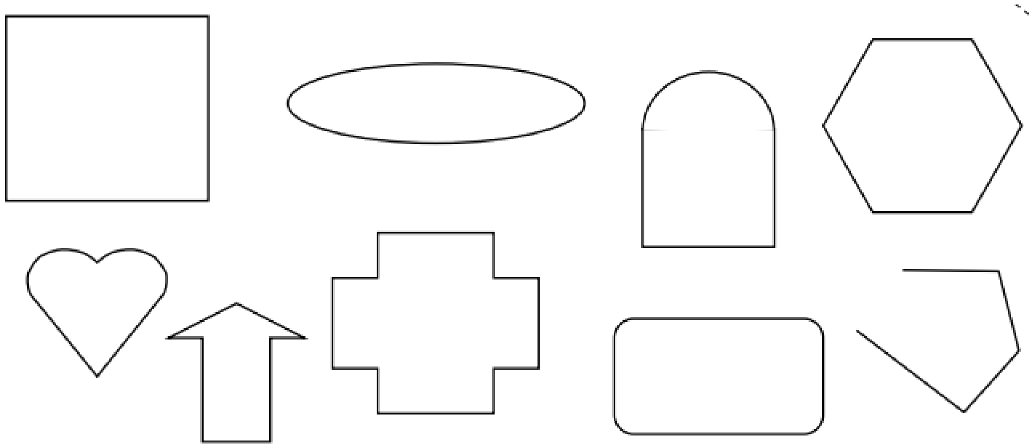
⧫ Corrigés des exercices du chapitre 7

1) Généralités sur les polygones

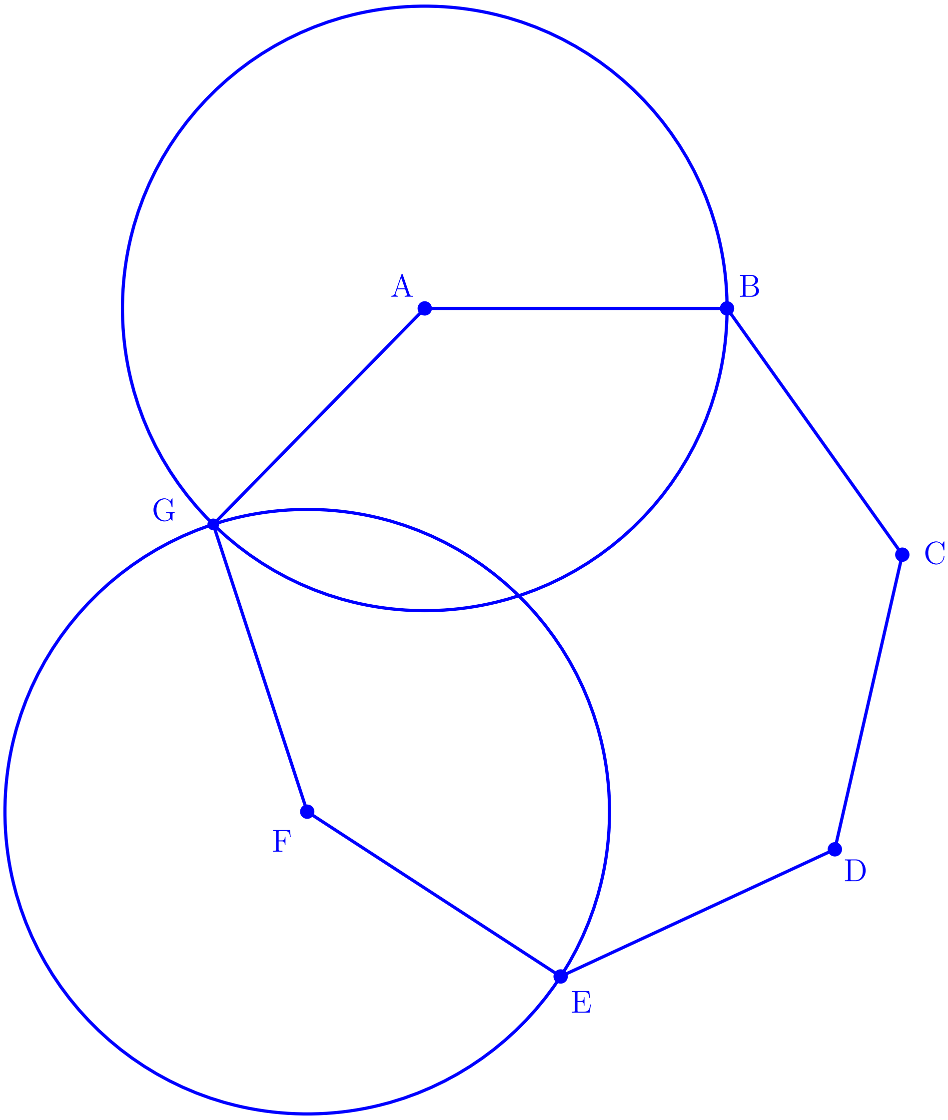
Exercice 1. Parmi les figures ci-dessous, déterminer celles qui sont des polygones et, pour celles-ci, donner leurs noms.



Solution. Sur la première ligne, la première figure est un quadrilatère et la quatrième est un hexagone et, sur la seconde ligne, la deuxième figure est un heptagone et la troisième un dodécagone. Les autres figures ne sont pas des polygones.

Exercice 2. Tracer une heptagone convexe dont les tous côtés mesurent 4 cm. On ne demande pas que ce heptagone soit régulier.

Solution. Pour tracer un heptagone dont tous les côtés mesure 4 cm, on peut tracer 5 premiers côtés de longueur 4 cm [AB], [BC], [CD], [DE], [EF] de telle sorte que la distance entre A et E soit strictement inférieure à 8 cm. On trace ensuite le cercle de centre A et de rayon 4 cm et le cercle de centre E et de rayon 4 cm. Ces deux cercles se coupent en deux points. L'un de ces deux points permet d'obtenir l'heptagone ABCDEFG cherché.



Exercice 3 (D'après CRPE – Reims – 1992)**.**

1. Construire, à la règle non graduée et au compas, un pentagone ABCDE satisfaisant les conditions suivantes :

a. tous les côtés du pentagone ont la même longueur ;

b. si on note I le milieu de [AB] alors les angles $\widehat{\text{AIE}}$ et $\widehat{\text{BIC}}$ mesurent 45° ;

c. les angles $\widehat{\text{AED}}$ et $\widehat{\text{BCD}}$ sont droits.

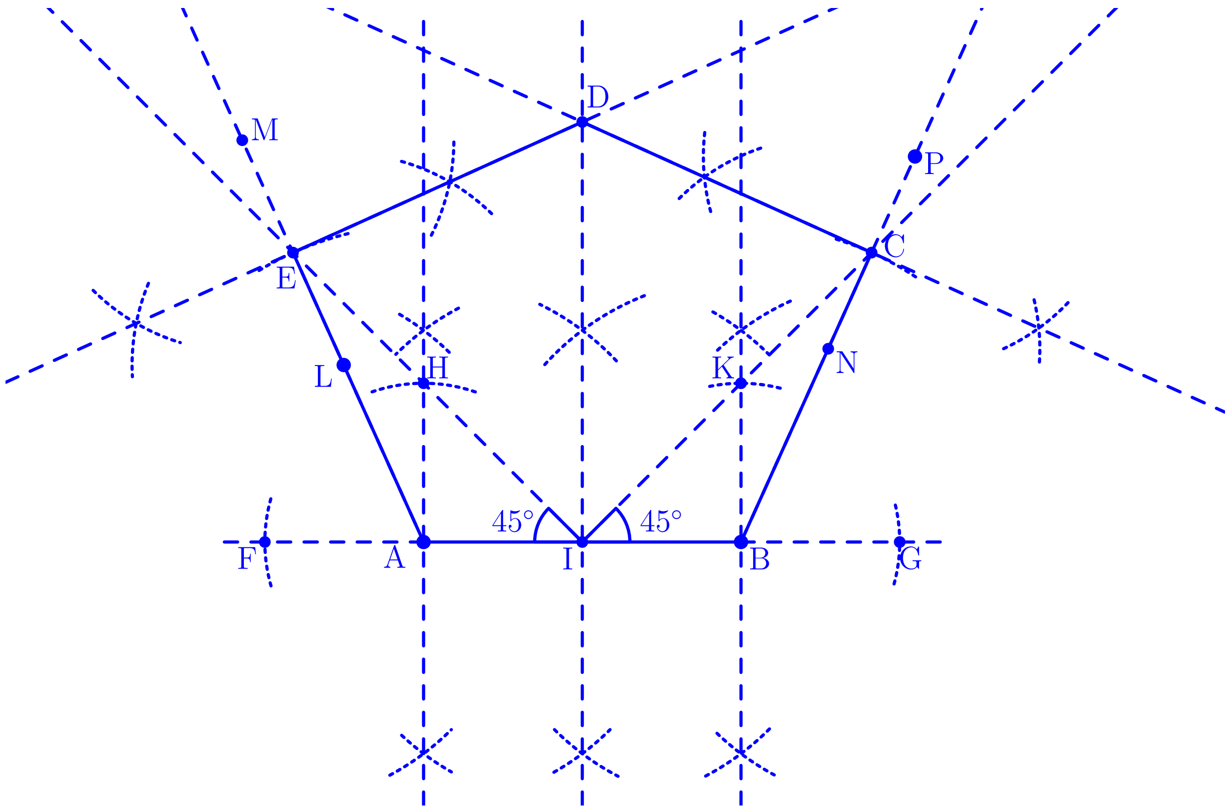
2. Ce pentagone est-il régulier ?

Solution.

1. Voici une méthode de construction :

- construire le segment [AB] d'une longueur quelconque ;
- construire la médiatrice de [AB], ce qui permet d'obtenir le point I ;
- construire le symétrique F de I par rapport à A et le symétrique G de I par rapport à B ;
- construire les médiatrice de [FI] et [IG] ;
- reporter sur ces médiatrices la longueurs AI, ce qui permet d'obtnir les points H et K ;

- les triangles AIH et BIK sont rectangles isocèles donc les demi-droites [Ih) et [Ik) forment un angle de 45° respectivement avec [IA) et [IB) ;
- reporter la longueur AB sur les demi-droites [IH) et [IK) afin d'obtenir les points E et C ;
- on choisit un point L quelconque sur [AE], on construit son symétrique M par rapport à E puis on construit la médiatrice de [LM] ;
- on fait de même avec un point N de [BC] ;
- Les deux médiatrices se coupent en D.



Remarque. Il n'est pas évident que le pentagone ainsi obtenu a ses 5 côtés de même longueur.

2. Dans un pentagone régulier, les angles aux sommets mesurent $\frac{5-2}{5} \times 180° = 108°$. Or, $\widehat{\text{AED}} = 90°$ donc ABCDE n'est pas régulier.

Exercice 4. Soit $\mathcal{P}$ un polygone à n côtés. Combien $\mathcal{P}$ possède-t-il de diagonales ?

Solution. Par définition, une diagonale est entièrement déterminer par 2 sommets non consécutifs du polygone. Or, dans une polygone, il y a $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ paires de sommets et, parmi celles-ci, n correspondent à des sommets consécutifs (c'est-à-dire a des côtés du polygones et non pas des diagonales). On conclut que $\mathcal{P}$ possède donc $\dfrac{n(n-1)}{2} - n = \dfrac{n(n-1)-2n}{2} = \dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

Exercice 5. Soit $\mathcal{P}$ une polygone régulier convexe à n côtés. On note O le centre de $\mathcal{P}$ et A et B deux points consécutifs de $\mathcal{P}$.

Déterminer la mesure en degrés de $\widehat{\text{AOB}}$.

Solution. Notons C le point consécutif à B dans le pentagone. Alors, par définition, OA = OC et BA = C donc (OB) est la médiatrice de [AC]. Or, le triangle ABC est isocèle en B donc (OB) est également la bissectrice de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$. On en déduit que $\widehat{\text{ABO}} = \frac{1}{2} \times \frac{180(n-2)}{n} = \frac{90(n-2)}{n}$ degrés et, comme OAB est isocèle en O, on a également $\widehat{\text{OAB}} = \frac{90(n-2)}{n}$ degrés. Dès lors, $\widehat{\text{AOB}} = 180° - 2 \times \frac{n-2}{n} \times 90° = \left(1 - \frac{n-2}{n}\right) \times 180° = \frac{2}{n} \times 180° = \frac{1}{n} \times 360°$.

Exercice 6 (D'après CRPE – Groupement 2 – 2011)**.** Soit ABCDEF un hexagone régulier convexe. On note O son centre et r la distance OA. Montrer que l'aire de ABCDEF est égale à $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.

Solution. Comme on l'a vu dans l'exercice précédent, l'angle $\widehat{\text{OAB}}$ mesure 60° donc, comme OAB est isocèle en O et possède un angle de 60°, OAB est équilatéral. Il va de même des triangles OBC, OCD, ODE, OEF et OFA qui sont tous isométriques avec OAB donc l'aire de l'héxagone ABCDEF est égal à 6 fois l'aire du triangle équilatéral OAB. Notons I le milieu de [AB]. Alors, comme OAB est équilatéral, la droite (OI) est la hauteur issue de O donc, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OIA rectangle en I, on obtient $\text{OA}^2 = \text{OI}^2 + \text{IA}^2$ c'est-à-dire $\text{OI}^2 = \text{OA}^2 - \text{IA}^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4}$. Ainsi, $\text{OI} = \sqrt{\frac{3r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ donc l'aire de OAB est $\frac{1}{2} \times r \times = \frac{r\sqrt{3}}{2} == \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$ et on conclut que l'aire de ABCDEF est $6 \times \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$.

2) Quadrilatères usuels

Exercice 7. Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.

1. Un carré est un losange.

2. Un rectangle est un trapèze.

3. Un parallélogramme est un rectangle.

4. Un losange est un rectangle.

5. Un carré est un quadrilatère.

6. Un carré est un trapèze.

Solution.

1. VRAI. Un carré a ses quatre côtés de même longueur donc c'est un losange.

2. VRAI. Un rectangle possède deux côtés opposés parallèles donc c'est une trapèze.

3. FAUX. Un parallélogramme qui ne possède pas d'angle droit n'est pas un rectangle.

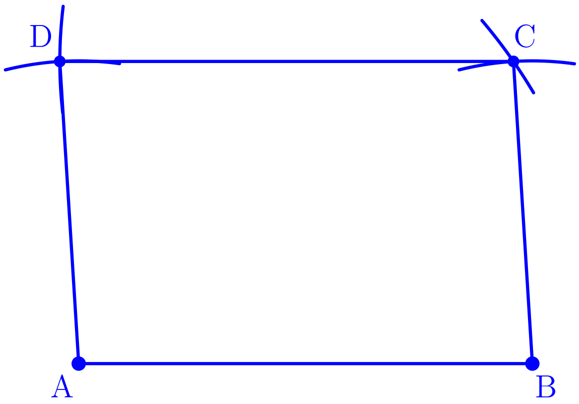
4. FAUX. Un losange qui ne possède pas d'angle droit n'est pas un rectangle.

5. VRAI par définition d'un carré.

6. VRAI. Un carré possède deux côté opposés parallèles donc c'est un trapèze.

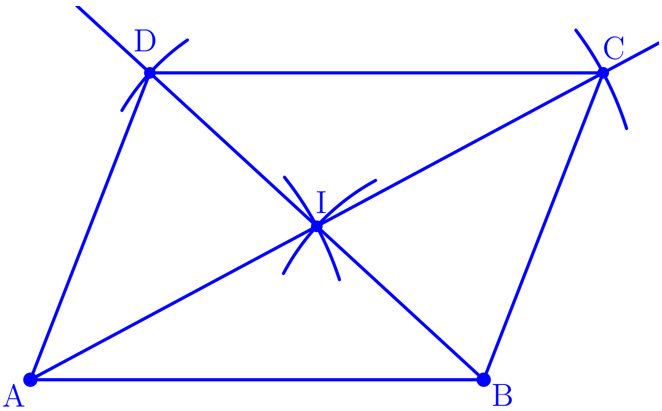
Exercice 8. Construire un parallélogramme ABCD tel que AB = 6 cm, BC = 4 cm et AC = 7 cm.

Solution. Construire d'abord le segment AB. Ensuite on trace un arc de centre B et de rayon 4 cm et un arc de centre A et de rayon 7 cm : ces deux arcs se coupent en C. On construit ensuite un arc de centre C et de rayon AB et un arc de centre A de rayon BC : ces deux arcs se coupent en D.



Exercice 9. Construire un parallélogramme ABCD tel que AB = 6 cm, AC = 8,6 cm et BD = 6 cm.

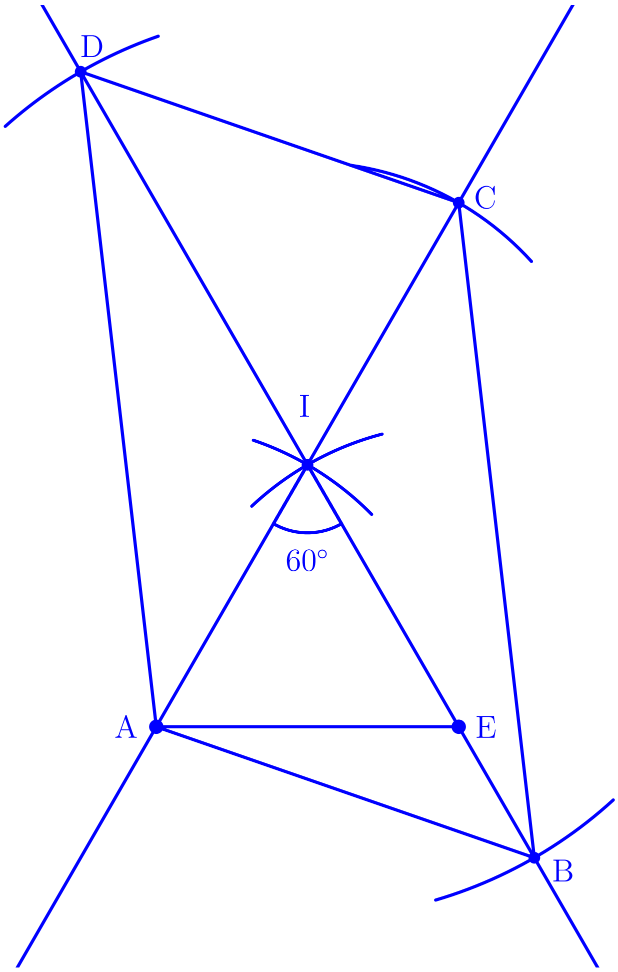
Solution. Comme ABCD est un parallélogramme, ses diagonales se coupent en leur milieu I. On a donc AI = 4,3 cm et BI = 3 cm. Ainsi, on construit d'abord le triangle ABI puis on obtient C et D comme symétriques respectifs de A et B par rapport à I.



Exercice 10 (D'après CRPE – Bordeaux – 1993)**.** Construire, en utilisant seulement la règle graduée et le compas, un parallélogramme dont les diagonales mesurent respectivement 8 cm et 12 cm et qui forment un angle de 60°.

Solution. On commence par construire un triangle équilatéral pour l'angle de 60°. On peut prendre n'import quelle longueur de côté. Afin de faciliter la suite de la construction, on construit un triangle équilatéral AIE de côté 4 cm. On construit ensuite le symétrique C de A par rapport à I. Enfin, avec le compas, on trace deux arcs de longueur 6 cm centré en I : ils coupent la droite (IE) en B et en D.

Le quadrilatère obtenu est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu et, par construction, [AC] mesure 8 cm et [BD] mesure 12 cm.



Exercice 11. On considère un parallélogramme ABCD tel que AB = 4 cm, AD = 2,5 cm et $\widehat{\text{BAC}} = 110°$.

1. Déterminer le périmètre de ABCD.
2. Déterminer les mesures des angles $\widehat{\text{ABC}}$ et $\widehat{\text{BCD}}$.

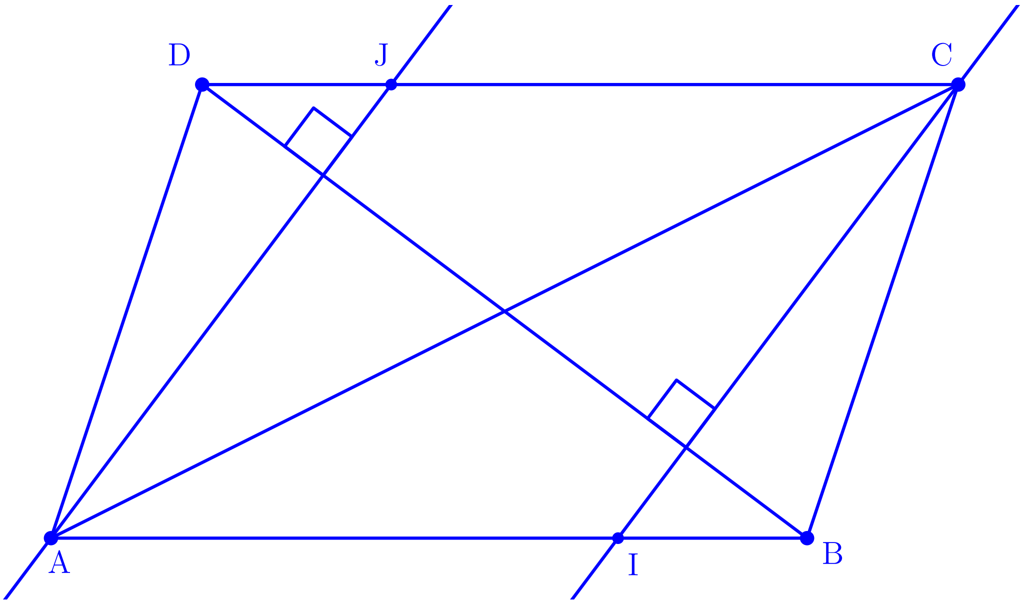
Solution.

1. Le périmètre de ABCD est $2(4 + 2{,}5)$ cm $= 13$ cm.
2. Comme ABCD est un parallélogramme, $\widehat{\text{ABC}} = 180° - \widehat{\text{BAC}} = 180° - 110° = 70°$ et $\widehat{\text{BCD}} = \widehat{\text{BAC}} = 110°$.

Exercice 12. Soit ABCD un parallélogramme. La perpendiculaire à (BD) passant par A coupe [CD] en J et la perpendiculaire à (BD) passant par C coupe [AB] en I.

Montrer que AICJ est un parallélogramme.

Solution. Faisons une figure :



D'une part, comme ABCD est un parallélogramme, (AI) et (CJ) sont parallèles. D'autre part, par définition, (AJ) et (CI) sont perpendiculaires à (BD) donc elles sont parallèles entre elles. Ainsi, les côtés opposés de AICJ sont deux à deux parallèles donc AICJ est un parallélogramme.

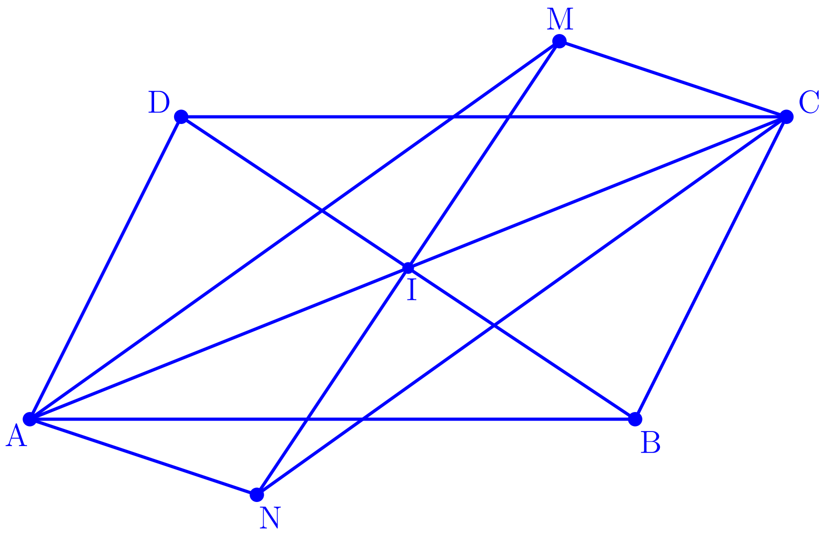
Exercice 13. Soit ABCD un parallélogramme de centre I. Soit M un point du plan différent de I et N le symétrique de M par rapport à I.

1. Faire une figure.

2. Montrer que AMCN est un parallélogramme.

Solution.

1.



2. D'un part, comme ABCD est un parallélogramme, I est le milieu de [AC]. D'autre part, comme N est le symétrique de M par rapport à I, I est également le milieu de [MN]. Ainsi, les diagonales de AMCN se coupent en leur milieu I donc AMCN est un parallélogramme.

Exercice 14 (D'après CRPE – Groupement 2 – 2008)**.** Pour l'ensemble des questions de cet exercice, les traits de construction doivent rester apparents.

1. Placer deux points A et C non situés sur les lignes de la copie. Ces deux points sont les sommets opposés d'un carré ABCD. Construire ce carré à la règle et au compas et justifier la construction en citant la ou les propriétés géométriques utilisées.

2. a. Construire un rectangle EFGH tel que la longueur du côté EF soit 7 cm et celle de la diagonale EG soit 9 cm. Justifier la construction en citant la ou les propriétés géométriques utilisées.

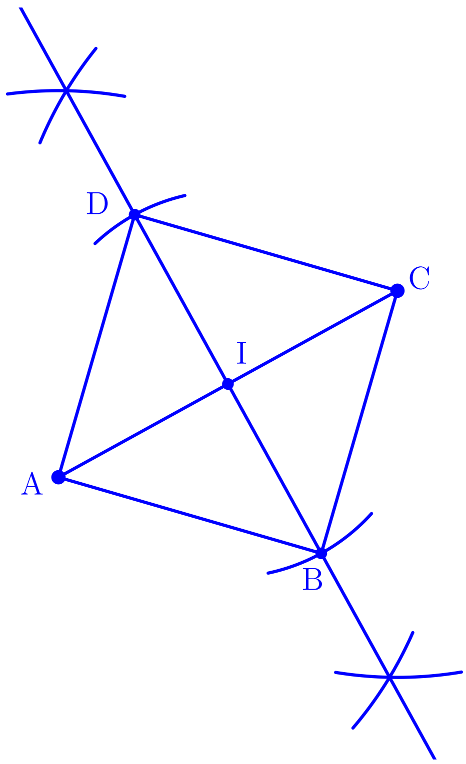
b. La construction d'un rectangle dont on impose la longueur d'un côté et celle de la diagonale est-elle toujours réalisable ? Justifier.

3. Construire deux rectangles IJKL et IMKN. Quelle est la nature du quadrilatère MJNL ? Justifier la réponse.

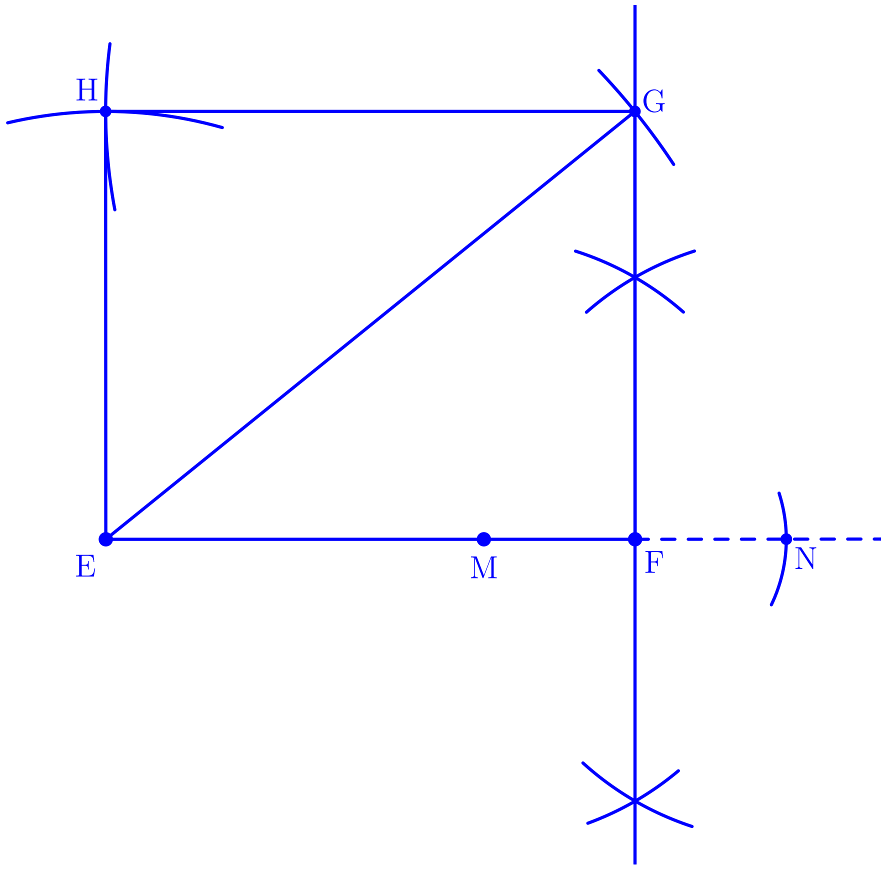
Solution.

1. On utilise qu'un carré est caractérisé par le fait que ses diagonales sont perpendiculaires, de même longueur et se coupent en leur milieu.

On commence par tracer la médiatrice de [AC]. Elle coupe [AC] en son milieu I. On trace ensuite des arcs de centre I et de rayon IA qui coupent la médiatrice en C et D.

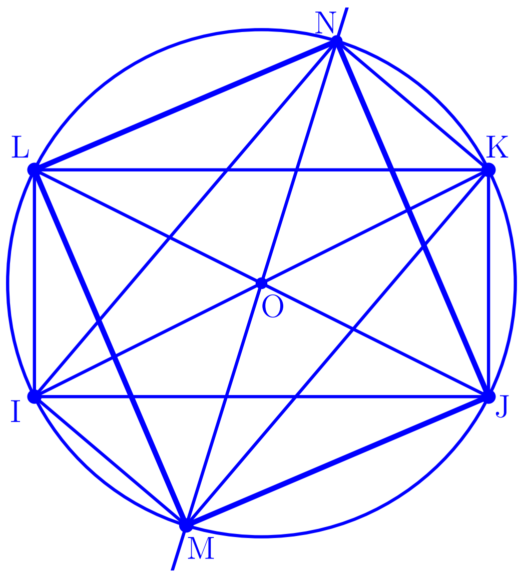


2. a. On utilise le fait que le triangle EFG est rectangle en F : on construit donc le segment [EF] puis on prend un point sur M sur [EF], on construit son symétrique N par rapport à F puis la médiatrice du segment [MN]. On construit un arc de centre E et de rayon 9 cm qui coupe la médiatrice en G. On termine la construction en traçant un arc de centre E et de rayon FG et un arc de centre G et de rayon EF qui se coupent en H.



b. La construction est possible si et seulement si la construction du triangle EFG est possible et on sait que ceci est possible si et seulement si la longueur EG est strictement supérieure à la longueur EF. Ainsi, la construction d'un rectangle connaissant la longueur L d'un côté et la longueur d d'une diagonale est possible si et seulement si $d > L$.

3.



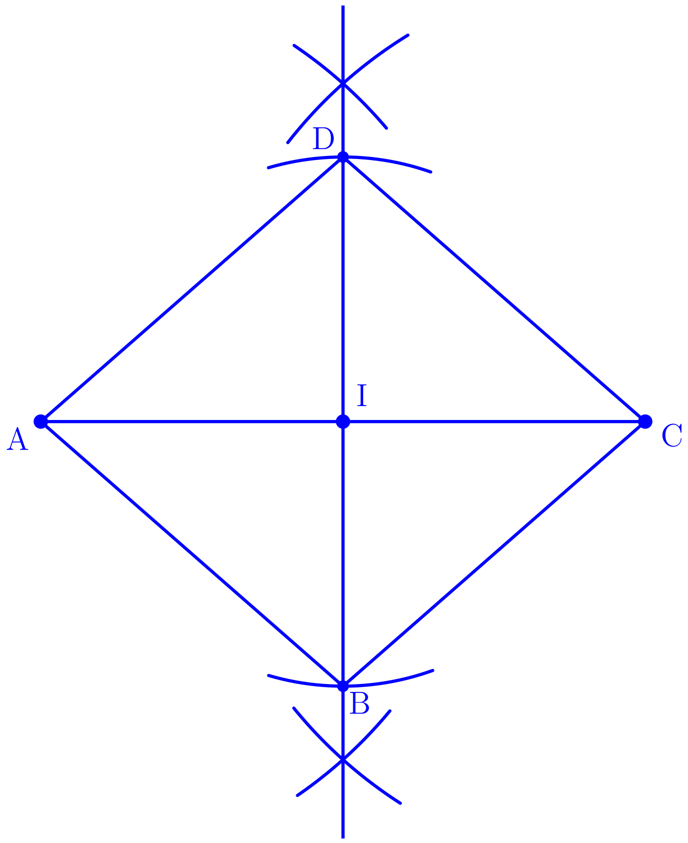
Pour la construction, on a utilisé le fait qu'un rectangle est inscrit dans le cercle dont le centre est le point d'intersection O de ces diagonales et le rayon est la moitié de la longueur d'une des diagonales.

Comme IJKL est un rectangle, [IK] et [LJ] se coupent en O et OI = OJ = OK = OL. De même, comme IMNL est un rectangle, [IK] et [MN] se coupent en O et OI = OM = OK = ON.

On en déduit que [JL] et [MN] se coupent en O et OM = OJ = ON = OL donc MJNL est un rectangle.

Exercice 15. Construire un losange dont les diagonales mesurent 7 cm et 8 cm puis déterminer le périmètre et l'aire de celui-ci.

Solution. Pour la construction, on utilise le fait que les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu. On construit un segment [AC] de longueur 8 cm. Ensuite, on trace la médiatrice de [AC] qui coupe ce segment en son milieu I. On trace enfin deux arcs centrés en I et de longueur 3,5 cm qui coupe la médiatrice en B et D.

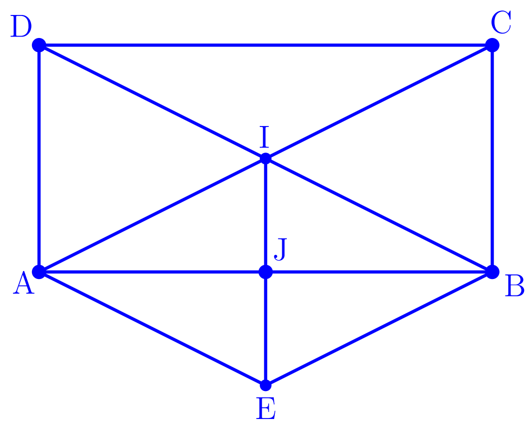


L'aire de ABCD est $\dfrac{8 \times 7}{2} = 28$ cm^2. Le périmètre de ABCD est égal au quadruple du côté AB puisque tous les côtés ont la même longueur. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AIB rectangle en I, il vient $AB^2 = AI^2 + IB^2 = (4 \text{ cm})^2 + (3{,}5 \text{ cm})^2 = 28{,}25 \text{ cm}^2$. On en déduit que $AB = \sqrt{28{,}25}$ cm donc le périmètre de ABCD est $4\sqrt{28{,}25}$ cm.

Exercice 16. Soit ABCD un rectangle de centre I. On note J le milieu de [AB] et E le symétrique de I par rapport à J.

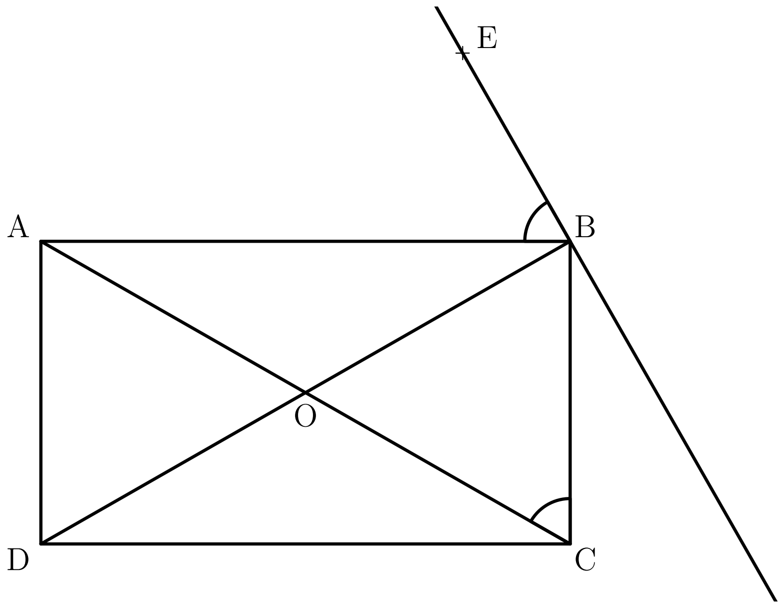
Déterminer la nature précise du quadrilatère AEBI.

Solution. Commençons par faire une figure.



Par définition, J est le milieu de [AB] et de [IE] donc AEBI est un parallélogramme. De plus, comme ABCD est un rectangle, ses diagonales se coupent en leur milieu et ont même longueur donc AI = IB. Ainsi, le parallélogramme AEBI possède deux côtés consécutifs de même longueur donc AEBI est un losange.

Exercice 17. Sur la figure ci-dessous, ABCD est un rectangle de centre O et (EB) est perpendiculaire à (BD).



Montrer que $\widehat{\mathrm{ABE}} = \widehat{\mathrm{ACB}}$.

Solution. Comme ABCD est un rectangle, ses diagonales ont même longueur et se coupent en leur milieu O donc OB = OC. Ainsi, OBC est isocèle en O donc $\widehat{\mathrm{OCB}} = \widehat{\mathrm{OBC}}$ c'est-à-dire $\widehat{\mathrm{ACB}} = \widehat{\mathrm{DBC}}$. Or, comme (EB) est perpendiculaire à (DB), on en déduit que

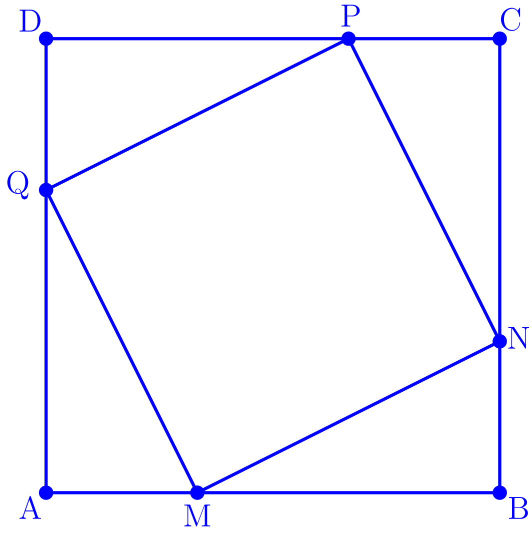
$$\widehat{\mathrm{ABE}} = 90° - \widehat{\mathrm{ABD}} = \widehat{\mathrm{ABC}} - \widehat{\mathrm{ABD}} = \widehat{\mathrm{DBC}}$$

donc $\widehat{\mathrm{ABE}} = \widehat{\mathrm{ACB}}$.

Exercice 18. Soit un carré ABCD. On considère les points M, N, P et Q tels que M ∈ [AB], N ∈ [BC], P ∈ [CD], Q ∈ [DA] et AM = BN = CP = DQ.

Déterminer la nature précise du quadrilatère MNPQ.

Solution. Commençons par faire une figure.



Notons a le côté du carré et b la longueur AM. Alors, par le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle AMQ rectangle en A, $\mathrm{QM}^2 = \mathrm{AQ}^2 + \mathrm{AM}^2 = (a-b)^2 + b^2$. De la même façon, on a $\mathrm{MN}^2 = \mathrm{MB}^2 + \mathrm{BN}^2 = (a-b)^2 + b^2$, $\mathrm{NP}^2 = \mathrm{NC}^2 + \mathrm{CP}^2 = (a-b)^2 + b^2$ et $\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{PD}^2 + \mathrm{DQ}^2 = (a-b)^2 + b^2$. On en déduit que $\mathrm{QM} = \mathrm{MN} = \mathrm{NP} = \mathrm{PQ}$ donc MNPQ est un losange.

De plus, les triangles AMQ et MBN sont superposables donc leurs angles sont respectivement égaux. Dès lors, $\widehat{\mathrm{BMN}} = \widehat{\mathrm{MQA}}$ donc

$$\widehat{\mathrm{QMN}} = 180° - \widehat{\mathrm{AMQ}} - \widehat{\mathrm{BMN}} = 180° - \widehat{\mathrm{AMQ}} - \widehat{\mathrm{MQA}} = \widehat{\mathrm{QAM}} = 90°.$$

Ainsi, le losange MNPQ possède un angle droit donc c'est un carré.

Exercice 19. Dans cet exercice, on s'intéresse à un quadrilatère, le « cerf-volant ». Un cerf-volant est un quadrilatère non croisé dont une des diagonales est la médiatrice de l'autre. Dans tout l'exercice, on appelle ABCD un tel cerf-volant et on suppose que (AC) est la médiatrice de [BD].

1. Démontrer que $\mathrm{AB} = \mathrm{AD}$ et que $\mathrm{CB} = \mathrm{CD}$.

2. Tout losange est-il un cerf-volant ?

3. Que peut-on dire d'un cerf-volant qui est un parallélogramme ?

4. Si un cerf-volant a deux angles droits, est-ce nécessairement un carré ?

5. Représenter un cerf-volant concave (c'est-à-dire non convexe).

6. Dans cette question, on suppose que ABCD est convexe, que $\mathrm{AB} = \mathrm{AD} = 4$ et que $\mathrm{BC} = \mathrm{CD} = 7$.

   a. Démontrer que $\mathrm{BD} < 8$.

   b. Construire ABCD en supposant de plus que $\mathrm{BD} = 6$.

   c. Déterminer AC.

Solution.

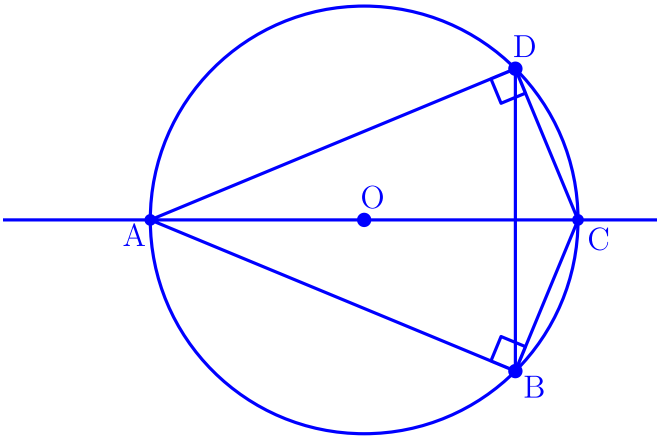
1. Comme (AC) est la médiatrice de [BC], les points A et C sont équidistants de B et C donc $\mathrm{AB} = \mathrm{AD}$ et que $\mathrm{CB} = \mathrm{CD}$.

2. Si ABCD est un losange alors ses diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires donc (AC) est perpendiculaire à [BD] et le coupe en son milieu et, ainsi, (AC) est la médiatrice de [BD].

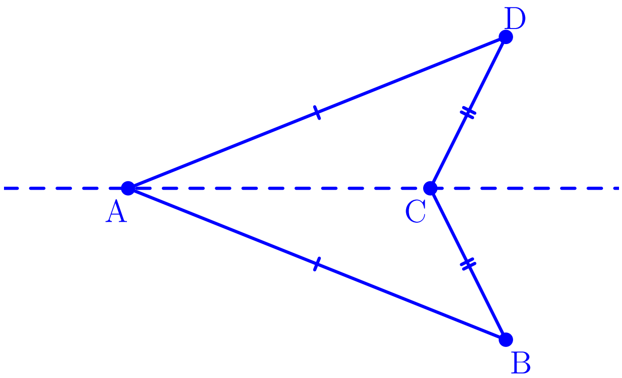
   On conclut donc que tout losange est un cerf-volant.

3. Si un cerf-volant est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires donc c'est une losange.

4. Si un cerf-volant possède deux angles droits, ce n'est pas nécessairement un losange. En effet, on peu considérer un segment [BD], tracer sa médiatrice, prendre sur celle-ci un point O différent du milieu de [BC] et tracer le cercle de centre O passant par B. Alors, ce cercle coupent la médiatrice en deux points A et C tels que ABCD est un cerf-volant et possède deux angles droits (en B et en D) mais n'est pas un carré.

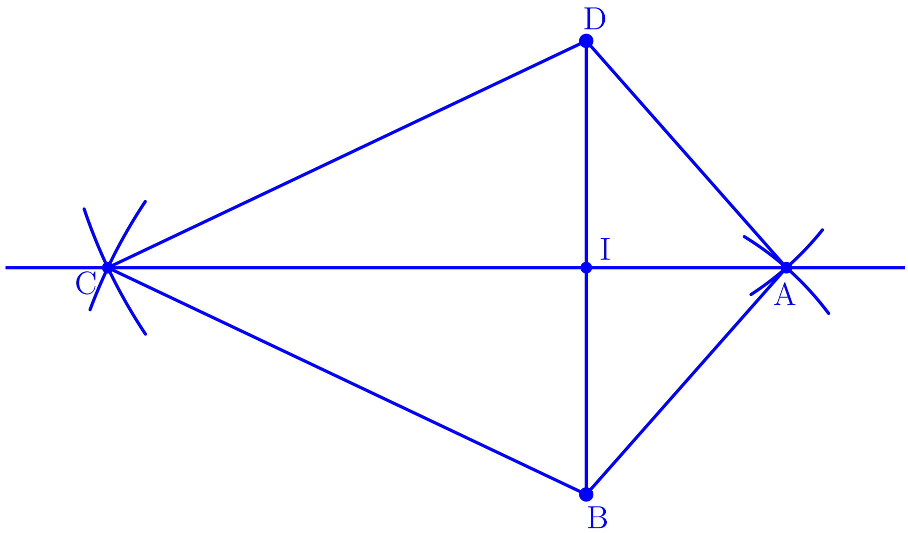


5. Un exemple de cerf-volent concave :



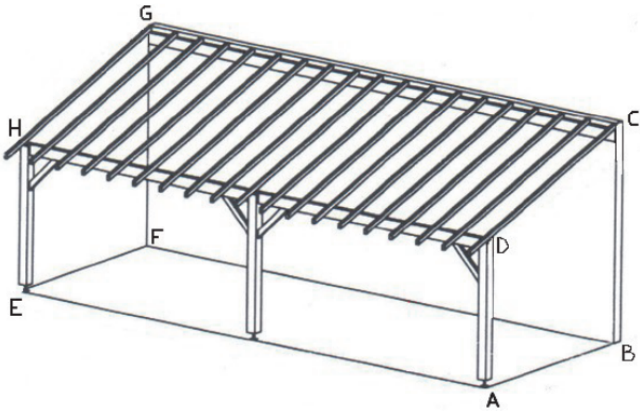
6. **a.** Dans le triangle ABD, AB < AB + AD donc AB < 8.

b. Pour construire ABCD, on commence par tracer le segment [BD] d'une longueur de 6 cm. Ensuite, on trace deux arcs de rayon 4 cm centrés respectivement en B et en D : on obtient le point A. On réitère avec des arcs de longueurs 7 cm : on obtient le point C.



c. Notons I le point d'intersection de [BC] et (AC). Alors, I est le milieu de [BC] donc BI = DI = 3. De plus, les triangles AID et CID sont rectangles en I donc, par le théorème de Pythagore, $AD^2 = AI^2 + DI^2$ et $CD^2 = CI^2 + DI^2$. On en déduit que $AI^2 = 4^2 - 3^2 = 7$ et $CI^2 = 7^2 - 3^2 = 40$ donc $AI = \sqrt{7}$ et $CI = \sqrt{40}$. On conclut alors que $AC = AI + IC = \sqrt{7} + \sqrt{40}$.

Exercice 20 (d'après CRPE – Groupement 2 – 2019)**.** Le propriétaire d'une maison décide de créer un appentis pour stocker du bois de chauffage. Un schéma de ce qu'il souhaite réaliser est donné ci-dessous :



Le rectangle ABFE représente une dalle de béton. Le quadrilatère ABCD est un trapèze rectangle.

Les contraintes de sa maison et de son terrain lui imposent les dimensions suivantes : AE = 4,8 m, AB = 1,5 m, AD = 2,4 m et BC = 3,2 m.

Le volume utile de cet appentis est la partie dans laquelle il pourra stocker son bois sachant que, pour rester au sec, il devra se trouver sur la dalle de béton et sous le toit. Le volume utile représente donc un prisme droit dont la base est le trapèze rectangle ABCD.

1. Dans le cadre de sa déclaration préalable de travaux le propriétaire doit déterminer la surface au sol de l'appentis. Calculer l'aire du rectangle ABFE.
2. **a.** On appelle I le point du segment [BC] tel que ABID est un rectangle. Calculer la longueur CD.

   b. En déduire la surface du toit CDHG.
3. **a.** Construire $A'B'C'D'$ une représentation du quadrilatère ABCD à l'échelle 1/50 en précisant les calculs qui ont permis cette construction.

b. Calculer l'aire du trapèze ABCD.

c. Pour être sûr de passer l'hiver au chaud, le propriétaire doit disposer de 15 stères de bois. Le stère est une unité de mesure, utilisée pour le bois de chauffage, valant 1 m^3. Aura-t-il assez de place pour stocker ces 15 stères de bois ?

Solution.

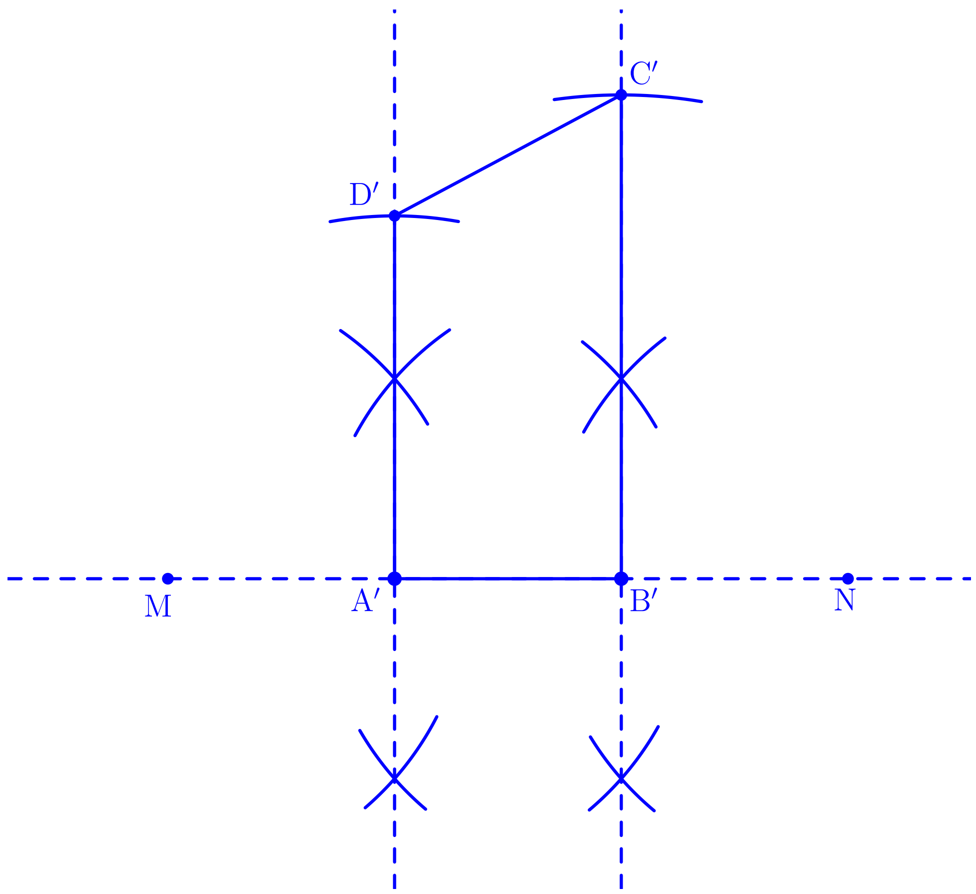
1. L'aire de ABFE est $\text{AB} \times \text{AE} = (1{,}5 \text{ m})(4{,}8 \text{ m}) = 7{,}2\text{m}^2$.

2. **a.** Comme ABID est un rectangle, $\text{BI} = \text{AD}$ donc $\text{CI} = \text{CB} - \text{BI} = 3{,}2 \text{ m} - 2{,}4 \text{ m} = 0{,}8 \text{ m}$. Ensuite, comme DIC est rectangle en I, d'après le théorème de Pythagore, $\text{DC}^2 = \text{DI}^2 + \text{IC}^2 = (1{,}5 \text{ m}^2 + (0{,}8 \text{ m})^2 = 2{,}89 \text{ m}^2$ donc $\text{CD} = 1{,}7 \text{ m}$.

b. La surface CDHG est donc $\text{CD} \times \text{CH} = (1{,}7 \text{ m})(4{,}8 \text{ m}) = 8{,}16 \text{ m}^2$.

3. **a.** À l'échelle 1/50, on aura $\text{A}'\text{B}' = \dfrac{\text{AB}}{50} = \dfrac{1{,}5}{50} \text{ m} = 3 \text{ cm}$, $\text{A}'\text{D}' = \dfrac{\text{AD}}{50} = \dfrac{2{,}4}{50} \text{ m} = 4{,}8 \text{ cm}$ et $\text{B}'\text{C}' = \dfrac{\text{BC}}{50} = \dfrac{3{,}2}{50} \text{ m} = 6{,}4 \text{ cm}$.

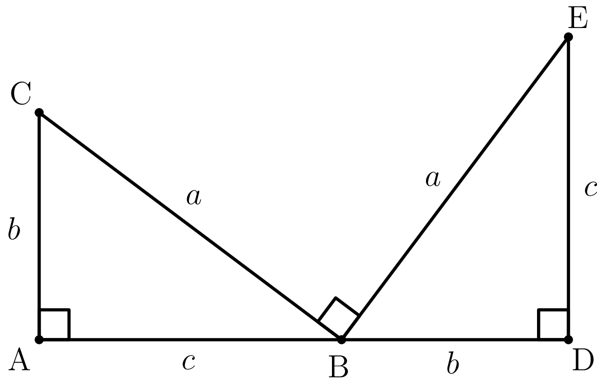
Pour la construction, on trace [A′B′] puis on prend deux points M et N sur (A′B′) tels que $\text{MA}' = \text{A}'\text{B}' = \text{NB}'$. On trace les médiatrices de [MA′] et [NB′] puis on reporte au compas les longueurs 4,8 cm et 6,4 cm.



b. L'aire de ABCD est $\dfrac{(\text{AD} + \text{BC}) \times \text{AB}}{2} = \dfrac{(2{,}4 + 3{,}2) \times 1{,}5}{2} \text{ m}^2 = 4{,}2 \text{ m}^2$.

c. Le volume utile est donc $4{,}2 \times 4{,}8 \text{ m}^3 = 20{,}16 \text{ m}^3 > 15 \text{ m}^3$ donc le propriétaire de la maison aura suffisamment de place pour stocker son bois pour l'hiver.

Exercice 21 (D'après CRPE – Sujet 0 – 2015)**.** Sur la figure ci-dessous, les triangles ABC, BDE et CBE sont rectangles respectivement en A, D et B. De plus, $\text{AB} = \text{DE} = c$, $\text{AC} = \text{BD} = b$ et $\text{BC} = \text{BE} = a$.



1. Démontrer que les points A, B et D sont alignés.

2. Démontrer que ADEC est un trapèze.

3. Calculer de deux façons différentes l'aire de ADEC.

4. En déduire que $a^2 = b^2 + c^2$.
Quel théorème a-t-on ainsi démontré ?

Solution.

1. Comme les triangles ABC et BDE sont superposables, leurs angles ont respectivement mêmes mesures. Ainsi, $\widehat{\mathrm{ABC}} = \widehat{\mathrm{DEB}}$. Dès lors,

$$\widehat{\mathrm{ABD}} = \widehat{\mathrm{ABC}} + 90° + \widehat{\mathrm{EBD}} = \widehat{\mathrm{DEB}} + \widehat{\mathrm{BDE}} + \widehat{\mathrm{EBD}} = 180°$$

donc les points A, B et D sont alignés.

2. Comme (AC) et (DE) sont perpendiculaires à (AD), elles sont parallèles entre elles donc ADEC est un trapèze.

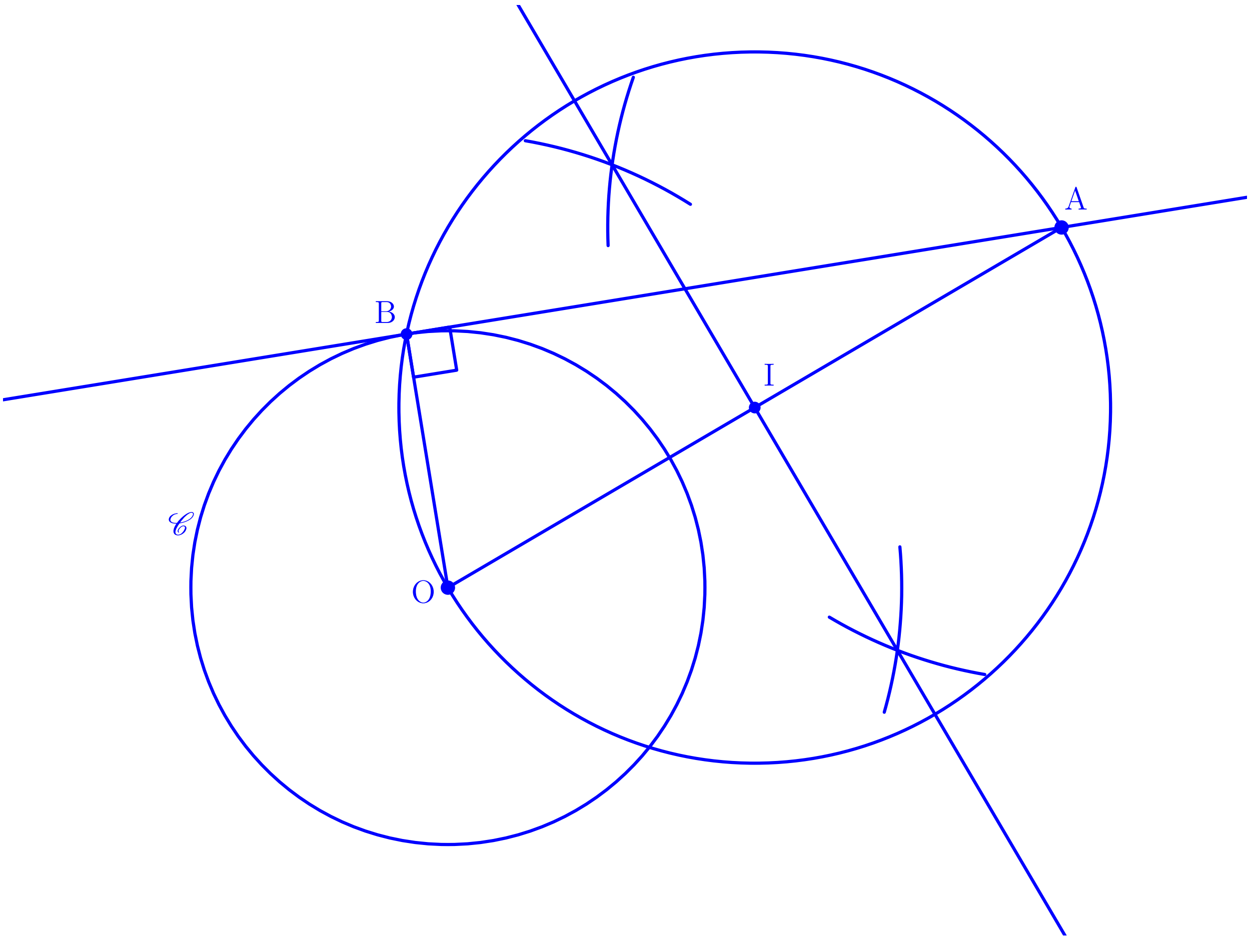
3. D'une part, l'aire de ADEC est $\dfrac{(\mathrm{AC}+\mathrm{DE})\times \mathrm{AD}}{2} = \dfrac{(b+c)\times(c+b)}{2} = \dfrac{(b+c)^2}{2}$. D'autre part, l'aire de ADEC est égale à la somme des aires des trois triangles rectangles BAC, CBE et BDE donc l'aire de ADEC est $\dfrac{bc}{2} + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{bc}{2} = \dfrac{a^2+2bc}{2}$.

4. On en déduit que $\dfrac{(b+c)^2}{2} = \dfrac{a^2+2bc}{2}$ donc $(b+c)^2 = a^2+2bc$ donc $a^2 = (b+c)^2 - 2bc = b^2+2bc+c^2-2bc = b^2+c^2$.
On a ainsi démontré le théorème de Pythagore.

3) Cercles et Disques

Exercice 22. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et A un point extérieur au cercle. Construire, en utilisant seulement la règle non graduée et le compas, une droite tangente à $\mathscr{C}$ et passant par A.

Solution. Par définition, une tangente à $\mathscr{C}$ et passant par A coupe le cercle en un point B de telle façon que ABO soit rectangle en B. Pour construire un tel point, on construire la médiatrice du segment [OA] : elle coupe [OA] en son milieu I. Ensuite, on trace le cercle de diamètre [OA] : il coupe $\mathscr{C}$ en deux points. On considère l'un de ces points B et alors ABO est rectangle en B et, par suite, (AB) est tangente à $\mathscr{C}$.



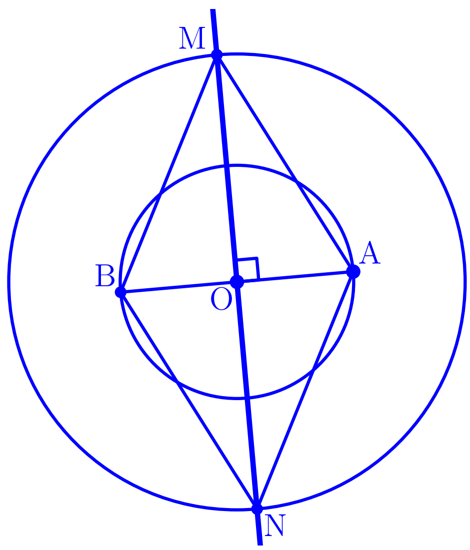
Exercice 23. On considère deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de même centre O. Soit A un point de $\mathscr{C}_1$ et B le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}_1$. La perpendiculaire à (AB) en O coupe $\mathcal{C}_2$ en deux points M et N.

1. Faire une figure.

2. Montrer que AMBN est un losange.

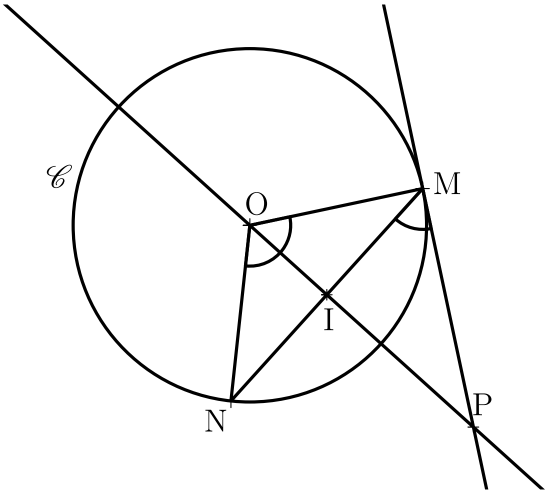
Solution.

1.



2. Comme A et B sont diamétralement opposés, O est le milieu de [AB]. De même, M et N sont diamétralement opposés donc O est aussi le milieu de [MN]. On en déduit que AMBN est un parallélogramme. De plus, ses diagonales sont perpendiculaires donc AMBN est un losange.

Exercice 24. Sur la figure ci-dessous, $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et M et N sont deux points de $\mathscr{C}$. On note I le milieu de [MN] et P le point d'intersection de (OI) et de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}$ en M.



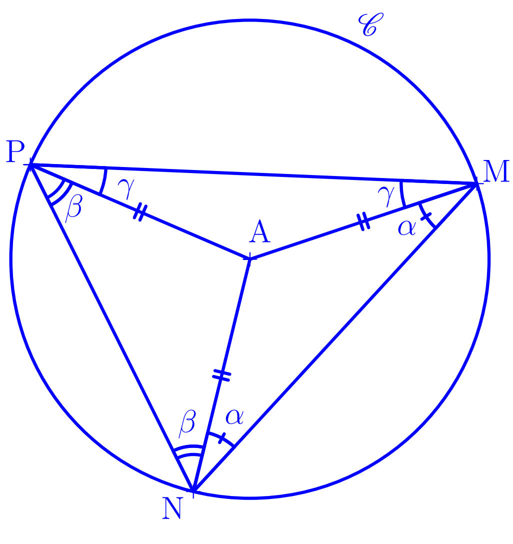
Montrer que $\widehat{\mathrm{NOM}} = 2\widehat{\mathrm{NMP}}$.

Solution. Comme (MP) est tangente à $\mathscr{C}$, $\widehat{\mathrm{OMP}} = 90°$. Ainsi, $\widehat{\mathrm{NMP}} = 90° - \widehat{\mathrm{OMN}}$. Ensuite, comme M et N appartiennent au cercle, OM = ON donc le triangle OMN est isocèle en O et ainsi $\widehat{\mathrm{OMN}} = \widehat{\mathrm{ONM}}$. Comme $\widehat{\mathrm{NOM}} + \widehat{\mathrm{OMN}} + \widehat{\mathrm{ONM}} = 180°$, on en déduit que $\widehat{\mathrm{NOM}} + 2\widehat{\mathrm{OMN}} = 180°$ donc $\widehat{\mathrm{NOM}} = 180° - 2\widehat{\mathrm{OMN}} = 2(90° - \widehat{\mathrm{OMN}})$ et ainsi $\widehat{\mathrm{NOM}} = 2\widehat{\mathrm{NMP}}$

Remarque. En fait, le point I n'a pas d'intérêt et P pourrait être n'importe quel point de $\mathcal{T}$ autre que B.

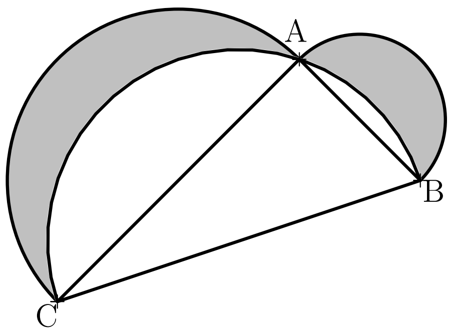
Exercice 25. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre A. On considère trois distincts M, N et P de $\mathscr{C}$ tels que A soit à l'intérieur du triangle MNP. Montrer que $\widehat{\mathrm{MAN}} = 2\widehat{\mathrm{MPN}}$.

Solution. Commençons par faire une figure :



Comme M, N et P sont sur le cercle, AM = AN = AP donc les triangles AMN, ANP et AMP sont isocèles en A. Ainsi, les angles à la base sont égaux dans chacun de ces triangles. Avec les notation de la figure, on a donc $\widehat{\mathrm{MAN}} = 180° - 2\alpha$. De plus, comme la somme des angles d'un triangle vaut 180°, $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$ donc $180° - 2\alpha = 2(\beta + \gamma) = 2\widehat{\mathrm{MPN}}$. On conclut donc que $\widehat{\mathrm{MAN}} = 2\widehat{\mathrm{MPN}}$.

Exercice 26. Sur la figure ci-dessous, tous les arcs sont des demi-cercles et A appartient au demi-cercle de diamètre [BC]. Montrer que l'aire de la surface grisée est égale à l'aire du triangle ABC.

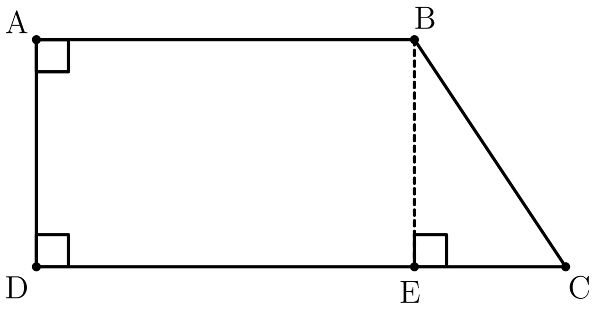


Solution. Posons $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{AC}$ et $c = \mathrm{AB}$. D'une part, comme A appartient au demi-cercle de diamètre [BC], le triangle ABC est rectangle en A donc l'aire de ABC est $\dfrac{bc}{2}$. D'autre part, si on ajoute à l'aire grisée l'aire du demi-disque de diamètre [BC], on trouve la même aire que si on ajoute l'aire du triangle ABC, l'aire du demi-disque de diamètre [AB] et l'aire du demi-disque de diamètre [AC]. Ainsi, l'aire grisée est

$$\frac{bc}{2} + \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{bc}{2} + \pi\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}\right).$$

Or, ABC est rectangle en A donc, par le théorème de Pythagore, $a^2 = b^2 + c^2$ et ainsi $b^2 + c^2 - a^2 = 0$. On en déduit que l'aire grisée vaut $\dfrac{bc}{2}$ et donc est égale à l'aire de ABC.

Exercice 27 (d'après CRPE – Groupement 2 – 2017)**.** Les figures données ne sont pas à l'échelle. La figure ci-dessous modélise un jardin dont l'aménagement doit être repensé.

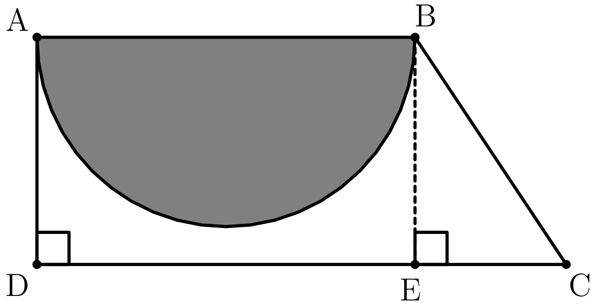


Le trapèze ABCD est tel que : les droites (AB) et (DC) sont parallèles ; les droites (AD) et (DC) sont perpendiculaires ; AB = 50 m, AD = 30 m et DC = 70 m.

E est le point du segment [DC] tel que ABED est un rectangle.

1. Dans un premier temps, le propriétaire désire clôturer le jardin. Calculer la longueur de clôture nécessaire sachant qu'il prévoit l'installation d'un portail de 3,10 m de large. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au mètre.
2. Dans un deuxième temps, il partage son jardin en trois parties :

- un espace réservé au potager représenté par le triangle rectangle BCE ;
- un espace de plantations florales représenté par le demi-disque grisé de diamètre [AB] ;
- un espace engazonné sur le reste du jardin.

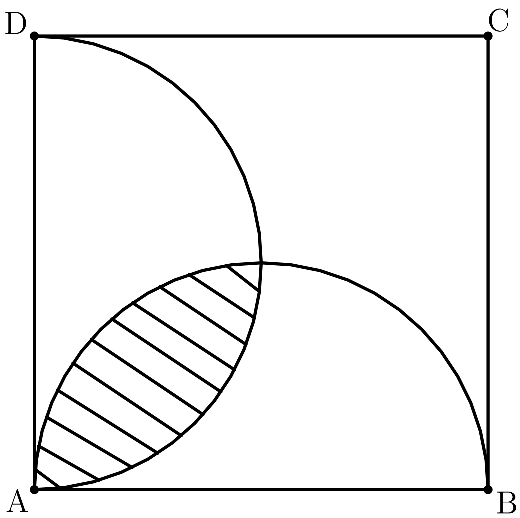


Calculer l'aire arrondie au mètre carré de chacune des trois parties du jardin

Solution.

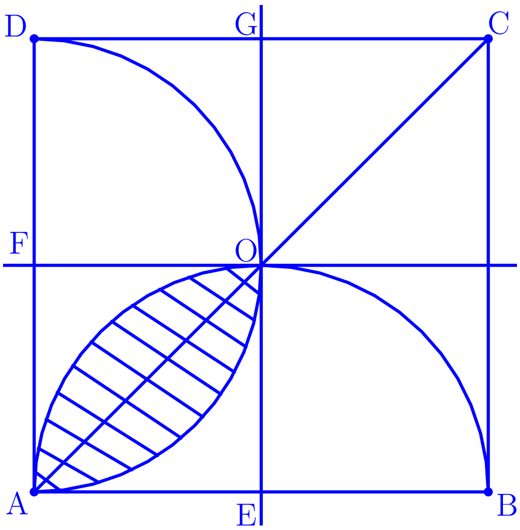
1. Pour déterminer le périmètre du trapèze ABCD, on a besoin de déterminer la longueur BC. Pour cela, on remarque que $\mathrm{EC} = \mathrm{CD} - \mathrm{DE} = 20$ m et on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle BEC rectangle en E : $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{BE}^2 + \mathrm{EC}^2 = 30^2 + 20^2 \text{ m}^2 = 1\,300 \text{ m}^2$. Ainsi, $\mathrm{BC} = \sqrt{1\,300} \text{ m} = 10\sqrt{13}$ m donc le périmètre de ABCD est $(50 + 10\sqrt{13} + 70 + 30)$ m $= 150 + 10\sqrt{13}$ m. Comme le propriétaire installe un portail de 3,1 m, la longueur de la clôture est $(150 + 10\sqrt{13} - 3{,}1)m = 146{,}9 + 10\sqrt{13}$ m soit environ 183 m.
2. L'aire du potager est $\dfrac{20 \times 30}{2}$ $\text{m}^3 = 300 \text{ m}^2$, l'aire de l'espace de plantation florales est $\dfrac{1}{2} \times \pi \times 25^2 \text{ m}^2 \approx 982 \text{ m}^2$ et l'aire de l'espace engazonné est $(30 \times 50 - \dfrac{1}{2} \times \pi \times 25^2) \text{ m}^2 \approx 518 \text{ m}^2$.

Exercice 28. Sur la figure ci-dessous, on a tracé un carré ABCD de côté a ainsi que des demi-cercles de diamètres respectifs [AB] et [AD].



Déterminer l'aire de la surface hachurée.

Solution. Notons O le point d'intersection des deux demi-cercles autre que A. Montrons que O est le centre du carré.



En effet, comme O appartient au demi-disque de diamètre [AB], AOB est un triangle rectangle en O et, de même, comme O appartient au demi-disque de diamètre [DB], AOD est un triangle rectangle en O. On en déduit que $\widehat{BOD} = \widehat{BOA} + \widehat{AOD} = 90° + 90° = 180°$ donc O appartient à [BD]. De plus, (AO) est perpendiculaire à (BD) et, comme ABCD est un carré, la perpendiculaire à (BC) passant par A est (AC). Ainsi, O est le point d'intersection de (BD) et (AC) donc O est le centre du carré ABCD.

Considérons le point d'intersection E de (AB) avec la perpendiculaire à (AB) passant par O et le point d'intersection F de (AD) avec la perpendiculaire à (AD) passant par O. Alors, AEOF possède trois angles droits donc AEOF est un rectangle. De plus, ABC est isocèle en B donc $\widehat{BAC} = 45°$ c'est-à-dire $\widehat{EAO} = 45°$. Ainsi, le triangle AEO possède un angle de 90° et un angle de 45° donc son troisième angle vaut également 45° et donc AEO est isocèle en E. Le rectangle AEOF possède deux côté consécutifs de même longueur : il s'agit donc d'un carré.

En notant G le point d'intersection de [CD] et (OE), par le même raisonnement, FOGD est aussi un carré donc DF = FO = FA et ainsi FA $= \dfrac{a}{2}$.

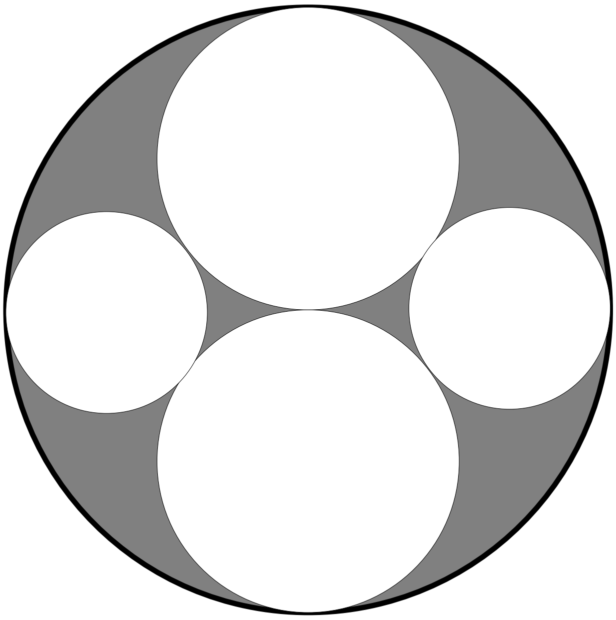
On remarque que, dans le triangle AEO, l'aire non hachurée est égale à l'aire de AEOF moins l'aire du quart de disque de centre F et de rayon FA $= \dfrac{a}{2}$ c'est-à-dire $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} \times \pi \times \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$. De même, dans le triangle AFO, l'aire non hachurée est égale à l'aire de AEOF moins l'aire du quart de disque de centre E et de rayon EA $= \dfrac{a}{2}$ c'est-à-dire $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} \times \pi \times \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$.

Ainsi, l'aire hachurée est égale à

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \times \pi \times \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = \frac{a^2}{4} - 2 \times \frac{a^2}{4} + \frac{1}{2} \times \pi \times \frac{a^2}{4} = -\frac{a^2}{4} + \frac{\pi a^2}{8} = \frac{-2a^2 + \pi a^2}{8}$$

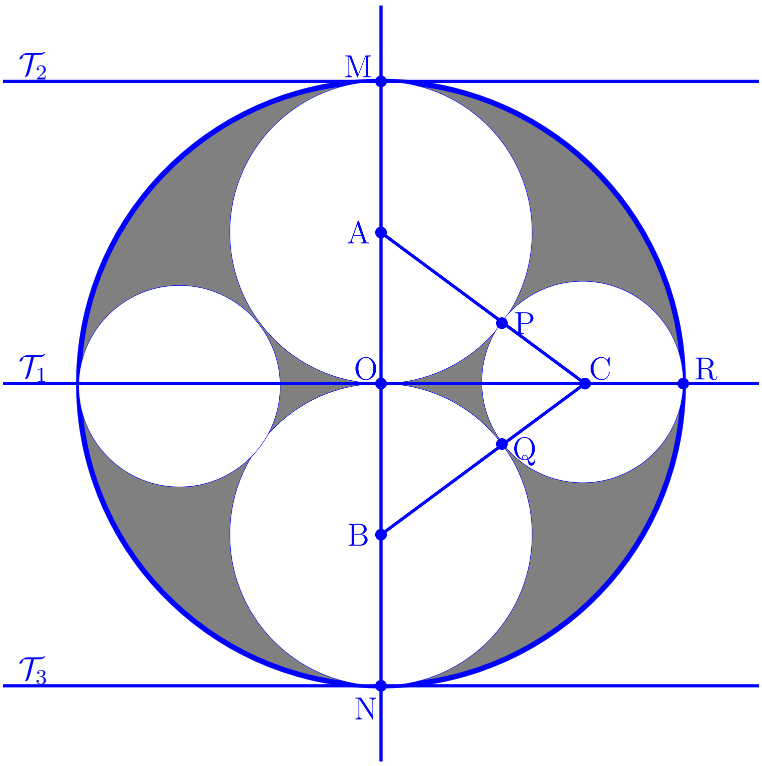
soit finalement $\dfrac{\pi - 2}{8} a^2$.

Exercice 29. Sur la figure ci-dessous, le grand cercle a pour rayon 4 et tous les cercles, sauf les deux plus petits, sont tangents deux à deux c'est-à-dire qu'ils admettent un et un seul point commun en lequel ils ont la même droite tangente. De plus, le point de tangence des deux cercles de taille intermédiaire est le centre du grand cercle.



Déterminer l'aire de la surface grisée.

Solution. Commençons par déterminer le rayon de deux cercles intermédiaires.



Notons O le centre du grand cercle et A et B le centre des cercles intermédiaires. Notons, de plus, M et N les points de tangence des cercles intermédiaires avec le grand cercle. Notons, enfin $\mathcal{T}_1$ la tangente commun aux deux cercles intermédiaires et $\mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_3$ les tangentes communes au grand cercle et aux deux cercles intermédiaires.

Alors, (OB) et (OA) sont perpendiculaires à $\mathcal{T}_1$ donc ces deux droites sont parallèles. Mais, comme elles possèdent le point O en commun, on en déduit que (OA) et (OB) sont confondues. Ainsi, A, O et B sont alignés. De plus, (OM) et (AM) sont perpendiculaires à $\mathcal{T}_2$ en M donc, de même, (OM) et (AM) sont confondues. Enfin, on prouve, de même, que (ON) et (BN) sont confondues donc finalement les points M, A, O, B et N sont tous alignés. On en déduit $\mathrm{OA} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OM} = 2$ cm et, de même, $\mathrm{OB} = \dfrac{1}{2}\mathrm{ON} = 2$ cm.

Notons C le centre du petit cercle de droite et P et Q les points de tangence de celui-ci avec les deux cercles intermédiaires et enfin R le point de tangence de ce petit cercle avec le grand cercle. Comme précédemment, on montre que A, P et C sont alignés et que B, Q et C sont alignés. Notons r le rayon du petit cercle. Alors, $\mathrm{AC} = \mathrm{AP} + \mathrm{PC} = 2 + r$ et $\mathrm{BC} = \mathrm{BQ} + \mathrm{QC} = 2 + r$ donc A et B sont équidistants de C. Ainsi, C appartient à la médiatrice de [AB] qui n'est autre que la droite $\mathcal{T}_1$. Enfin, comme le petit et le grand cercle sont tangents en R, comme précédemment, O, C et R sont alignés. On en déduit que $\mathrm{OC} = \mathrm{OR} - \mathrm{CR} = 4 - r$ et, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AOC rectangle en O, $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AO}^2 + \mathrm{OC}^2$ donc $(2+r)^2 = 2^2 + (4-r)^2$ c'est-à-dire $4 + 4r + r^2 = 4 + 16 - 8r + r^2$ donc $r = \dfrac{16}{12} = \dfrac{4}{3}$.

Le même raisonnement conduit au même résultat pour l'autre petit cercle. On en déduit que l'aire grisée est égale à

$$\pi \times 4^2 - 2 \times \pi \times 2^2 - 2 \times \pi \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 \text{ cm}^2 = \pi \left(16 - 8 - \frac{32}{9}\right) \text{ cm}^2 = \frac{40\pi}{9} \text{ cm}^2.$$

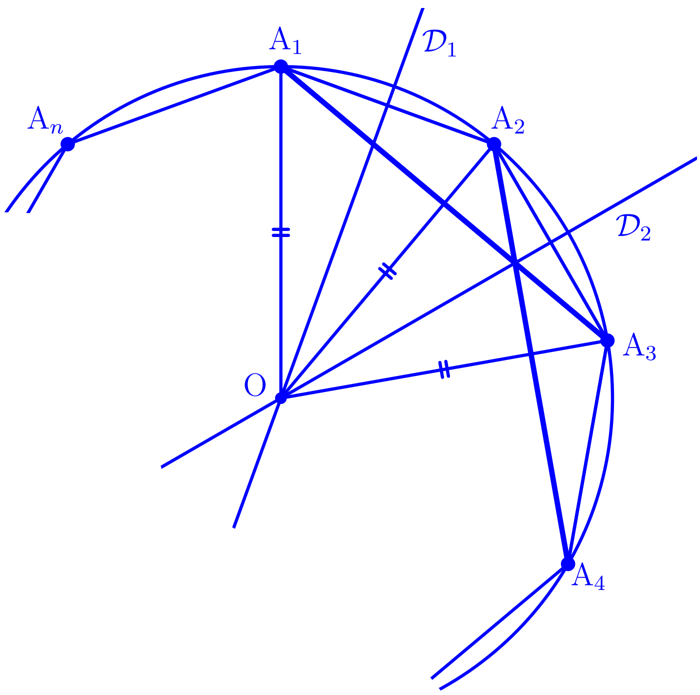
Exercice 30. Soit $\mathcal{P}$ un polygone convexe.

1. Montrer que si $\mathcal{P}$ est régulier alors tous ses sommets appartiennent à un même cercle.

2. La réciproque est-elle vraie ?

Solution.

1. Considérons un polygone régulier $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3 \cdots \mathrm{A}_n$.



Notons $\mathcal{D}_1$ la médiatrice de $[\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2]$ et $\mathcal{D}_2$ la médiatrice de $[\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3]$. Comme les trois points A_1, A_2 et A_3 ne sont pas alignés, les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes en un point O. De plus, par définition d'une médiatrice, $\mathrm{OA}_1 = \mathrm{OA}_2 = \mathrm{OA}_3$.

Le point O et le point A_2 sont équidistants de A_1 et de A_2 donc (OA_2) est la médiatrice de $(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3)$. Or, comme $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ est isocèle en A_2, (OA_2) est aussi la bissectrice de $\widehat{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}$. Ainsi, l'angle $\widehat{\mathrm{OA}_2\mathrm{A}_3}$ est égal à la moitié de l'angle $\widehat{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}$. Or, le triangle $\mathrm{OA}_2\mathrm{A}_3$ est isocèle en O donc $\widehat{\mathrm{OA_3A_2}}$ est aussi égal à la moitié de l'angle $\widehat{\mathrm{A_1A_2A_3}}$. Par ailleurs, comme le polygone est régulier, $\widehat{\mathrm{A_1A_2A_3}} = \widehat{\mathrm{A_2A_3A_4}}$ donc $\widehat{\mathrm{OA_3A_2}}$ est égal à la moitié de l'angle $\widehat{\mathrm{A_2A_3A_4}}$. Ainsi, $(\mathrm{OA_3})$ est la bissectrice de $\widehat{\mathrm{A_2A_3A_4}}$ et, comme $\mathrm{A_2A_3A_4}$ est isocèle en $\mathrm{A_3}$, $(\mathrm{OA_3})$ est aussi la médiatrice de $[\mathrm{A_2A_4}]$ donc $\mathrm{OA_4} = \mathrm{OA_2}$ et donc $\mathrm{OA_4} = \mathrm{OA_1}$.

En réitérant ceci avec les triangles $\mathrm{A_3A_4A_5}$, $\mathrm{A_4A_5A_6}$, ..., $\mathrm{A}_{n-2}\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$, on montre que $\mathrm{OA_1} = \mathrm{OA_2} = \cdots = \mathrm{OA}_n$ donc tous les sommets du polygone sont sur le cercle de centre O et de rayon $\mathrm{OA_1}$.

2. La réciproque est fausse. Par exemple, un rectangle est inscrit dans un cercle dont le centre est le centre du rectangle car les diagonales d'un rectangle sont de même longueur et se coupent en leur milieu. Pour autant, un rectangle (non carré) n'est pas un polygone régulier.