe de $n^2 - 2n - 1$. Or, $n^2 - 2n - 1 = n(n-2) - 1$ donc, si $n \geq 3$, alors $n-2 \geq 1$ donc $n(n-2) \geq n$ et ainsi $n^2 - 2n - 1 \geq n - 1 \geq 2$. Ainsi, pour tout $n \geq 3$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc (u_n) est croissante à partir du rang 3.

Exercice 10. Étudier les variations de la suite (a_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $a_n = \frac{3n-1}{4n+5}$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $a_{n+1} = \frac{3(n+1)-1}{4(n+1)+5} = \frac{3n+2}{4n+9}$ donc

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{3n+2}{4n+9} - \frac{3n-1}{4n+5} = \frac{(3n+2)(4n+5) - (3n-1)(4n+9)}{(4n+9)(4n+5)} \\ &= \frac{12n^2 + 15n + 8n + 10 - (12n^2 + 27n - 4n - 9)}{(4n+9)(4n+5)} \\ &= \frac{12n^2 + 23n + 10 - (12n^2 + 23n - 9)}{(4n+9)(4n+5)} \\ &= \frac{12n^2 + 23n + 10 - 12n^2 - 23n + 9}{(4n+9)(4n+5)} \\ &= \frac{19}{(4n+9)(4n+5)} \geq 0 \end{aligned}$$

car $n \geq 0$. Ainsi, (a_n) est croissante.

Exercice 11. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (t_n) définie par $t_n = \frac{2^n}{n+2}$.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n > 0$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{t_{n+1}}{t_n} - 1 = \frac{n+1}{n+3}$.
3. En déduire le sens de variation de (t_n) .

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $2 > 0$ et $n \geq 0$, $2^n > 0$ et $n + 1 > 0$ donc $t_n > 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $t_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1+2} = \frac{2^n \times 2}{n+3}$ donc

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} - 1 = \frac{\frac{2^n \times 2}{n+3}}{\frac{2^n}{n+2}} - 1 = \frac{2^n \times 2}{n+3} \times \frac{n+2}{2^n} - 1 = \frac{2(n+2)}{n+3} - 1 = \frac{2n+4 - (n+3)}{n+3} = \frac{n+1}{n+3}.$$

3. Comme $n \geq 0$, $n + 1 \geq 0$ et $n + 3 > 0$ donc $\frac{t_{n+1}}{t_n} - 1 \geq 0$ et ainsi $\frac{t_{n+1}}{t_n} \geq 1$. On conclut donc que (t_n) est croissante.