⧫ Corrigés des exercices du chapitre 5

1) Développement

Exercice 1. Développer, réduire et ordonner selon les puissances décroissantes les expressions suivantes.

$$A(x) = 4(3-5x) \qquad B(y) = 1-2(y+2)+3(3-2y)$$

$$C(x) = (1-4x)(5+x) \qquad D(x) = 3\left(3x-\frac{1}{2}\right)\left(2x+\frac{1}{3}\right)$$

$$E(q) = (3q+1)(3-q)(2q+1) \qquad F(x) = \left(\frac{1}{4}x-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{2}{7}+\frac{1}{3}x\right)$$

Solution.
$A(x) = 12-20x$
$B(x) = 1-2y-4+9-6y = -8y+6$
$C(x) = 5+x-20x-4x^2 = -4x^2-19x+5$
$D(x) = \left(9x-\frac{3}{2}\right)\left(2x+\frac{1}{3}\right) = 18x^2+3x-3x-\frac{1}{2} = 18x^2-\frac{1}{2}$
$E(x) = (9q-3q^2+3-q)(2q+1) = (-3q^2+8q+3)(2q+1) = -6q^3-3q^2+16q^2+8q+6q+3$
$= -6q^3+13q^2+14q+3$
$F(x) = -\frac{1}{14}x+\frac{1}{12}x^2+\frac{6}{35}-\frac{1}{5}x = \frac{1}{12}x^2-\frac{19}{70}x+\frac{6}{35}$

Exercice 2. Développer, réduire et éventuellement ordonner selon les puissances décroissantes les expressions suivantes.

$$f(x) = (x+2)^2 \qquad g(n) = (2-7n)^2$$
$$h(x) = (7-4x)(7+4x) \qquad i(x) = (5-2x)^2-(1+3x)^2$$
$$j(u) = 2u+4u^2-(2u+1)^2 \qquad E(a,b) = (a+b)^2-(a-b)^2$$

Solution.
$f(x) = x^2+4x+4$
$g(n) = 4-28n+(7n)^2 = 49n^2-28n+4$
$h(x) = 7^2-(4x)^2 = -16x^2+49$
$i(x) = (25-20x+4x^2)-(1+6x+9x^2) = 25-20x+4x^2-1-6x-9x^2 = -5x^2-26x+24$
$j(u) = 2u+4u^2-(4u^2+2u+1) = 2u+4u^2-4u^2-4u-1 = -2u-1$
$E(a,b) = (a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2) = a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2 = 4ab$

Exercice 3. Développer, réduire et ordonner selon les puissances décroissantes les expressions suivantes.

$$A(x) = (1+x^2)^2+3(2-3x) \quad B(x) = (1-x)(1+x+x^2+x^3) \quad C(a) = (a+1)(3-2a)(2-5a)$$

Solution.
$A(x) = 1+2x^2+x^4+6-9x = x^4+2x^2-9x+7$
$B(x) = 1+x+x^2+x^3-x-x^2-x^3-x^4 = -x^4+1$
$C(a) = (3a-2a^2+3-2a)(2-5a) = (-2a^2+a+3)(2-5a) = -4a^2+10a^3+2a-5a^2+6-15a$
$= 10a^3-9a^2-13a+6$

Exercice 4. Calculer de tête 999^2 et 1001^2.

Solution.
$999^2 = (1000-1)^2 = 1000^2 - 2\times 1000 + 1 = 1000000 - 2000 + 1 = 998001$
$1001^2 = (1000+1)^2 = 1000^2 + 2\times 100 + 1 = 1000000 + 2000 + 1 = 1002001.$

Exercice 5. Soit a, b, c et d des réels. Montrer que

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2.$$

Solution
D'une part,

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}(ac-bd)^2 + (ad-bc)^2 &= (ac)^2 - 2(ac)(bd) + (bd)^2 + (ad)^2 - 2(ad)(bc) + (bc)^2\\ &= (ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 - 2abcd + (bc)^2\\ &= (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2\end{aligned}$$

donc $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad-bc)^2$.

Exercice 6 (CRPE – Groupement 6 – 2008)**.** On se propose de calculer

$$A = 50\,000\,006 \times 70\,000\,008.$$

1. En tapant ce produit sur une calculatrice scientifique, on peut voir apparaître sur l'écran :
$$3{,}50000082 \times 10^{15}.$$
Justifier, sans calculer A, que cette valeur affichée n'est pas la valeur exacte de A.
2. Toujours sans calculer A, démontrer que $35\times 10^{14} < A < 48\times 10^{14}$. En déduire le nombre de chiffres de A.
3. Le nombre A peut aussi s'écrire $(5\times 10^7 + 6)\times(7\times 10^7+8)$. En utilisant les produits 5×7 ; 5×8 ; 6×7 et 6×8, déterminer la valeur exacte de A.
4. Soit $B = 48\,506\,557 \times 505\,149$. Calculer en utilisant une calculatrice : $48\,506\times 505$; 557×505 ; $48\,506\times 149$; 557×149.
En déduire, sans nouvelle utilisation de la calculatrice, en écrivant les calculs, la valeur exacte de B.

Solution.

1. Le chiffre des unités de A est le chiffre des unités de 6×8 donc ce chiffre est 8. Or, le chiffre des unités de $3{,}50000082\times 10^{15} = 3\,500\,008\,200\,000\,000$ est 0 donc $A \neq 3{,}50000082\times 10^{15}$.
2. D'une part, $5\times 10^7 < 50\,000\,006 < 6\times 10^7$ et, d'autre part, $7\times 10^7 < 70\,000\,008 < 8\times 10^7$ donc $(5\times 10^7)(7\times 10^7) < A < (6\times 10^7)(8\times 10^7)$ c'est-à-dire $35\times 10^{7+7} < A < 48\times 10^{7+7}$ soit encore $35\times 10^{14} < A < 48\times 10^{14}$.
Comme 35×10^{14} et 48×10^{14} sont des nombres à 16 chiffres, on conclut que A possède également 16 chiffres.
3. En développant,
$$\begin{aligned}A &= (5\times 10^7+6)(7\times 10^7+8) = (5\times 10^7)(7\times 10^7) + 40\times 10^7 + 42\times 10^7 + 48\\ &= 35\times 10^{14} + 90\times 10^7 + 48 = 3\,500\,000\,000\,000\,000 + 820\,000\,000 + 48\\ &= 3\,500\,000\,820\,000\,048\end{aligned}$$

4. À l'aide de la calculatrice, $48\,506 \times 505 = 24\,495\,530$, $557 \times 505 = 281\,285$, $48\,506 \times 149 = 7\,227\,394$ et $557 \times 149 = 82\,993$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
B &= (48\,506 \times 10^3 + 557)(505 \times 10^3 + 149) \\
&= (48\,506 \times 10^3)(500 \times 10^3) + (48\,506 \times 149) \times 10^3 + (557 \times 505) \times 10^3 + 557 \times 149 \\
&= 24\,495\,530 \times 10^6 + 7\,227\,394 \times 10^3 + 281\,285 \times 10^3 + 82\,993 \\
&= 24\,495\,530 \times 10^6 + 7\,508\,679 \times 10^3 + 82\,993 \\
&= 24\,495\,530\,000\,000 + 7\,508\,679\,000 + 82\,993 \\
&= 24\,495\,530\,000\,000 + 7\,508\,761\,993 \\
&= 24\,503\,038\,761\,993
\end{aligned}$$

Exercice 7 (CRPE – Groupement 1 - 2009)**.** Les deux questions sont indépendantes.

1. a. Développer et réduire l'expression suivante où x est un nombre réel :

$$(x+1)(x-1) - (x+2)(x-2).$$

b. Utiliser le résultat précédent pour trouver rapidement sans utiliser la calculatrice :

$$297 \times 295 - 298 \times 294.$$

2. Observer les résultats ci dessous :

$$\begin{aligned}
1^2 - 0^2 &= 1 \\
2^2 - 1^2 &= 3 \\
3^2 - 2^2 &= 5 \\
4^2 - 3^2 &= 7
\end{aligned}$$

Les égalités ci-dessus permettent de conjecturer une propriété. Deux sont proposées ici :

1. *Si a et b sont deux nombres consécutifs, alors leur somme est égale à la différence de leurs carrés.*
2. *Si a et b sont deux nombres consécutifs, alors leur somme est égale au carré de leur différence.*

Une seule de ces propriétés est exacte. Laquelle ? La démontrer.

Solution.

1. a. Pour tout réel x,

$$(x+1)(x-1)-(x+2)(x-2) = x^2-1^2-(x^2-2^2) = x^2-1-(x^2-4) = x^2-1-x^2+4 = 3.$$

b. En utilisant le résultat précédent avec $x = 296$, il vient

$$297 \times 295 - 298 \times 294 = (286+1)(296-1) - (296+2)(296-2) = 3.$$

2. Les résultats observés permettent de conjecturer que si a et b sont deux nombres consécutifs alors leur somme est égale à la différence de leurs carrés.
Pour le démontrer, remarquons que si a et b sont deux entiers consécutifs alors $b = a+1$ donc la différence des carrés est

$$b^2 - a^2 = (a+1)^2 - a^2 = a^2 + 2a + 1 - a^2 = 2a + 1$$

et leur somme est $a + b = a + (a+1) = 2a + 1$ et donc $b^2 - a^2 = a + b$.
On peut aussi remarquer que, si a et b sont consécutifs alors $b - a = 1$ donc $b^2 - a^2 = (b+a)(b-a) = (b+a) \times 1 = a + b$.

2) Factorisation

Exercice 8. Factoriser les expressions suivantes en remarquant un facteur commun.

$$A(x,y) = 3x + 3y \qquad B(q) = -6(1+2q) + 6(q+3) \qquad C(x) = x + x(2+5x)$$

$$D(x) = (4x-3)(x+1) + x(4x-3) \qquad E(x) = (2x-5)^2 - 3(1-x)(2x-5)$$

Solution.
$A(x,y) = 3(x+y)$
$B(q) = 6[-(1+2q) + (q+3)] = 6(-1-2q+q+3) = 6(-q+2)$
$C(x) = x \times 1 + x(2+5x) = x[1+(2+5x)] = x(5x+3)$
$D(x) = (4x-3)[(x+1)+x] = (4x-3)(2x+1)$
$E(x) = (2x-5)(2x-5) - 3(1-x)(2x-5) = (2x-5)[(2x-5) - 3(1-x)]$
$= (2x-5)(2x-5-3+3x) = (2x-5)(5x-8)$

Exercice 9. Factoriser les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables.

$$A(x) = x^2 + 6x + 9 \qquad B(y) = y^2 - 49 \qquad C(x) = 36x^2 - 4$$

$$D(n) = 4(5n+3)^2 - 9(n-1)^2 \qquad E(u) = \frac{1}{4}u^2 + u + 1 \qquad F(x) = (x+4)^2 - 2(x+4) + 1$$

Solution.
$A(x) = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^3 = (x+3)^2$
$B(y) = y^2 - 7^2 = (y-7)(y+7)$
$C(x) = (6x)^2 - 2^2 = (6x-2)(6x+2)$
$D(n) = [2(5n+3)]^2 - [3(n-1)]^2 = [2(5n+3) - 3(n-1)][2(5n+3) + 3(n-1)]$
$= (10n+6-3n+3)(10n+6+3n-3) = (7n+9)(13n+3)$
$E(u) = \left(\frac{1}{2}u\right)^2 + 2 \times \frac{1}{2}u \times 1 + 1^2 = \left(\frac{1}{2}u + 1\right)^2$
$F(x) = (x+4)^2 - 2 \times (x+4) \times 1 + 1^2 = (x+4-1)^2 = (x+3)^2$

Exercice 10. Factoriser les expressions.

$$A(x) = 3(x-4)^2 + (4-x)(x+2) \qquad B(x) = (3x-2)^2 + (2x+9)(4-6x)$$

$$C(y) = y^2 - 4y + 4 + 3(y-2)^2 \qquad D(n) = 25n^2 - 4 + (5n+2)(4n-7)$$

Solution.
$A(x) = 3(x-4)(x-4) - (x-4)(x+2) = (x-4)[3(x-4) - (x+2)] = (x-4)(3x-12-x-2)$
$= (x-4)(2x-14)$
$B(x) = (3x-2)(3x-2) + (2x+9)(-2)(3x-2) = (3x-2)[(3x-2) + (-2)(2x+9)]$
$= (3x-2)(3x-2-4x-18) = (3x-2)(-x-20)$
$C(y) = y^2 - 2 \times 2 \times y + 4^2 + 3(y-2)^2 = (y-2)^2 + 3(y-2)^2 = 4(y-2)^2$
$D(n) = (5n)^2 - 2^2 + (5n+2)(4n-7) = (5n-2)(5n+2) + (5n+2)(4n-7)$
$= (5n+2)[(5n-2) + (4n-7)] = (5n+2)(9n-9)$

Exercice 11. Factoriser les expressions suivantes.

$$A(x) = 2x + 1 + (2x+1)(x+3) \qquad B(x) = x^2 + 4x$$

$$C(x) = x^2 + 6x + 9 + (2-5x)(x+3) \qquad D(x) = (2x+1)(7x-1) - 1 - 2x$$

$$E(x) = (3x+6)(1-4x) + (x+2)^2 \qquad F(x,y) = x^2 + 2x - y^2 + 4y - 3$$

Solution.
$A(x) = (2x+1)\times 1 + (2x+1)(x+3) = (2x+1)[1+(x+3)] = (2x+1)(x+4)$
$B(x) = x\times x + 4\times x = x(x+4)$
$C(x) = x^2+2\times x\times 3+3^2+(2-5x)(x+3) = (x+3)^2+(2-5x)(x+3) = (x+3)[(x+3)+(2-5x)]$
$\quad = (x+3)(-4x+5)$
$D(x) = (2x+1)(7x-1) - (2x+1)\times 1 = (2x+1)[(7x-1)-1] = (2x+1)(7x-2)$
$E(x) = 3(x+2)(1-4x)+(x+2)(x+2) = (x+2)[3(1-4x)+(x+2)] = (x+2)(3-12x+x+2)$
$\quad = (x+2)(-11x+5)$
$F(x) = x^2+2x+1-1-y^2+4y-3 = (x+1)^2-(y^2-4y+4) = (x+1)^2-(y-2)^2$
$\quad = [(x+1)-(y-2)][(x+1)+(y-2)] = (x-y+3)(x+y-1)$

Exercice 12. Déterminer les entiers naturels a et b tels que $a^2 - b^2 = 99$

Solution. Considérons deux entiers naturels a et b tels que $a^2-b^2 = 99$. Alors, $(a-b)(a+b) = 99$ donc $(a-b, a+b)$ est un couple de diviseurs de 99. De plus, comme a et b sont positifs, $a+b$ est positif et donc, comme $(a-b)(a+b)$ est positif, $a-b$ est également positif. De plus, comme b est positif, $a-b \leqslant a+b$. On en déduit que les valeurs possibles pour $(a-b, a+b)$ sont $(1, 99)$, $(3, 33)$ et $(9, 11)$.

Si $a-b = 1$ et $a+b = 99$ alors $2a = (a-b)+(a+b) = 1+99 = 100$ donc $a = 50$ et, comme $a-b = 1$, $b = 49$.

Si $a-b = 3$ et $a+b = 33$ alors $2a = (a-b)+(a+b) = 3+33 = 36$ donc $a = 18$ et, comme $a-b = 3$, $b = 15$.

Si $a-b = 9$ et $a+b = 11$ alors $2a = (a-b)+(a+b) = 9+11 = 20$ donc $a = 10$ et, comme $a-b = 9$, $b = 1$.

Inversement, on vérifie que $50^2-49^2 = 99$, $18^2-15^2 = 99$ et $10^2-1^2 = 99$.

Ainsi, les couples d'entiers (a, b) tels que $a^2-b^2 = 99$ sont $(50, 49)$, $(18, 15)$ et $(10, 1)$.

Exercice 13 (CRPE – Groupement 2 – 2018)**.** Pour calculer de tête le carré d'un nombre entier se terminant par 5 :

- on prend le nombre de dizaines et on le multiplie par l'entier qui suit ce nombre de dizaines, cela donne le nombre de centaines du résultat ;
- on écrit ensuite 25 à droite du nombre de centaines pour obtenir le résultat.

Par exemple, 105 est composé de 10 dizaines et 5 unités, son carré s'obtient :

étape 1 : en calculant $10\times 11 = 110$, ce qui donne le nombre de centaines du résultat ;

étape 2 : on écrit ensuite 25 à droite de 110 pour obtenir le résultat. On a donc $105^2 = 11\,025$.

1. Montrer comment calculer mentalement 45^2.

2. Soit n un nombre entier se terminant par 5, n peut s'écrire : $10d+5$ avec d le nombre de dizaines. Établir la relation :

$$n^2 = 100d(d+1)+25.$$

3. Expliquer en quoi le résultat de la question 2 permet d'établir la technique de calcul mental présentée dans l'énoncé.

4. Comment, par extension de la technique de calcul mental présentée, calculer mentalement le carré de 3,5 ?

Solution.

1. Dans 45, il y a 4 dizaine donc on calcule $4\times 5 = 20$ et le carré de 45 est ainsi 2025.

2. On a

$$n^2 = (10d+5)^2 = (10d)^2 + 2\times 10d\times 5 + 5^2 = 100d^2 + 100d + 25 = 100d(d+1) + 25.$$

3. Dans le calcul précédent, d est le nombre de dizaines de n, donc $d(d+1)$ correspond au produit de d et de l'entier suivant d. Le résultat de ce produit est multiplié par 100 donc $d(d+1)$ est le nombre de centaines de n^2. À cela, on ajoute 25 ce qui revient à écrire 25 à droite de $d(d+1)$.

4. En écrivant $3{,}5 = \dfrac{35}{10}$, on a $3{,}5^2 = \dfrac{35^2}{10^2}$. Grâce à la méthode de l'énoncé, on calcule 35^2 en multipliant 3 par 4 ce qui donne 12 centaines puis on ajoute 25 donc $35^2 = 1225$. On en déduit que $3{,}5^2 = \dfrac{1225}{100} = 12{,}25$.

3) Réduction au même dénominateur

Exercice 14. Soit x un réel différent de 1 et 2. Simplifier $A(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x-2}$.

Solution.

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)} - \frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x^2-2x-(x^2+-1)}{x^2-x-2x+1} = \frac{x^2-2x-x^2+1}{x^2-3x+1} \\ &= \frac{-2x+1}{x^2-3x+1} \end{aligned}$$

Exercice 15. Soit x un réel différent de 3 et -3. Simplifier $B(x) = \frac{x-2}{x-3} + \frac{x+2}{x+3}$.

Solution.

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{(x-2)(x+3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{(x+2)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x^2+3x-2x-6+x^2-3x+2x-6}{x^2-9} \\ &= \frac{2x^2+-12}{x^2-9} \end{aligned}$$

Exercice 16. Soit n un entier naturel non nul. Simplifier $C(n) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$.

Solution.

$$C(n) = \frac{n}{(n+1)n} - \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{n-(n+1)}{n^2+n} = \frac{-1}{n^2+n}$$

Exercice 17. Soit n un entier naturel non nul. Simplifier $D(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}$.

Solution.

$$\begin{aligned} D(n) &= \frac{n+1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} = \frac{n+2}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n(n+2)-(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n^2+2n-(n^2+2n+1)}{n(n^2+2n+1)} \\ &= \frac{-1}{n^3+2n^2+n} \end{aligned}$$

Exercice 18. Soit t un réel différent de 0 et -1. Simplifier $E(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t(t+1)}$

Solution.

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{(t+1)^2}{t(t+1)^2} - \frac{t}{t(t+1)^2} - \frac{1}{t(t+1)} = \frac{t^2+2t+1-t}{t(t+1)^2} - \frac{t+1}{t(t+1)^2} \\ &= \frac{t^2+t+1-(t+1)}{t(t^2+2t+1)} = \frac{t^2}{t(t^2+2t+1)} \\ &= \frac{t}{t^2+2t+1} \end{aligned}$$

4) Puissances et racines carrées

Exercice 19. Sans calculatrice, déterminer les nombres égaux dans la liste ci-dessous.

$$A = 2^{100} \qquad B = \frac{(-2)^{60}}{4^{-20}} \qquad C = 100^2 \qquad D = 5^4 \times 2^4$$

$$E = (2^{20})^5 \qquad F = 200^2 \qquad G = 50^4 \qquad H = 10000$$

Solution. D'une part,

$$B = \frac{(-2)^{60}}{4^{-20}} = (-1\times 2)^{60} \times 4^{60} = (-1)^60 \times 2^{60} \times (2^2)^{20} = 1 \times 2^{60} \times 2^{2\times 20} = 2^{60+40} = 2^{100}$$

et

$$E = (2^{20})^5 = 2^{20\times 5} = 2^{100}$$

donc $A = B = E$.

D'autre part,

$$C = 100^2 = (10^2)^2 = 10^{2\times 2} = 10^4$$

et

$$D = (5\times 2)^4 = 10^4$$

donc $C = D = H = 10^4$.

Exercice 20. Effectuer, sans calculatrice, les opérations suivantes.

$$1+3^2 \qquad 2\times 5^3 \qquad (2\times 5)^3 \qquad 2^{-1}+5^{-2} \qquad 2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}$$

Solution. $1+3^2 = 1+9 = 10$, $2\times 5^3 = (2\times 5)\times 5^2 = 10\times 25 = 250$, $(2\times 5)^3 = 10^3 = 1000$, $2^{-1}+5^{-2} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{25} = \dfrac{25}{50}+\dfrac{2}{50} = \dfrac{27}{50}$ et $2^{-1}+2^{-2}+2^{-3} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3} = \dfrac{4}{8}+\dfrac{2}{8}+\dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$.

Exercice 21. Soit a et b deux réels non nuls. Écrire les nombres suivants sous la forme $a^n b^m$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}$.

$$A = a^2 \times b^3 \times \frac{a}{b} \qquad B = \frac{1}{a^4 b^7} \qquad C = \frac{a^{-2}b}{a^{-6}b^3} \qquad D = a \times \frac{1}{b^3} \times \left(\frac{a^2 b}{a^{-1}b^3}\right)^2 \qquad E = \left[(ab^2)^{-2}\right]^3.$$

Solution.
$A = a^2 \times b^3 \times a \times b^{-1} = a^{2+1}b^{3-1} = a^3b^2$
$B = (a^4b^7)^{-1} = a^{-4}b^{-7}$
$C = a^{-2}b \times a^6 b^{-3} = a^{-2+6}b^{1-3} = a^4b^{-2}$
$D = ab^{-3} \times \dfrac{(a^2b)^2}{(a^{-1}b^3)^2} = ab^{-3}a^{2\times 2}b^2 \times \dfrac{1}{a^{-1\times 2}b^{3\times 2}} = a^{1+4}b^{-3+2}a^2b^{-6} = a^{5+2}b^{-1-6} = a^7b^{-7}$
$E = (ab^2)^{-2\times 3} = (ab^2)^{-6} = a^{-6}b^{2\times(-6)} = a^{-6}b^{-12}$

Exercice 22. Calculer les nombres suivants sans calculatrice.

$$A = \sqrt{4} \qquad B = \sqrt{(-6)^2} \qquad C = \sqrt{11}^2 \qquad D = \sqrt{5^4}$$

$$E = \sqrt{81 \times 49} \qquad F = \sqrt{16 \times 121} \qquad G = \sqrt{169 \times 64}$$

Solution. $A = 2$, $B = \sqrt{36} = 6$, $C = 11$, $D = \sqrt{(5^2)^2} = 5^2 = 25$, $E = \sqrt{81}\sqrt{49} = 9 \times 7 = 63$, $F = \sqrt{16}\sqrt{121} = 4 \times 11 = 44$, $G = \sqrt{169}\sqrt{64} = 13 \times 8 = 104$.

Exercice 23. Calculer les nombres suivants sans calculatrice.

$$A = \sqrt{\frac{81}{16}} \qquad B = \sqrt{\frac{25 \times 81}{64}} \qquad C = \sqrt{49} \times \sqrt{\frac{16}{25}}$$

Solution. $A = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}} = \dfrac{9}{4}$, $B = \dfrac{\sqrt{25}\sqrt{81}}{\sqrt{64}} = \dfrac{5 \times 9}{8} = \dfrac{45}{8}$ et $C = 7 \times \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = 7 \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{28}{5}$.

Exercice 24. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers naturels.

$$A = \sqrt{50} \qquad B = \sqrt{200} \qquad C = \sqrt{147} \qquad D = \sqrt{54}$$

$$E = \sqrt{8} + \sqrt{18} \qquad F = \sqrt{75} + \sqrt{48} + \sqrt{12} \qquad G = \sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{300}$$

Solution.
$A = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
$B = \sqrt{100 \times 2} = \sqrt{100}\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$
$C = \sqrt{49 \times 3} = \sqrt{49}\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$
$D = \sqrt{9 \times 6} = \sqrt{9}\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$
$E = \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{4}\sqrt{2} + \sqrt{9}\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
$F = \sqrt{25 \times 3} + \sqrt{16 \times 3} + \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{25}\sqrt{3} + \sqrt{16}\sqrt{3} + \sqrt{4}\sqrt{3} = 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 11\sqrt{3}$
$G = \sqrt{9 \times 3} - \sqrt{4 \times 3} + \sqrt{100 \times 3} = \sqrt{9}\sqrt{3} - \sqrt{4}\sqrt{3} + \sqrt{100}\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$.

Exercice 25. Soit ABC un triangle tel que $\mathrm{AB} = 4\sqrt{3}$, $\mathrm{BC} = 2\sqrt{12}$ et $\mathrm{CA} = 4\sqrt{6}$.
Déterminer la nature précise du triangle ABC.

Solution. Comme $\mathrm{BC} = 2\sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{4}\sqrt{3} = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} = \mathrm{AB}$, ABC est isocèle en B. De plus,

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = 2\mathrm{AB}^2 = 2(4\sqrt{3})^2 = 2 \times 16 \times 3 = 96$$

et

$$\mathrm{CA}^2 = (4\sqrt{6})^2 = 16 \times 6 = 96$$

donc $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AC}^2$ et, par le sens réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B.
On conclut donc que ABC est isocèle rectangle en B.

Exercice 26. Soit $t \in \mathbb{R}$. Simplifier $\left(\sqrt{t^2+1} - 1\right)\left(\sqrt{t^2+1} + 1\right)$.

Solution. En reconnaissant une identité remarquable,

$$\left(\sqrt{t^2+1} - 1\right)\left(\sqrt{t^2+1} + 1\right) = \sqrt{t^2+1}^2 - 1^2 = t^2 + 1 - 1 = t^2.$$

Exercice 27. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $\sqrt{(x^2-1)^2 + 4x^2}$

Solution. Étant donné que $(x^2-1)^2 = (x^2)^2 - 2x^2 + 1^2 = x^4 - 2x^2 + 1$,

$$\sqrt{(x^2-1)^2 + 4x^2} = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2} = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} = \sqrt{(x^2+1)^2} = x^2 + 1$$

car $x^2 + 1 \geqslant 0$.

5) Résolution d'équation

Exercice 28. Vérifier que $2+\sqrt{6}$ est solution de l'équation $x^2-4x=2$.

Solution. Étant donné que

$$(2+\sqrt{6})^2-4(2+\sqrt{6})=2^2+2\times 2\times\sqrt{6}+\sqrt{6}^2-8-4\sqrt{6}=4+4\sqrt{6}+6-8-4\sqrt{6}=2,$$

$2+\sqrt{6}$ est solution de l'équation $x^2-4x=2$.

Exercice 29. — On considère l'équation

$$(E):\ \frac{3x+1}{5}-2x+1=3+4x.$$

Compléter le raisonnement suivant en indiquant entre parenthèses l'opération effectuée pour passer d'une équation à l'autre (par exemple : on a divisé par 3, on a additionné 2, etc...)

$$\begin{array}{lll}
(E) & \Leftrightarrow \dfrac{3x+1}{5}-2x+1-(3+4x)=0 & \text{(On a soustrait } 3+4x\text{)}\\
 & \Leftrightarrow \dfrac{3x+1}{5}-2x+1-3-4x=0 & \\
 & \Leftrightarrow \dfrac{3x+1}{5}-6x-2=0 & \\
 & \Leftrightarrow 3x+1-30x-10=0 & \text{(On a multiplié par } 5\neq 0\text{)}\\
 & \Leftrightarrow -27x-9=0 & \\
 & \Leftrightarrow -27x=9 & \text{(On a additionné } 9\text{)}\\
 & \Leftrightarrow x=-\frac{9}{27} & \text{(On a divisé par } -27\neq 0\text{)}\\
 & \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3} &
\end{array}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de (E) est $\{-\frac{1}{3}\}$.

Exercice 30. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$(E_1):\ 3x=0 \qquad (E_2):\ 5x=1 \qquad (E_3):\ 3-2x=5 \qquad (E_4):\ 1-x=4x+7$$

$$(E_5):\ 0{,}3x+0{,}01=2{,}7-3{,}1x \qquad (E_6):\ \frac{2}{3}x=5 \qquad (E_7)\ \frac{7}{5}x-\frac{1}{3}=\frac{3}{4}x+1$$

Solution.

$(E_1)\Leftrightarrow \dfrac{3x}{3}=\dfrac{0}{3}\Leftrightarrow x=0$

L'ensemble des solutions des (E_1) est $\{0\}$.

$(E_2)\Leftrightarrow \dfrac{5x}{5}=\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{5}$

L'ensemble des solutions des (E_2) est $\left\{\dfrac{1}{5}\right\}$.

$(E_3)\Leftrightarrow 3-2x-3=5-3\Leftrightarrow -2x=2\Leftrightarrow \dfrac{-2x}{-2}=\dfrac{2}{-2}\Leftrightarrow x=-1$

L'ensemble des solutions des (E_3) est $\{-1\}$.

$(E_4)\Leftrightarrow 1-x+x=4x+7+x\Leftrightarrow 1=5x+7\Leftrightarrow 1-7=5x+7-7\Leftrightarrow -6=5x\Leftrightarrow \dfrac{-6}{5}=\dfrac{5x}{5}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{6}{5}=x$

L'ensemble des solutions des (E_4) est $\left\{-\dfrac{6}{5}\right\}$.

$(E_5) \Leftrightarrow 0{,}3x + 0{,}01 = 2{,}7 - 3{,}1x \Leftrightarrow 0{,}3x + 3{,}1x + 0{,}01 = 2{,}7 \Leftrightarrow 3{,}4x = 2{,}7 - 0{,}01$

$\Leftrightarrow 3{,}4x = 2{,}69 \Leftrightarrow x = \dfrac{2{,}69}{3{,}4} \Leftrightarrow x = \dfrac{269}{340}$

L'ensemble des solutions des (E_5) est $\left\{\dfrac{269}{340}\right\}$.

$(E_6) \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = 5 \times \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{15}{2}$

L'ensemble des solutions des (E_6) est $\left\{\dfrac{15}{2}\right\}$.

$(E_7) \Leftrightarrow \dfrac{7}{5}x - \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{7}{5} - \dfrac{3}{4}\right)x = 1 + \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \left(\dfrac{28}{20} - \dfrac{15}{20}\right)x = \dfrac{3}{3} + \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{13}{20}x = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{13}{20}} \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{20}{13} \Leftrightarrow x = \dfrac{80}{39}$

L'ensemble des solutions des (E_7) est $\left\{\dfrac{80}{39}\right\}$.

Exercice 31. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$(E_1) : \ \frac{x-2}{2} + 2 = 2x \qquad (E_2) : \ \frac{2x+3}{4} + \frac{4-x}{3} = \frac{x+1}{2}$$

$$(E_3) : \ \frac{5-x}{7} + 0{,}3x = \frac{2}{5} \qquad (E_4) : \ \sqrt{3}x - 2 = x + 1$$

Solution.

$(E_1) \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{x-2}{2} + 2\right) = 2 \times 2x \Leftrightarrow x - 2 + 4 = 4x \Leftrightarrow x + 2 = 4x \Leftrightarrow 2 = 4x - x$

$\Leftrightarrow 2 = 3x \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} = x$

L'ensemble des solutions des (E_1) est $\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

$(E_2) \Leftrightarrow 12\left(\dfrac{2x+3}{4} + \dfrac{4-x}{3}\right) = 12 \times \dfrac{x+1}{2} \Leftrightarrow 3(2x+3) + 4(4-x) = 6(x+1) \Leftrightarrow 6x + 9 + 16 - 4x = 6x + 6 \Leftrightarrow 2x + 25 = 6x + 6$

$\Leftrightarrow 25 = 6x + 6 - 2x \Leftrightarrow 25 = 4x + 6 \Leftrightarrow 25 - 6 = 4x \Leftrightarrow 19 = 4x \Leftrightarrow \dfrac{19}{4} = x$

L'ensemble des solutions des (E_2) est $\left\{\dfrac{19}{4}\right\}$.

$(E_3) \Leftrightarrow \dfrac{5-x}{7} + \dfrac{3}{10}x = \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow 70\left(\dfrac{5-x}{7} + \dfrac{3}{10}x\right) = 70 \times \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow 10(5-x) + 21x = 28 \Leftrightarrow 50 - 10x + 21x = 28$

$\Leftrightarrow 11x = 28 - 50 \Leftrightarrow x = \dfrac{-22}{11} \Leftrightarrow x = -2$

L'ensemble des solutions des (E_3) est $\{-2\}$.

$(E_4) \Leftrightarrow \sqrt{3}x - 2 = x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{3}x - x - 2 = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{3} - 1)x - 2 = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{3} - 1)x = 1 + 2$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - 1)x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{\sqrt{3} - 1}$

L'ensemble des solutions des (E_4) est $\left\{\dfrac{3}{\sqrt{3} - 1}\right\}$.

Exercice 32. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$(E_1) : \ x(x+1) = x^2 + 3 \qquad (E_2) : \ (2x+3)^2 - 4x^2 = 5x + 1$$

$$(E_3) : \ x(1-3x) + 3x^2 = \frac{3-7x}{5} \qquad (E_4) : \ (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 5x - 2$$

Solution.
$(E_1) \Leftrightarrow x^2 + x = x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 + x - x^2 = 3 \Leftrightarrow x = 3$
L'ensemble des solutions des (E_1) est $\{3\}$.

$(E_2) \Leftrightarrow (2x+3)^2 - 4x^2 = 5x+1 \Leftrightarrow (2x)^2 + 2\times 2x \times 3 + 3^2 - 4x^2 = 5x+1 \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 9 - 4x^2 = 5x+1 \Leftrightarrow 12x + 9 = 5x + 1$

$$\Leftrightarrow 12x + 9 - 5x = 1 \Leftrightarrow 7x + 9 = 1 \Leftrightarrow 7x = 1 - 9 \Leftrightarrow 7x = -8 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{7}$$

L'ensemble des solutions des (E_2) est $\left\{-\frac{8}{7}\right\}$.

$(E_3) \Leftrightarrow 5\left(x(1-3x) + 3x^2\right) = 5 \times \dfrac{3-7x}{5} \Leftrightarrow 5x(1-3x) + 15x^2 = 3 - 7x \Leftrightarrow 5x - 15x^2 + 15x^2 = 3 - 7x \Leftrightarrow 5x = 3 - 7x$

$$\Leftrightarrow 5x + 7x = 3 \Leftrightarrow 12x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

L'ensemble des solutions des (E_3) est $\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

$(E_4) \Leftrightarrow (x+1)^2(x+1) = x^3 + 3x^2 + 5x - 2 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1)(x+1) = x^3 + 3x^2 + 5x - 2$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + x + 1 = x^3 + 3x^2 + 5x - 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 3x^2 + 5x - 2$$
$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 - 3x^2 - 5x = -2 \Leftrightarrow -2x + 1 = -2 \Leftrightarrow -2x = -2 - 1$$
$$\Leftrightarrow -2x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

L'ensemble des solutions des (E_4) est $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Exercice 33 (CRPE – Aix-Marseille – 1999)**.** Un nombre à trois chiffres a 4 pour chiffre des centaines. Ce nombre est 26 fois plus grand que le nombre à deux chiffres obtenu en enlevant le chiffre des centaines. Trouver ce nombre.

Solution. Notons x le nombre a deux chiffres obtenu en enlevant le chiffre des centaines. Ainsi, le nombre de départ est $400 + x$ et donc l'énoncé se traduit par $400 + x = 26x$. Or,

$$400 + x = 26x \Leftrightarrow 400 = 26x - x \Leftrightarrow 400 = 25x \Leftrightarrow \frac{400}{25} = x \Leftrightarrow 16 = x$$

Ainsi, $x = 16$ et le nombre cherché est donc $400 + 16 = 416$.

Exercice 34 (CRPE – Groupement 2 – 2017)**.** Un batelier descend une rivière de 120 km en un certain nombre de jours n, puis il la remonte. La distance parcourue quotidiennement lors de la remontée est inférieure de 6 km à celle parcourue quotidiennement lors de la descente. Le batelier met au total un jour de plus pour remonter que pour descendre. On considère qu'il descend à vitesse constante et qu'il remonte à vitesse constante.

1. Exprimer, en fonction de n, la distance, en kilomètre, parcourue quotidiennement pendant la descente et la distance, en kilomètre, parcourue quotidiennement pendant la remontée.

2. Montrer que $\frac{120}{n+1} = \frac{120}{n} - 6$.

3. Déduire de la question précédente que $n(n+1) = 20$.

4. En déduire la valeur de n et interpréter ce résultat.

Solution.

1. À la descente, le batelier parcourt 120 km en n jours donc, comme sa vitesse est constante, il parcourt $\dfrac{120}{n}$ km chaque jour.
À la remontée, il met un jour de plus donc $n+1$ jour pour parcourir les 120 km et ainsi il parcourt $\dfrac{120}{n+1}$ km chaque jour.

2. On sait qu'à la remontée, il parcourt quotidiennement 6 km de moins qu'à la descente donc $\dfrac{120}{n+1} = \dfrac{120}{n} - 6$.

3. On en déduit que $\dfrac{120}{n+1} - \dfrac{120}{n} = -6$. Or,

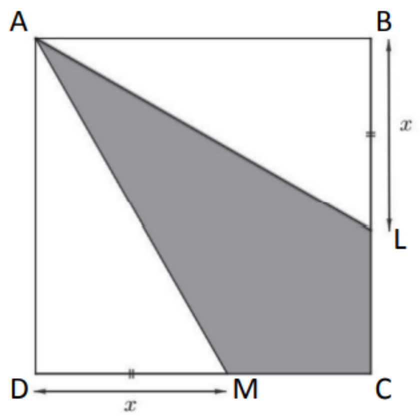
$$\frac{120n}{n(n+1)} - \frac{120(n+1)}{n(n+1)} = \frac{120n - 120(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-120}{n(n+1)}$$

donc $\dfrac{-120}{n(n+1)} = -6$. En multipliant par $n(n+1)$, il s'ensuit que $-120 = -6n(n+1)$ donc, en divisant par -6, $\dfrac{-120}{-6} = n(n+1)$ c'est-à-dire $n(n+1) = 20$.

4. Ainsi, $(n, n+1)$ est un couple de diviseurs de 20 formé d'entiers naturels consécutifs. Comme les couples de diviseurs de 20 sont $(1, 20)$, $(2, 10)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(10, 2)$ et $(20, 1)$, on en déduit que $n = 4$.

Ainsi, le batelier descend les 120 km de rivière en 4 jours.

Exercice 35 (d'après CRPE – Groupement 4 – 2021)**.** On souhaite partager un carré ABCD de 10 cm de côté en trois parties comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



L est un point du segment [BC] et M est le point du segment [CD] tel que DM = BL. On note x la longueur, en centimètre, du segment [BL].

1. Expliquer pourquoi $0 \leqslant x \leqslant 10$.

2. Vérifier que si $x = 2$ alors l'aire du quadrilatère grisé AMCL est égale à 80 cm^2.

3. Calculer l'aire du quadrilatère grisé AMCL si $x = \frac{3}{5}$.

4. Montrer que l'aire du quadrilatère grisé AMCL, exprimée en centimètre carré, en fonction de x, est égale à $100 - 10x$.

5. Déterminer x pour que les trois parties aient la même aire.

Solution.

1. Comme x est une longueur, $x \geqslant 0$ et, comme L appartient à [BC] comme BC $= 10$, $x \leqslant 10$. On conclut donc que $0 \leqslant x \leqslant 10$.

2. L'aire grisée est égale à l'aire du carré moins les aires des triangles ADM et ABL. Or, comme ces deux triangles sont rectangles, leurs aires sont égales à $\dfrac{10 \times 2}{2} = 10$ cm^2. Ainsi, l'aire grisée est égale à $10^2 - 2 \times 10$ cm$^2 = 80$ cm^2.

3. Si $x = \frac{3}{5}$, par le même raisonnement, les aires de ADM et ABL sont égales à $\dfrac{10 \times \frac{3}{5}}{2} = 3\ \text{cm}^2$ donc l'aire grisée est égale à $10^2 - 2 \times 3\ \text{cm}^2 = 94\ \text{cm}^2$.

4. De manière générale, les aires de ADM et ABL sont égales à $\dfrac{10 \times x}{2} = 5x\ \text{cm}^2$ donc l'aire grisée, en cm^2, est $10^2 - 2 \times 5x = 100 - 10x$.

5. Les trois parties ont la même aire si et seulement l'aire grisée est égale à $\dfrac{1}{3}$ de l'aire du carrée c'est-à-dire si et seulement si $100 - 10x = \dfrac{1}{3} \times 10^2$. Or,

$$100 - 10x = \frac{1}{3} \times 10^2 \Leftrightarrow 3(100 - 10x) = 100 \Leftrightarrow 300 - 30x = 100 \Leftrightarrow -30x = 100 - 300$$
$$\Leftrightarrow -30x = -200 \Leftrightarrow x = \frac{-200}{-30} \Leftrightarrow x = \frac{20}{3}.$$

Ainsi, les trois parties ont la même aire si et seulement si $x = \dfrac{20}{3}$.