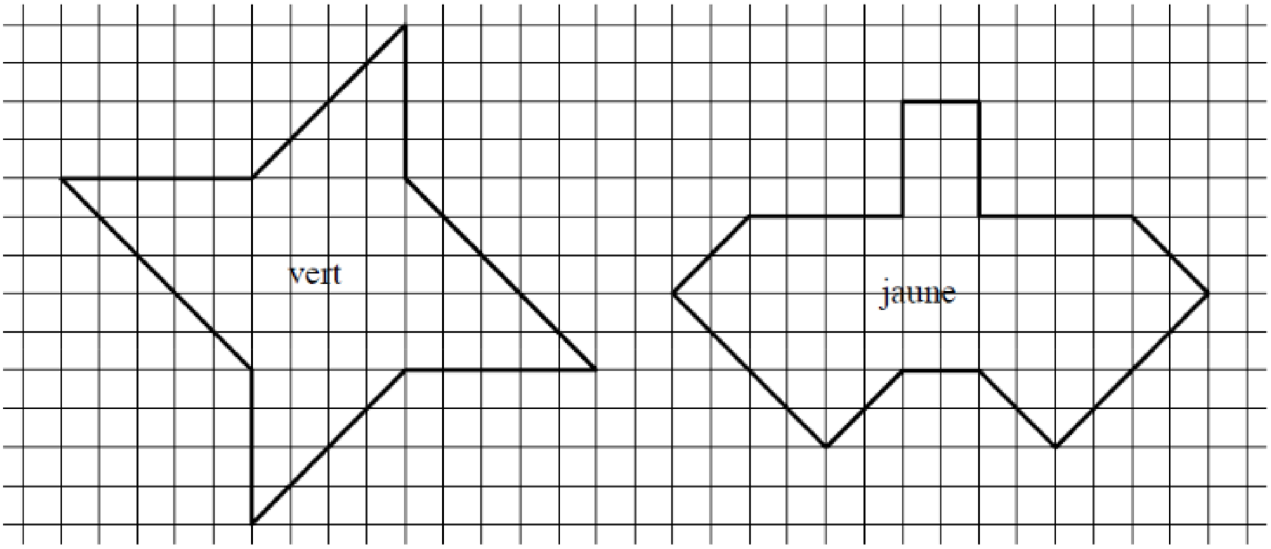
⧫ Corrigés des exercices du chapitre 4

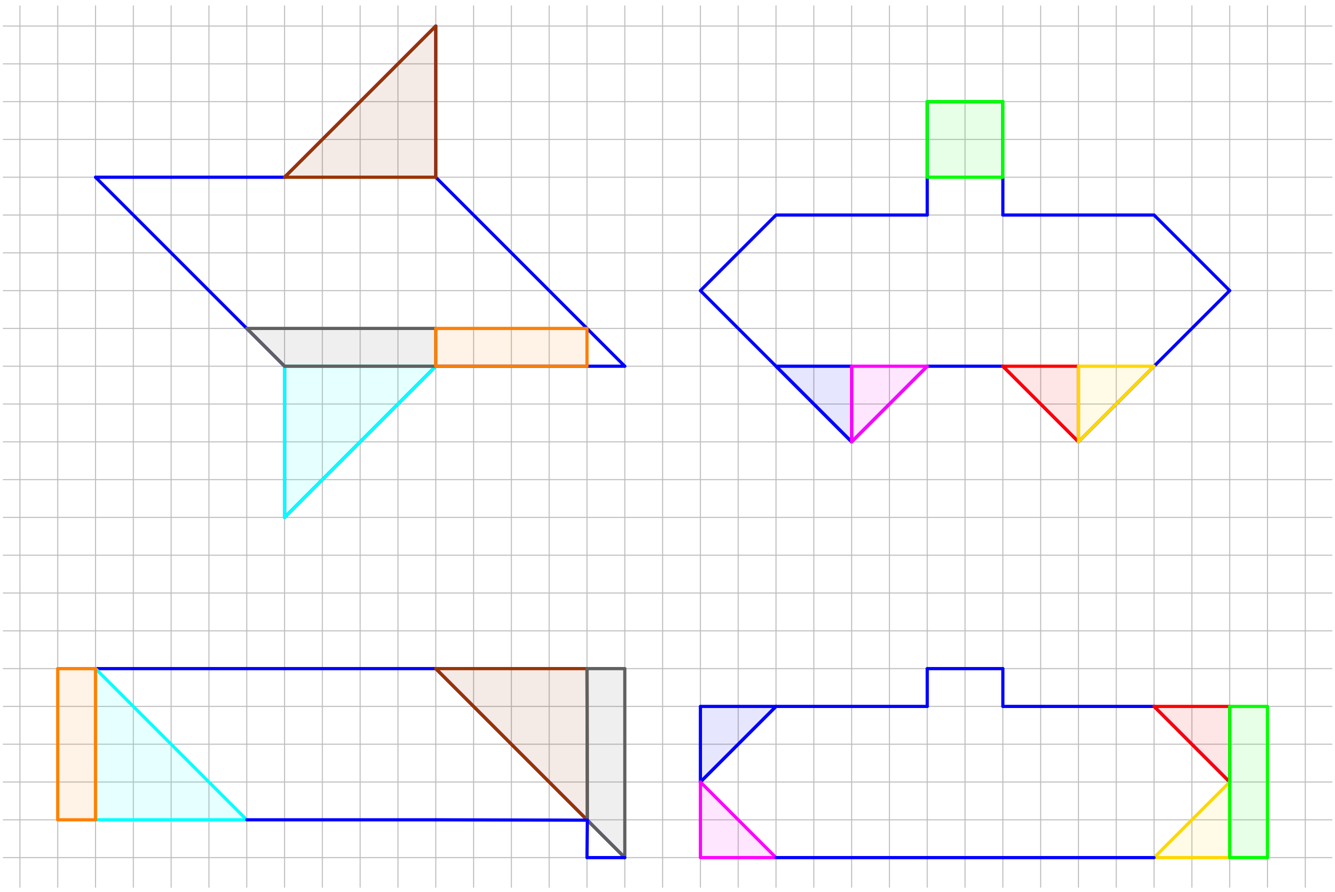
1) Comparaison de grandeurs

Exercice 1. Pour décorer leur salle de classe à l'occasion de l'automne, des enfants fabriquent des feuilles découpées dans du carton vert ou du carton jaune selon les modèles ci-dessous.



Sans calculer d'aire, déterminer quel type de feuille nécessite la plus grande quantité de carton ?

On peut découper et réorganiser les deux surfaces pour se rapprocher de rectangles superposables.



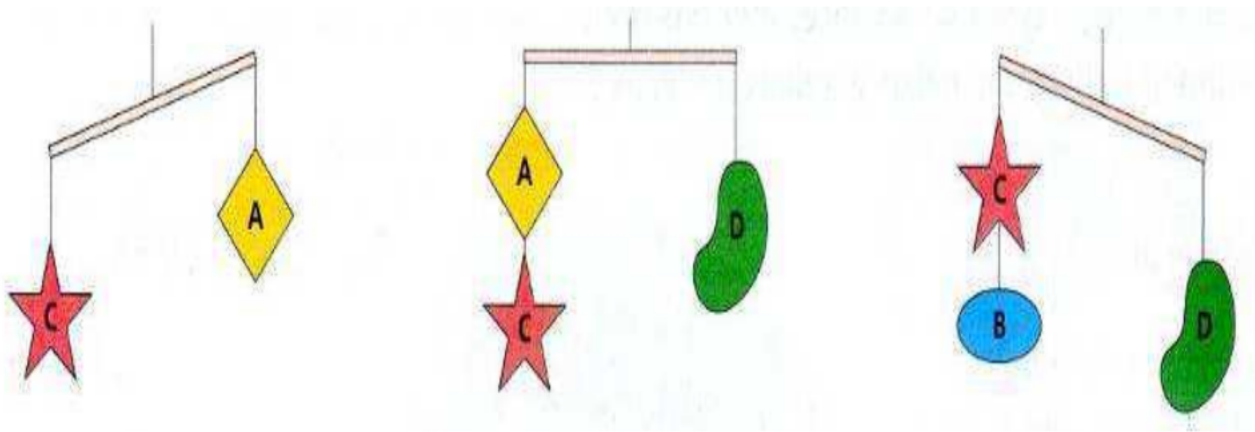
On obtient ainsi 2 rectangles identiques auxquels s'ajoutent un petit rectange deux fois plus grand pour la feuille jaune que pour la feuille verte donc la fabrication de feuille jaune nécessite plus celle de la feuille verte.

Exercice 2. On veut comparer les volumes de deux objets aux formes complexes (par exemple, des crânes d'animaux) pour lesquelles on ne dispose pas de formules permettant de les calculer.

Comment faire ?

Solution. On peut disposer le premier objet dans un récipient, recouvrir d'eau, marquer le niveau du liquide, retirer l'objet et immerger le second objet. Si le niveau d'eau dépasse la marque alors le second objet est plus volumineux, si le niveau de l'eau se trouve en dessous de la marque, le second objet est moins volumineux que le premier et si l'eau se trouve au niveau de la marque, les deux objets ont des volumes équivalents (on ne peut pas être sûr qu'ils sont exactement le même volume car la méthode n'est pas suffisamment précise).

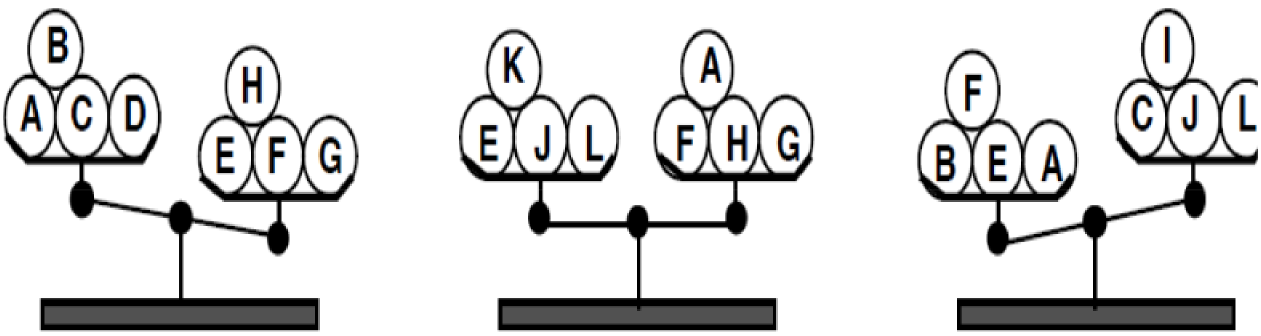
Exercice 3. À l'aide de la figure suivante, ordonner les objets A, B, C et D du plus léger au plus lourd.



Solution. La première image assure que C est plus lourd que A. La deuxième image montre que D est aussi lourd que A et C réuni donc D est plus lourd que A et plus lourd que C. Enfin, la troisième image montre que D est plus lourd que B et C réunis. Ainsi, les deux dernières images montrent que B et C ensemble sont plus légers que A et C ensemble et donc (par additivité) B est plus léger que A.

On conclut que du plus léger au plus lourd, les objets sont : B, A, C, D.

Exercice 4. On dispose de 12 boules A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K et L qui ont toutes la même masse sauf une. On a effectué les trois comparaisons suivantes :



Déterminer la boule qui n'a pas la même masse que les autres. Est-elle plus légère ou plus lourde ?

Solution. L'image du milieu montre que les 4 boules K, E, J et L ont la même masse que les 4 boules A, F, H et G. Comme, parmi les 12 boules, une seule a une masse différente, elle ne peut pas figurer parmi les 8 boules précédentes. Ainsi, la boule différente est B, C, D ou I.

D'après ce qui précède, E, F, G et H ont la même masse donc, d'après la première image, la boule cherchée figure parmi les boules B, C ou D et celle-ci est plus légère que les autres. La troisième image montre que cette boule ne peut être que B ou C et, comme on sait que cette boule est plus légère que les autres, ce ne peut être que la boule C.

Exercice 5.

1. On dispose de neuf pièces d'or identiques (forme, masse, valeur, ...) mais parmi ces neuf pièces, il y en a une qui est « fausse » : elle est moins lourde que les huit autres (mais pas suffisamment pour qu'on puisse le détecter en la soupesant).

   On dispose simplement d'une balance Roberval et d'aucune masse marquée.

   Montrer qu'en trois pesées maximum on est certain de trouver la fausse pièce.

2. Reprendre le problème précédent en supposant cette fois-ci qu'il y a 10 pièces au total et toujours une pièce fausse parmi les 10.

Solution

1. On répartit les pièces en trois groupes de 3 ; le groupe A, le groupe B et le groupe C.

   À l'aide de la balance, on compare les masses des groupes A et B.

   1er cas. Si les masses sont identiques, cela signifie que la fausse pièce se trouve dans le groupe C. On prend alors 2 pièces au hasard dans le groupe C et on les compare à l'aide de la balance. Si la balance penche d'un côté, la fausse pièce se trouve sur le plateau le plus haut et si la balance reste équilibré, la fausse pièce est la troisième pièce du groupe C.

   2ème cas. Si la balance penche d'un côté, par exemple du côté du groupe A, alors la fausse pièce se trouve dans le groupe B. On est alors ramené au cas précédent en remplaçant le groupe C par le groupe B.

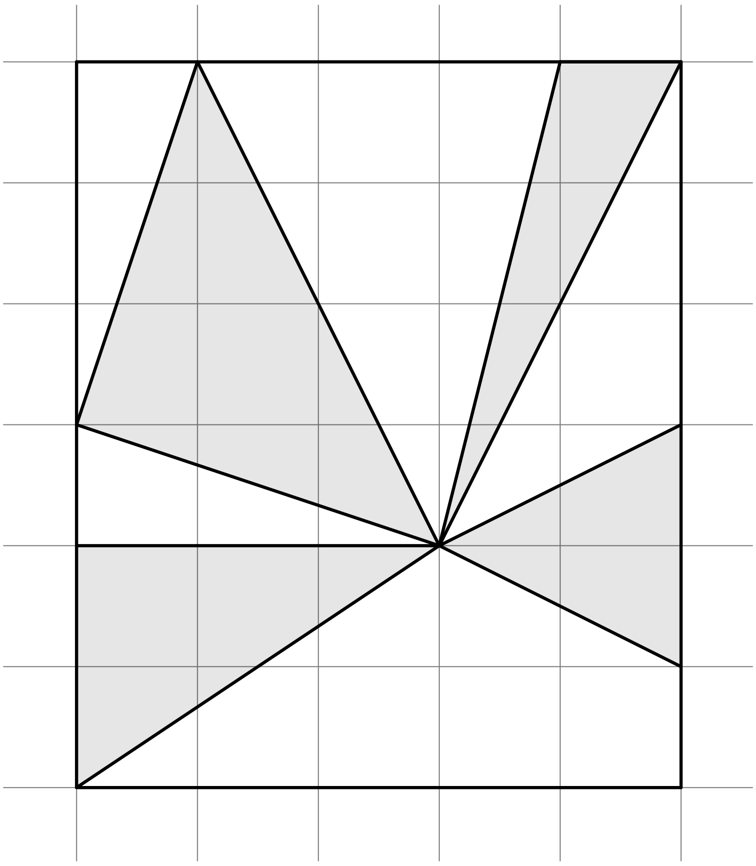
   Ainsi, on peut donc en fait en 2 pesées déterminer la fausse pièce.

2. On répartit les pièces en deux groupes de 5 et on dépose chaque groupe sur un plateau de la balance : celle-ci va pencher du côté du groupe contenant la pièce la plus légère.

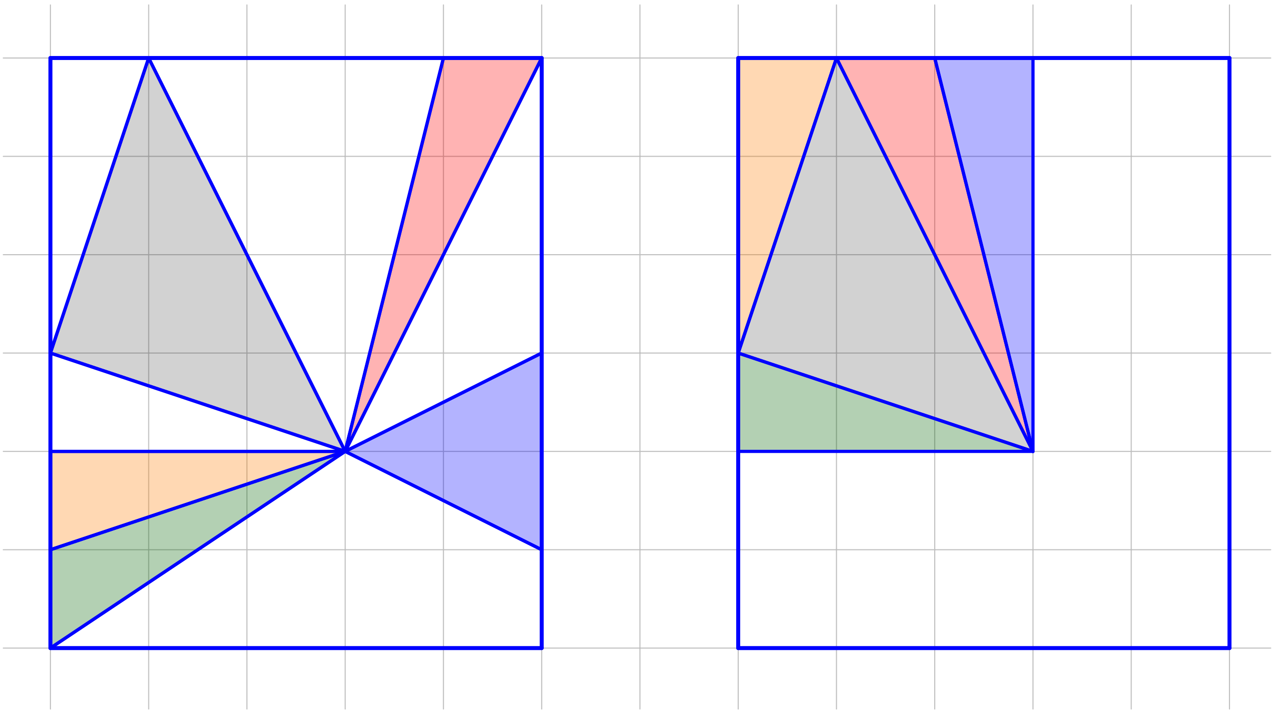
   Il reste donc 5 pièces possibles. On partage ses 5 pièces en 2 groupes de 2 plus une pièce seule. À l'aide de la balance, on compare les masses des deux groupes de 2 pièces. Si elles sont identiques, cela signifie que la pièce seule est le fausse pièce. Sinon, la balance penche du côte du groupe de 2 pièces contenant la plus légère et il n'est plus qu'à comparer les masses de ces deux pièces en en mettant une sur chaque plateau pour déterminer la plus légère.

   Ainsi, en 3 pesées maximum, on déterminer la fausse pièce.

Exercice 6. Sans calculer d'aires, déterminer la fraction du grand rectangle que représente l'aire grisée.



Solution. On voit qu'on peut réorganiser l'aire grisée pour obtenir un rectangle :



La largeur du rectangle ainsi créé représente $\frac{3}{5}$ de la largeur du rectangle de départ et sa longueur $\frac{2}{3}$ de la longueur du rectangle de départ donc l'aire grisée représente $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$ de l'aire du rectangle de départ.

2) Mesures de longueurs, d'aires et de volumes

Exercice 7. Voici quelques relations entre différentes mesures de longueurs utilisées en France au XVIIIe siècle :

- 13 toises de Paris = 8 trabucs de Nice
- 29 mètres = 9 trabucs de Nice
- 4 toises de Paris = 33 cannes de Marseille

Déterminer la valeur en mètre de chacune des unités précédentes (toise de Paris, trabuc de Nice, canne de Marseille). On donnera des valeurs arrondies au millième.

Solution. De la deuxième égalité, on déduit 1 trabuc de Nice vaut $\frac{29}{9}$ m soit environ 3,222 m.

De la première égalité, on déduit qu'une toise de Paris vaut $\frac{8}{13}$ trabucs de Nice donc $\frac{8}{13} \times \frac{29}{9} = \frac{232}{117}$ m soit environ 1,983 m.

Enfin, de la dernière égalité, on déduit qu'une canne de Marseille vaut $\frac{4}{33}$ toise de Paris donc $\frac{4}{33} \times \frac{232}{117} = \frac{928}{3861}$ m soit environ 0,240 m.

Exercice 8. Hormis le mètre carré (et ses multiples et sous-multiples), il existe d'autres unités d'aire comme l'are qui représente 100 m^2 et dont le symbole est a.

1. Sachant que le bois de Vincennes a une superficie de 995 ha et est planté de 146000, déterminer sa densité c'est-à-dire le nombre d'arbres par m^2.
2. Les dimensions d'un terrain de football pour les matches internationaux sont comprises entre 100 m et 110 m pour la longueur et entre 64 m et 75 m pour la largeur.
   Donner un encadrement de l'aire d'un tel terrain exprimée en ha.

Solution.

1. Par définition, 1 ha = 10^2 a donc 995 ha = 995×10^2 a et 1 a = 10^2 m^2 donc 995 ha = $995 \times 10^2 \times 10^2$ m^2et ainsi la superficie du bois de Vincennes est 9 950 000 m^2. Sa densité est donc $\frac{146000}{9950000} \approx 0{,}015$ arbres par m^2.
2. L'aire d'un terrain de football est comprise entre (100 m) $\times$ (64 m) = 6400 m^2 et 100 m $\times$ 75 m = 7500 m^2. Or, 100 m^2 = 1 a donc 1 m^2 = $\frac{1}{100}$ a = 10^{-2} a et 1 ha = 10^2 a donc 1 a = $\frac{1}{100}$ ha = 10^{-2} ha. Ainsi, 1 m^2 = $10^{-2} \times 10^{-2}$ ha = 10^{-4} ha. On conclut que l'aire d'un terrain de football est comprise en 6400×10^{-4} ha = 0,64 ha et 7500×10^{-4} ha = 0,75 ha.

Exercice 9 (d'après CRPE 1996)**.** Avant que n'entre en vigueur le système métrique, les capacités étaient mesurées avec des unités qui variaient selon les régions et aussi selon les matériaux considérés. Ainsi pour les liquides, le muid de Paris correspondait à 268,2 litres, tandis que le muid de Lunel utilisé dans le Languedoc correspondait à 700 litres.

1. Un vigneron languedocien qui voulait vendre 5 muids (de Lunel) de vin à Paris devait exprimer cette quantité en muids de Paris. Donner alors la valeur décimale arrondie au centième de la mesure en muids de Paris des 5 muids de Lunel.
2. Le muid avait des multiples et des sous-multiples : le setier et la pinte. Un setier valait 8 pintes et un muid valait 36 setiers. Calculer en muids, setiers et pintes de Paris la capacité d'un réservoir de forme parallélépipédique dont les dimensions, en centimètres, sont 50 pour la hauteur, 350 pour la largeur et 391,87 pour la longueur.

Solution.

1. Un muid de Paris correspondait à 268,2 L et un muid de Lunel à 700 L donc un muid de Lunel correspondait à $\frac{700}{268{,}2}$ muids de Paris. Ainsi, 5 muids de Lunel correspondait à $5 \times \frac{700}{262{,}2}$ muids de Paris c'est-à-dire environ 12,40 muids de Paris.
2. Le volume du réservoir est $(50 \text{ cm}) \times (350 \text{ cm}) \times (391{,}87 \text{ cm}) = 6857725 \text{ cm}^3$. Convertissons ce volume en L c'est-à-dire en dm^3. On sait que $1 \text{ dm}^3 = 10^3 \text{ cm}^3$ donc $1 \text{ cm}^3 = \frac{1}{10^3} \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ dm}^3$. Dès lors, le volume du réservoir est $6857725 \times 10^{-3} \text{ dm}^3 = 6857{,}725$ L. Pour finir, on sait qu"un muid de Paris correspond à 268,2 L donc 1 L correspond à $\dfrac{1}{268{,}2}$ muid de Paris. Ainsi, le volume du réservoir est $\frac{6857{,}725}{268{,}2}$ muids de Paris. Or, $6857,725 = 25 \times 268{,}2 + 152{,}725$ donc le volume est $25 + \frac{152{,}725}{268{,}2}$ muids de Paris c'est-à-dire $25 + \frac{41}{72}$ muids de Paris. Or, on sait qu'un muid est égal à 36 setiers donc $\frac{41}{72}$ de muids vaut $\frac{41}{72} \times 36 = 20{,}5$ setiers c'est à dire $20 + \frac{1}{2}$ setiers. Enfin, 1 setier est égal à 8 pintes donc $\frac{1}{2}$ setiers est égal à 4 pintes. Le volume du réservoir est donc égal à 25 muids de Paris, 20 setiers et 4 pintes.

Exercice 10. Un robinet mal fermé laisse tomber une goutte d'eau toutes les deux secondes. Si on considère que 15 gouttes représentent une capacité de 1 cL, quelle est, en cL, la capacité d'eau « gaspillée » en une minute ?

Solution. Une minute correspond à 30 périodes de 2 secondes donc 30 gouttes s'échappent du robinet en une minute. Or, $30 = 2 \times 15$ donc le volume d'eau gaspillé est 2 cL en une minute.

Exercice 11. On met des livres identiques de dimensions 20 cm × 10 cm × 1 cm dans une boite de dimensions 44 cm × 21 cm × 11 cm. On souhaite connaître le nombre maximum de livres qu'il est possible de disposer dans cette boîte.

1. Calculer, en cm^3, le volume de la boîte et le volume d'un livre.
2. En déduire un nombre théorique N de livres que l'on ne pourra pas dépasser.
3. Peut-on placer ces N livres dans la boîte ? Justifier la réponse.
4. Conclure.
5. Exprimer en pourcentage le volume de la boite non utilisé. On donnera une valeur arrondie au pourcent près.

Solution.

1. Le volume de la boîte est $44 \times 21 \times 11 \text{ cm}^3$ c'est-à-dire 10164 cm^3 et le volume d'un livre est $20 \times 10 \times 1 \text{ cm}^2$ c'està-à-dire 200 cm^3.
2. Comme $\frac{10164}{200} = 50{,}82$, on ne peut pas mettre plus de $N = 50$ livres dans la boîte.
3. On peut mettre 50 livres dans la boîte de la manière suivante :
   - on empile, à plat, 4 séries de 11 livres, soit 44 livres, ce qui laisse 4 cm sur le côté de la boîte et 1 cm dans le fond ;
   - sur le côté, on peut mettre, sur la tranche, 4 livres :
   - dans le fond, on peut mettre, sur la tranche, 2 livres.
4. Il est donc effectivement possible de placer 50 livres dans la boîte et ce nombre est donc le maximum effectif de livres qu'on peut y placer.
5. Le volume non utilisé dans la boîte est $10166 \text{ cm}^3 - 50 \times 200 \text{ cm}^3 = 164 \text{ cm}^3$ ce qui représente $\frac{164}{10164} \approx 2\%$ du volume de la boîte.

Exercice 12. On s'intéresse à la fabrication d'emballages pour des liquides sous forme de briques. On néglige l'épaisseur de la matière utilisée pour ces emballages.

1. Une des faces rectangulaires d'une brique de 1 litre de lait a pour dimensions 19 cm et 9,4 cm. Calculer, en cm, la troisième dimension de la brique et en donner une valeur approchée par excès au millimètre près.

2. **a.** La hauteur d'une brique à base carrée de 1 litre de jus d'orange mesure 20 cm. Calculer, en cm, la longueur du côté du carré. En donner une valeur approchée par excès au millimètre près.

b. On souhaite modifier la hauteur de la brique précédente de telle sorte qu'elle contienne 20% de jus d'orange en plus tout en gardant la même base carrée. Déterminer, en cm, la nouvelle hauteur.

3. On considère les briques de volume 1 dm^3 dont les mesures en centimètre des arêtes sont des entiers supérieurs à 3.

Déterminer, en justifiant sa réponse, toutes les possibilités.

Solution.

1. On sait que 1 L correspond à 1 dm^3 c'est-à-dire 10^3 cm^3 donc on cherche h tel que $19 \times 9{,}4 \times h = 1000$ c'est-à-dire $h = \frac{1000}{19 \times 9{,}4} \approx 5{,}6$. Ainsi, le troisième dimension de la brique est environ 5,6 cm.

2. **a.** On cherche c tel que $20 \times c^2 = 1000$ c'est-à-dire $c = \sqrt{\frac{1000}{20}} = \sqrt{50} \approx 7{,}1$. Ainsi, le côté du carré est environ 7,1 cm.

b. On veut que la brique contient $1 \text{ L} + \frac{20}{100} \times 1 \text{ L} = 1{,}2 \text{ L} = 1200 \text{ cm}^3$. On cherche donc h tel que $h \times \sqrt{50}^2 = 1200$ c'est-à-dire $h = \frac{1200}{50} = 24$. Ainsi, la hauteur de la brique doit être de 24 cm.

3. Notons a, b et c les côtés, en cm, de la brique avec $3 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$. Alors, $abc = 1000$. Notons que $abc \leqslant c^3$ donc $a^3 \leqslant 1000$ c'est-à-dire que $a \leqslant 10$. Comme a est un diviseur de 1000 inférieur à 10, a vaut 4, 5, 8 ou 10.

- si $a = 4$ alors $bc = 250$ donc b est un diviseur de 250 et $b^2 \leqslant 250$ c'est-à-dire $b \leqslant \sqrt{250} \approx 15{,}8$ donc b vaut 5 ou 10. Si $b = 5$ alors $c = 50$ et si $b = 10$ alors $c = 25$.
- si $a = 5$ alors $bc = 200$ donc b est un diviseur de 200 et $b^2 \leqslant 200$ c'est-à-dire $b \leqslant \sqrt{200} \approx 14{,}1$ donc b vaut 5, 8 ou 10. Si $b = 5$ alors $c = 40$, si $b = 8$ alors $c = 25$ et si $b = 10$ alors $c = 20$.
- si $a = 8$ alors $bc =$ donc b est un diviseur de 125 et $b^2 \leqslant 125$ c'est-à-dire $b \leqslant \sqrt{125} \approx 11{,}2$. Or, 125 n'a pas de diviseur compris entre 8 et 11 donc ce cas n'est pas possible.
- si $a = 10$ alors $bc = 100$ donc b est un diviseur de 100 et $b^2 \leqslant 100$ c'est-à-dire $b \leqslant \sqrt{100} = 10$ donc $b = 10$ et $c = 10$.

Finalement, les dimensions possibles, en cm, sont $4 \times 5 \times 50$, $4 \times 10 \times 25$, $5 \times 5 \times 40$, $5 \times 8 \times 25$, $5 \times 10 \times 20$ et $10 \times 10 \times 10$.

Exercice 13. Des petites briques de jus d'orange d'une contenance de 20cL ont la forme de pavés droits dont la base a pour dimensions 4 cm et 6 cm.

1. Calculer la hauteur h d'une de ces briques. On donnera une valeur arrondie de h à 1 mm près par excès.

2. Un magasin propose ces briques au prix de 2,89 € le lot de six.

Calculer le prix d'un litre de jus d'orange, arrondi au centime.

3. Lors d'une opération promotionnelle, le magasin propose deux options :
   - option A : une remise de 30% sur le prix d'un lot ;
   - option B : le prix du lot reste inchangé mais avec deux briques « gratuites » en plus.

   Quelle option donne le prix au litre le moins élevé ? Justifier la réponse.

Solution.

1. La volume d'une brique est 20 cL c'est-à-dire $\frac{20}{100}$ L soit 0,2 L. Or, 1 L correspond à 1 dm^3 soit encore 1000 cm^3 donc le volume d'une brique est $0{,}2 \times 1000$ cm^3 c'est-à-dire 200 cm^3. Ainsi, on cherche $4 \times 6 \times h = 200$ donc $h = \frac{200}{24} \approx 8{,}4$. La hauteur de la brique est donc d'environ 8,4 cm.
2. 1 L correspond à 5 fois 20 cL donc à 5 briques. Or, une brique coûte $\frac{2{,}89}{6}$ € donc le prix d'un litre de jus d'orange est $5 \times \frac{2{,}89}{6}$ € soit environ 2,41 €.
3. Avec l'option A, le prix, en euro, d'un lot est $2{,}89 - \frac{30}{100} \times 2{,}89 = 2{,}023$ donc le prix, en euro, d'un litre de jus d'orange est $5 \times \frac{2{,}023}{6} \approx 1{,}69$.
   Avec l'option B, un lot contient 8 briques donc le prix d'un litre, en euro, est $5 \times \frac{2{,}89}{8} \approx 1{,}81$.
   Ainsi, l'option A est plus intéressante.

3) Mesures de temps

Exercice 14 (D'après CRPE – 2004 – Groupement 4)**.**

1. Convertir les durées suivantes en secondes :
   a. deux tiers d'heure ;
   b. 1,2 heure.
2. Convertir en heures les durées suivantes :
   a. 10 h 35 min 18 s ;
   b. 32 min 7 s.
3. Convertir les durées suivantes en heures, minutes et secondes :
   a. 5532 secondes ;
   b. 1,87 heure ;
   c. 8,25 heures.

Solution.

1. **a.** Une heure correspond à 3600 secondes sont deux tiers d'heures correspondent à $\frac{2}{3} \times 3600$ s $= 2400$ s.
   b. De même, 1,2 h $= 1{,}2 \times 3600$ s $= 4320$ s.
2. **a.** Un heure correspond à 60 minutes et à 3600 secondes donc 1 minute correspond à $\frac{1}{60}$ heure et un seconde à $\frac{1}{3600}$ heure. Ainsi, 10 h 35 min 18 s correspond à $18 + 35 \times \frac{1}{60} + 18 \times \frac{1}{3600}$ h c'est-à-dire $\frac{6353}{3600}$ h soit environ 10,59 h.
   b. De même, 32 min 7 s correspond à $\frac{36}{60} + \frac{7}{3600}$ h $= \frac{1927}{3600}$ h soit environ 0,54 h.
3. **a.** Pour obtenir le nombre d'heures, on divise 5532 par 3600 : $5532 = 1 \times 3600 + 1932$. Ensuite, pour obtenir les minutes (et les secondes), on divise 1932 par 60 : $1932 = 32 \times 60 + 12$ donc 5532 secondes correspondent à 1 h 32 min 12 s.
   b. 1,87 h $= 1$ h $+ 0{,}87$ h. Or, $0{,}87h = 0{,}87 \times 60$ min $= 52{,}2$ min $= 52$ min $+ 0,$ min et 0,2 min $= 0{,}2 \times 60$ s $= 12$ s. Ainsi, 1,87 heures correspond à 1 h 52 min 12 s.

c. $8{,}25$ h $= 8$ h $+ 0{,}25$ h et $0{,}25$ h $= 0{,}25 \times 60$ min $= 15$ min donc $8{,}25$ heures correspondent à 8 h 15 min.

Exercice 15 (D'après CRPE – 2004 – Groupement 4)**.** On considère une montre à aiguilles. On rappelle que la petite aiguille indique les heures et fait le tour du cadran en 12 heures et la grande aiguille indique les minutes et fait le tour du cadran en 1 heure.

1. Quelle durée faut-il à la grande aiguille pour parcourir un angle de 54° ?
2. Depuis midi, la petit aiguille a parcouru un angle de 68°. Quelle heure est-il ?

Solution.

1. La grande aiguille met 60 min pour parcourir 360° donc le temps nécessaire pour qu'elle parcourt 54° est $\frac{54}{360} \times 60\text{min} = 9$ min.
2. La petite aiguille met 12 heures pour parcourir 360° donc le temps nécessaire pour qu'elle parcourt 68° est $\frac{68}{360} \times 12 \text{ h} = \frac{34}{15} \text{ h} = 2 + \frac{4}{15}$ h. Or, $\frac{4}{15}$ h $= \frac{4}{15} \times 60$ min $= 16$ min donc la petite aiguille met 2 h 16 min pour parcourir 68°. Ainsi, il est 14 heures 16 minutes.

Exercice 16 (D'après CRPE – 2004 – Groupement 4)**.** Un voyageur part de Paris à 23h00 pour Rio de Janeiro. Son avion se pose à Houston à 03h00 (heure locale) pour une escale d'une heure. Le vol entre Houston et Rio de Janeiro dure 10 heures. Houston est à l'ouest de Paris et il y a 7 heures de décalage horaire entre ces deux villes. Rio de Janeiro est à l'est de Houston et il y a 3 heures de décalage horaire entre ces deux villes.

1. Quelle est la durée du voyage entre Paris et Houston ?
2. À quelle heure (heure locale) le voyageur arrive-t-il à Rio de Janeiro ?

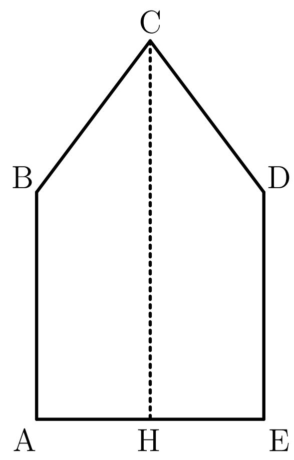
Solution.

1. Lorsqu'il est 3 h à Houston, il est 7 h de plus à Paris, c'est-à-dire 10h, donc le vol a duré 11 h entre Paris et Houston.
2. Le vol pour Rio de Janeiro part à 4 h (heure de Houston) et dure 10 h donc l'avion atterrit à 14 h (heure de Houston). Or, il y a 3 h de décalage donc le voyageur arrive à Rio de Janeiro à 17 h (heure locale).

Exercice 17. La table traçante automatisée d'un architecte réalise un tracé rectiligne de 10 centimètres de longueur en 2,8 secondes, quelle que soit la direction.

Dans les quatre premières questions, on négligera le temps nécessaire à un changement de direction.

1. Quelle est la durée nécessaire à l'impression d'un segment de droite de 28 centimètres de longueur ?
2. Quelle est la longueur d'un segment de droite imprimé en 3,5 secondes ?
3. La durée d'impression des quatre côtés d'un rectangle est 6,3 secondes. Quelles peuvent être les dimensions de ce rectangle ? Proposer deux réponses possibles. Justifier.
4. Calculer la durée nécessaire à l'impression d'un carré dont la diagonale a pour longueur 6 centimètres. On donnera une valeur approchée au dixième de seconde près.
5. En réalité, le temps nécessaire à un changement de direction est d'un dixième de seconde. Calculer la durée nécessaire à la réalisation du tracé de la figure suivante ABCDEA sachant que AB = AE = DE = 6 cm, CH = 10 cm, H est le milieu de [AE] et (AB), (CH) et (ED) sont perpendiculaires à (AE).



Solution.

1. Le tracé d'un segment de 28 cm de long nécessite $\frac{28}{10} \times 2$, $s = 7{,}84$ s.
2. Un segment nécessitant 3,5 s pour être tracé mesure $\frac{3{,}5}{2{,}8} \times 10$ cm $= 12{,}5$ cm.
3. Le périmètre du rectangle est $\frac{6{,}3}{2{,}8} \times 10$ cm $= 22{,}5$ cm. Ainsi, en notant L et ℓ respectivement la longueur et la largeur du rectangle en cm, on a $2(L+\ell) = 22{,}5$ donc $L + \ell = 11{,}25$. Il y a une infinité de possibilités. Par exemple, si $L = 10$ alors $\ell = 1{,}25$ et si $L = 9$ alors $\ell = 2{,}25$.
4. Notons c la longueur du côté du carré en cm. Alors, grâce au théorème de Pythagore, $c^2 + c^2 = 6^2$ donc $2c^2 = 36$ c'est-à-dire $c^2 = 18$. Ainsi, $c = \sqrt{18}$ donc le périmètre du carré est $4\sqrt{18}$ cm et le temps nécessaire pour le tracer est $\frac{4\sqrt{18}}{10} \times 2{,}8$ s $\approx 4{,}8$ s.
5. Notons K le milieu de [BD]. Comme ABDE possède deux côtés opposés parallèles et de même longueur, c'est un parallélogramme. De plus, il possède un angle droit donc ABDE est un rectangle. Enfin, il possède deux côtés consécutifs de même longueur donc ABDE est un carré. Comme (CH) est perpendiculaire à (AE) et comme H est le milieu de [AE], (CH) est la médiatrice de [AE]. Dès lors, comme ABDE est un carré, (CH) est également la médiatrice de [BD]. Ainsi, (BD) et (CH) se coupent au milieu K de [BD]. On a donc BK $= 3$ cm et CK $= 4$ cm. Grâce au théorème de Pythagore appliqué dans le triangle BKC rectangle en K, on en déduit que BC^2 cm$^2 = 3^2 + 4^2$ cm$^2 = 25$ cm^2 donc BC $= 5$ cm. De même, on a BC $= 5$ cm. Ainsi, le périmètre total de la figure est $3 \times 6 + 2 \times 5 = 28$ cm. On déduit de la question **1.** que le tracé des segments prend 7,84 s. À cela s'ajoutent 4 changements de direction donc le temps nécessaire pour tracer la figure est $7{,}84$ s $+ 4 \times 0{,}1$ s $= 8{,}24$ s.

Exercice 18. Sachant qu'un jour dure 24 h et qu'il est midi pile, quelle heure sera-t-il dans 411,2 h ?

Comme $411{,}2 = 17 \times 24 + 3{,}2$, 411,2 représentent 17 jours et 3,2 heures. Or, 0,2 h $= 0{,}2 \times 60$ min $= 12$ min donc 411,2 heures représentent 17 jours, 3 heures et 12 minutes. Ainsi, sachant qu'il est midi, dans 411,2 heures, il sera 15h12.

4) Mesures de masses

Hormis le kg (et ses multiples et sous-multiples), il existe d'autres mesures de masse comme le quintal qui représente 100 kg et la tonne qui représente 1000 kg.

Exercice 19. Les affirmations suivantes sont-elles vraie ou fausses ?

1. Un million de milligrammes représente 1 kilogramme.

2. Un décagramme représente 10 décigrammes.
3. Un décagramme représente 100 décigrammes.
4. Une tonne représente 10 quintaux.
5. Un quintal représente 0,1 tonne.
6. Un décigramme représente 10 milligrammes.
7. Un milligramme représente 0,1 décigramme.

1. Un million de milligrammes représentent $10^6 \times 10^{-3}$ g $= 10^{6-3}$ g $= 10^3$ g $= 1$ kg. VRAI.
2. Un décagramme représente 10 g $= 10 \times 10$ dg $= 100$ dg. FAUX.
3. VRAI d'après le calcul précédent.
4. Un tonne représente 1000 kg $= 10 \times 100$kg c'est-à-dire 10 quintaux. VRAI.
5. Une tonne représente 10 quintaux donc 1 quintal représente $\frac{1}{10}$ tonne c'est-à-dire 0,1 tonne. VRAI.
6. Un décigramme représente 10^{-1} g $= 10^{-1} \times 10^2$ mg $= 10^{-1+2}$ mg $= 10$ mg. VRAI.
7. Un décigramme représente 10 milligramme donc 1 milligramme représente $\frac{1}{10} = 0{,}1$ décigramme. VRAI.

Exercice 20. Un camion peut emporter 6 tonnes de marchandises. Son chargement comprend 40 caisses de 52,5 kg chacune, 32 caisses de 25 kg et 10 caisses de 99 kg.

Quelle masse, en quintal, peut-on encore charger dans ce camion ?

Solution. Le chargement représente $40 \times 52{,}5 + 32 \times 25 + 10 \times 99$ kg $= 3890$ kg. Or, le camion peut transporter 6 tonnes c'est-à-dire 6000 kg donc on peut encore charger $6000 - 3890$ kg $=$ 2110kg c'est-à-dire $21{,}1 \times 100$ kg soit 21,1 quintaux.

Exercice 21. Un jardinier a récolté deux quintaux trois quarts de pommes. Il vend un quintal un quart à un voisin, $\frac{7}{10}$ de quintal sur le marché du village et $\frac{2}{5}$ de quintal à un pâtissier.

Combien de kg de pommes reste-t-il au jardinier ?

Solution. Le jardinier a vendu $1 + \frac{1}{4} + \frac{7}{10} + \frac{2}{5} = \frac{47}{20}$ quintaux de pommes donc il lui reste $2 + \frac{3}{4} - \frac{47}{20} = \frac{2}{5}$ de quintal. Or, 1 quintal représente 100 kg donc $\frac{2}{5}$ de quintal représente $\frac{2}{5} \times 100 = 40$ kg. Ainsi, il est 40 kg de pommes au jardinier.

Exercice 22. La masse volumique d'un objet (homogène) est égale au rapport de sa masse par son volume.

Voici les masses volumiques de différentes essences de bois : le bois d'Azobé a une masse volumique de 0,86 g/cm^3, le bois de Pin a une masse volumique de 0,55 g/cm^3 et le bois de Charme a une masse volumique de 0,75 g/cm^3.

1. On appelle C un cube en bois de 5 cm d'arête ayant une masse de 107,5 g. Ce cube est-il en bois d'Azobé ou en bois de Pin ?
2. Indiquer comment retrouver la réponse à la question 1) en calculant d'abord la masse d'un cube de même volume en bois de Charme.
3. **a.** Si on triple l'arête du cube C, la masse triple-t-elle ?
   b. Si on augmente de 3 cm l'arête du cube C, de combien augmente la masse ?
4. **a.** À partir de copeaux de bois, on fabrique des plaques en aggloméré contenant 20% d'Azobé, 40% de Pin et 40% de Charme. Calculer la masse volumique en g/cm^3 de cet aggloméré.

b. Ces plaques ont une forme rectangulaire de 1,8 m par 0,6 m, avec une épaisseur égale à 2 cm. Calculer alors la masse, en gramme, d'une telle plaque.

Solution.

1. Le volume du cube C est $(5 \text{ cm})^3 = 125 \text{ cm}^3$ donc sa masse volumique est $\frac{107{,}5 \text{ g}}{125 \text{ cm}^3} = 0{,}86\text{g/cm}^3$. Ainsi, le cube C est en bois d'Azobé.
2. La masse d'un cube de 5 cm d'arête en Charme est $125 \text{ cm}^3 \times 0{,}75 \text{ g/cm}^3 = 97{,}75$ g. Ainsi, ce cube est plus léger que C donc le bois composant C a une masse volumique supérieure à celle du Charme : il s'agit donc du bois d'Azobé.
3. **a.** Si on triple l'arête de C, on obtient un cube de côté 15 cm et donc de volume $(15 \text{ cm})^3 = 3375 \text{ cm}^3$. Ainsi, la masse du nouveau cube est $3375 \text{ cm}^3 \times 0{,}86 \text{ g/cm}^3 = 2902{,}5$ g. Ainsi, la masse n'a pas été multipliée par 3 mais par $27 = 3^3$.

   b. Si on augmente le côté de C de 3 cm, on obtient un cube de côté 8 cm donc de volume $(8 \text{ cm})^3 = 512 \text{ cm}^3$. Ainsi, la masse du nouveau cube est $512 \text{ cm}^3 \times 0{,}86 \text{ g/cm}^3 = 440{,}32$ g.
4. **a.** La masse volumique de l'aggloméré est $\frac{20}{100} \times 0{,}86 + \frac{40}{100} \times 0{,}55 + \frac{40}{100} \times 0{,}75 \text{ g/cm}^3 = 0{,}692 \text{ g/cm}^3$.

   b. Le volume d'une plaque est $(180 \text{ cm}) \times (60 \text{ cm}) \times (2 \text{ cm}) = 21600 \text{ cm}^3$ donc sa masse est $21600 \text{ cm}^3 \times 0{,}692 \text{ g/cm}^3 = 14947{,}2$ g.

5) Mesures d'angles

Exercice 23.

1. Exprimer en degrés seulement les angles suivants :
   a. $120° \ 24' \ 13''$;
   b. $2645'$;
   c. $20° \ 7' \ 55''$.
2. Exprimer en degrés, minutes et secondes les angles suivants :
   a. $12{,}4°$;
   b. $345{,}25°$;
   c. $210{,}205°$.

Solution.

1. **a.** $120°24'13'' = \left(120 + \frac{24}{60} + \frac{13}{3600}\right)^\circ = \frac{433453}{3600}^\circ$ soit environ $120{,}4°$.

   b. $2645' = \frac{2645}{60}^\circ$ soit environ $44{,}2°$.

   c. $20°7'55'' = \left(20 + \frac{7}{60} + \frac{55}{3600}\right)^\circ = \frac{2899}{144}^\circ$ soit environ $20{,}1°$.
2. **a.** $12{,}4° = 12° + 0{,}4°$ et $0{,}4° = 0{,}4 \times 60' = 24'$ donc $12{,}4° = 12°24'$.

   b. $345,25° = 345° + 0{,}25°$ et $0{,}25° = 0{,}25 \times 60' = 15'$ donc $345{,}25° = 345°15'$.

   c. $210{,}205° = 210° + 0{,}205°$, $0{,}205° = 0{,}205 \times 60' = 12{,}3' = 12' + 0{,}3'$ et $0{,}3' = 0{,}3 \times 60'' = 18''$ donc $210{,}205° = 210°12'18''$.

Exercice 24. Il existe une autre unité de mesure des angles appelés le radian dont le symbole est rad. Une unité de longueur étant choisie, par définition, étant donné un cercle de centre O et de rayon 1 unité, 1 radian est une mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ où A et B sont deux points du cercle tels que l'arc $\overset{\frown}{AB}$ mesure 1 unité de longueur.

1. Si un angle mesure 1 rad, quelle est sa mesure en degrés ?

2. Quelle est la mesure en radians d'un angle plein, d'un angle plat et d'un angle droit ?

Solution.

1. La mesure du périmètre du cercle de rayon 1 est 2π donc $360°$ correspond à 2π rad et ainsi 1 rad correspond à $\frac{360}{2\pi}°$.

2. À l'inverse, $1°$ correspond à $\frac{2\pi}{360}$ rad donc un angle plein correspond à 2π rad, un angle plat correspond à $180 \times \frac{2\pi}{360}$ rad $= \pi$ rad et un angle droit correspond à $90 \times \frac{2\pi}{360}$ rad $= \frac{\pi}{2}$ rad.

6) Autres unités de mesure

Exercice 25. Deux cyclistes font une course consistant en un aller-retour entre deux villes A et B. On appelle d la distance entre ces deux villes.

Le premier cycliste fait le trajet de A à B avec une vitesse constante v mais, dans la ville B, son vélo subit une avarie qui le contraint à revenir de B en A à une vitesse constante w très réduite.

Quant au seconde cycliste, il part de A en même temps que le premier et il effectue les deux trajets de A à B puis de B à A avec la même vitesse constante x nettement inférieure à v, mais la malchance de son compagnon lui permet de terminer la course en A en même temps que lui.

On suppose que, une fois arrivée dans la ville B, les deux cyclistes n'ont pas fait d'arrêt et sont repartis immédiatement vers la ville A.

1. Dans cette question, on suppose que $d = 20$ km, $v = 40$ km/h et $w = 10$ km/h.

a. Combien de temps ont duré les deux trajets aller et retour du premier cycliste ?

b. Quelle était la vitesse x du second cycliste ?

2. De manière générale, exprimer x en fonction de d, v et w.

Solution.

1. a. Entre A et B, le cycliste met $\frac{20 \text{ km}}{40\text{km/h}} = 0{,}5$ h et, entre B et A, il met $\frac{20 \text{ km}}{10\text{km/h}} = 2$ h. Ainsi, son temps de trajet total est 2,5 h.

b. Ainsi, le second cycliste a mis 2,5 h à la vitesse x pour parcourir les 40 km aller-retour donc $x = \frac{40 \text{ km}}{2{,}5 \text{ h}} = 16$ km/h.

2. De manière générale, le temps de trajet du premier cycliste est $\frac{d}{v} + \frac{d}{w}$ donc $x = \frac{2d}{\frac{d}{v}+\frac{d}{w}}$. On peut remarquer que

$$x = \frac{2d}{\frac{dw+dv}{vw}} = 2d \times \frac{vw}{d(v+w)} = \frac{2vw}{v+w}.$$

Remarque. Ce nombre s'appelle la moyenne harmonique de v et w.

Exercice 26.

1. Exprimer en km/h une vitesse de 732 m/s.

2. Exprimer en m/s une vitesse de 133 km/h.

Solution.

1. Comme 1 m $= 10^{-3}$ km et 1 s $= \frac{1}{3600}$ h, 732 m/s $= 732 \times \frac{10^{-3}}{\frac{1}{3600}}$ km/h $= 2635{,}2$ km/h.

2. Inversement, 133 km/h $= 133 \times \frac{1000}{3600}$ m/s $= \frac{665}{18}$ m/s soit environ 36,94 m/s.

Exercice 27. Avant d'être mesurées par des puissances de 10 d'octets (ko, Mo, Go, etc), les données informatiques étaient mesurées en puissances de 2 d'octets. Pendant longtemps, un kilooctet a désigné 2^{10} octets, un mégaoctet a désigné 2^{20} octets, un gigaoctet a désigné 2^{30} octets et ainsi de suite. Cependant, cette tradition propre au domaine de l'informatique entrait en conflit avec les normes internationales (selon lesquelles 1 kilo correspond à 10^3, un méga à 10^6, etc). Ainsi, en 1988, la Commission électrotechnique internationale a normalisé les unités en introduisant des préfixes spécifiques pour les puissances de 2. Ainsi, sont apparus les termes *kilo binaire*, *méga binaire*, *giga binaire*, *téra binaire* et *péta binaire* abrégé en kibi, mébi, gibi, tébi et pébi. On a alors le tableau suivant :

unité	kibioctet (Kio)	mébioctet (Mio)	gibioctet (Gio)	tébioctet (Tio)	pébioctet (Pio)
en octets	2^{10}	2^{20}	2^{30}	2^{40}	2^{50}

1. Les premières disquettes 3'½ construites par Sony avaient une capacité de 400 Kio. Déterminer la capacité en ko d'une telle disquette.
2. Un disque dur S-ATA Hitachi de fin 2005 avait une capacité de stockage de 76,688 Gio. Convertir cette capacité en Go.

Solution.

1. Comme 400 Kio correspond à $400 \times 2^{10} = 409\,600$ octets, la capacité en ko des premières disquettes de Sony était d'environ 410 ko.
2. Comme 76,688 Gio correspond à $76{,}688 \times 2^{30} \approx 82{,}3 \times 10^9$ octets, un disque dur S-ATA Hitachi de fin 2005 avait une capacité de stockage d'environ 82,3 Go.

Exercice 28. Justifier que le Newton, l'unité de mesure du poids, s'exprime à l'aide des unités de temps, de masse et de longueur.

Solution. Le poids en Newton est défini comme le produit de la masse exprimée en kg par l'accélération de pesanteur exprimée en $\mathrm{m/s^2}$ donc 1 Newton vaut 1 $\mathrm{kg} \times \mathrm{m/s^2}$.