♦ Corrigés des exercices du chapitre 3

1) Nombres entiers

Exercice 1. Les nombres suivants sont-ils entiers ?

$$A = \frac{2023}{2} \qquad B = \frac{91}{7} \qquad C = \sqrt{16} - \sqrt{25} \qquad D = 1 + \sqrt{2}.$$

Solution. Comme 2023 est impair, $A \notin \mathbb{Z}$. Sachant que $\frac{91}{7} = 13$ et $\sqrt{16} - \sqrt{25} = 4 - 5 = -1$, B et C sont des entiers. Enfin, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ car $1 < \sqrt{2} < 2$ donc $D \notin \mathbb{Z}$.

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant sa réponse.

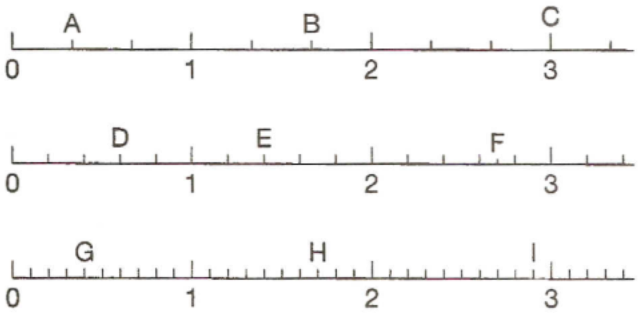
1. Le produit de deux entiers relatifs est un entier naturel.
2. La différence de deux entiers naturels est un entier naturel
3. Le quotient de deux entiers relatifs non nuls est un entier relatif.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-n \in \mathbb{N}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$.

Solution.

1. FAUX. Par exemple, 1 et -2 sont des entiers relatifs mais $1 \times (-2) = -2$ n'est pas un entier naturel.
2. FAUX. Par exemple, 1 et 2 sont des entiers naturels mais $1 - 2 = -1$ n'est pas un entier naturel.
3. FAUX. Par exemple, 1 et 2 sont des entiers relatifs non nuls mais $\frac{1}{2}$ n'est pas un entier relatif.
4. FAUX. Par exemple, $1 \in \mathbb{N}$ et $-1 \notin \mathbb{N}$.
5. FAUX. Par exemple, $4 \in \mathbb{N}$ et $\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{N}$.

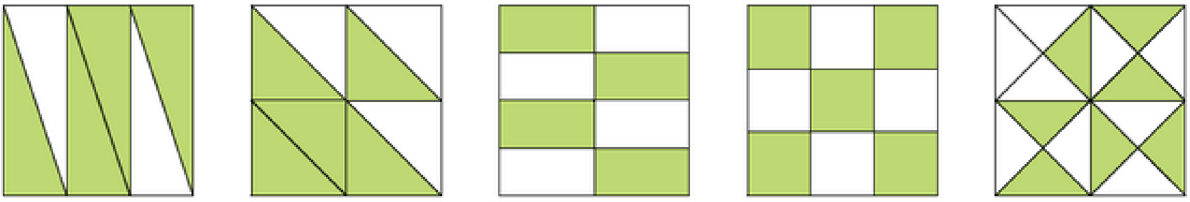
2) Fractions et nombres rationnels

Exercice 3. Sur la figure ci-contre, on considère des demi-droites graduées de façon régulière.
Déterminer les fractions associées aux points A, B, C, D, E, F, G, H et I.



Solution. A est associé à $\frac{1}{3}$, B est associé à $\frac{5}{3}$, C est associé à $\frac{3}{1} = 3$, D est associé à $\frac{3}{5}$, E est associé à $\frac{7}{5}$, F est associé à $\frac{27}{10}$, G est associé à $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, H est associé à $\frac{17}{10}$ et I est associé à $\frac{29}{10}$.

Exercice 4. Dans chaque cas, quelle fraction du carré représente la surface colorée ?



Solution. Dans le premier cas, chaque triangle correspond à $\frac{1}{6}$ du carré donc l'aire colorée représente $\dfrac{4}{6}$ du carré. On peut aussi remarquer qu'en assemblant le triangle tout à gauche et le triangle tout à droite, on obtient un rectangle représentant $\dfrac{1}{3}$ du carré et ainsi l'aire colorée représente $\dfrac{2}{3}$ du carré.

Dans le deuxième cas, chaque triangle représente $\dfrac{1}{8}$ du carré donc l'aire colorée représente $\dfrac{5}{8}$ du carré.

Dans le troisième cas, chaque rectangle représente $\dfrac{1}{8}$ du carré donc l'aire colorée représente $\dfrac{4}{8}$ du carré. On peut aussi remarquer qu'en rassemblant les rectangles on obtient un grand rectangle recouvrant la moitié du carré donc l'aire colorée représenté $\dfrac{1}{2}$ du carré.

Dans le quatrième cas, chaque petit carré représente $\dfrac{1}{9}$ du carré donc l'aire colorée représente $\dfrac{5}{9}$ du carré.

Dans le dernier cas, chaque triangle représente $\dfrac{1}{16}$ du carré donc l'aire colorée représente $\dfrac{7}{16}$ du carré.

Exercice 5. Sans utiliser la calculatrice, montrer que les fractions $\frac{203242}{23535}$ et $\frac{65311}{7432}$ ne sont pas égales.

Solution. Pour montrer que les fractions ne sont pas égales, il suffit de montrer que les produits croisés ne sont pas égaux. Or, le chiffre des unités de 203242×7432 est 4 alors que le chiffre des unités de 23535×65311 est 5 donc ces produits ne sont pas égaux et ainsi les fractions ne sont pas égales.

Exercice 6. Sans utiliser la calculatrice, écrire sous forme de fractions irréductibles

$$A = \frac{5+3}{5+7} \quad B = \frac{3}{4} - \frac{2}{7} \quad C = \frac{9}{4} \times \frac{10}{21} \quad D = \frac{\frac{15}{14}}{\frac{3}{4}} \quad E = \frac{2}{3} - \frac{7}{3} \times \frac{9}{21} \quad F = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{2}.$$

Solution. $A = \dfrac{5+3}{5+7} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{4 \times 2}{4 \times 3} = \dfrac{2}{3}$

$B = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{7} = \dfrac{3 \times 7}{4 \times 7} - \dfrac{1 \times 4}{7 \times 4} = \dfrac{21}{28} - \dfrac{4}{28} = \dfrac{21-4}{28} = \dfrac{17}{28}$

$C = \dfrac{9}{4} \times \dfrac{10}{21} = \dfrac{3 \times 3}{2 \times 2} \times \dfrac{2 \times 5}{3 \times 7} = \dfrac{3 \times 5}{2 \times 7} = \dfrac{15}{14}$

$D = \dfrac{\frac{15}{14}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{15}{14} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{3 \times 5}{2 \times 7} \times \dfrac{2 \times 2}{3 \times 1} = \dfrac{5 \times 2}{7 \times 1} = \dfrac{10}{7}$

$E = \dfrac{2}{3} - \dfrac{7}{3} \times \dfrac{9}{21} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{7 \times 1}{3 \times 1} \times \dfrac{3 \times 3}{3 \times 7} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{3} = \dfrac{2-3}{3} = -\dfrac{1}{3}$

$F = \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{3}\right) \times \dfrac{3}{2} = \left(\dfrac{3 \times 3}{4 \times 3} - \dfrac{1 \times 4}{3 \times 4}\right) \times \dfrac{3}{2} = \left(\dfrac{9}{14} - \dfrac{4}{12}\right) \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{12} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{3 \times 4} \times \dfrac{3 \times 1}{2} = \dfrac{5}{8}$

Exercice 7. Effectuer les calculs suivants sans utiliser la calculatrice et vérifier ensuite les résultats à l'aide de celle-ci.

$$1)\ \frac{1}{3}+\frac{1}{6} \qquad 2)\ \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9} \qquad 3)\ \frac{4}{3}+\frac{3}{4}-1 \qquad 4)\ \frac{1}{3}\times\frac{1}{6} \qquad 5)\ \frac{4}{3}\times\frac{3}{3}-1$$

$$6)\ \frac{4\times 91}{18\times 2}-\frac{91}{18}\times 2 \qquad 7)\ \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{5} \qquad 8)\ \frac{\frac{1}{3}-\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} \qquad 9)\ \frac{4}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$$

$$10)\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}} \qquad 11)\ \frac{\frac{2}{7}+\frac{5}{21}}{\frac{5}{9}-\frac{1}{3}} \qquad 12)\ \frac{2+\frac{1}{5}}{7-\frac{3}{5}} \qquad 13)\ \frac{\frac{1}{3}-\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}\times\frac{\frac{5}{6}+\frac{7}{3}}{1-\frac{5}{6}}$$

$$14)\ \left(\frac{1}{2}\right)^5 \qquad 15)\ 7^5\times\left(\frac{2}{7}\right)^6 \qquad 16)\ \left(\frac{3}{4}\right)^4\times\left(\frac{4}{3}\right)^3 \qquad 17)\ \frac{\left(\frac{7}{5}\right)^2}{\left(\frac{7}{10}\right)^3}.$$

Solution. 1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1\times 2}{3\times 2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{3\times 1}{3\times 2}=\frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{1\times 6}{3\times 6}+\frac{1\times 3}{6\times 3}+\frac{1\times 2}{9\times 2}=\frac{6}{18}+\frac{3}{18}+\frac{2}{18}=\frac{6+3+2}{18}=\frac{11}{18}$

3) $\frac{4}{3}+\frac{3}{4}-1=\frac{4\times 4}{3\times 4}+\frac{3\times 3}{4\times 3}-\frac{12}{12}=\frac{16}{12}+\frac{9}{12}-\frac{12}{12}=\frac{13}{12}$

4) $\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1\times 1}{3\times 6}=\frac{1}{18}$

5) $\frac{4}{3}\times\frac{3}{3}-1=\frac{4}{3}-\frac{3}{3}=\frac{1}{3}$

6) $\frac{4\times 91}{18\times 2}-\frac{91}{18}\times 2=\frac{2\times 2\times 91}{2\times 9\times 2}-\frac{91}{2\times 9}\times\frac{2\times 1}{1}=\frac{91}{2}-\frac{91}{2}=0$

7) $$\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{5}=\left(\frac{3\times 3}{4\times 3}-\frac{1\times 4}{3\times 4}\right)\times\frac{1}{5}=\left(\frac{9}{12}-\frac{4}{12}\right)\times\frac{1}{5}$$
$$=\frac{5}{12}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{12}$$

8) $\frac{\frac{1}{3}-\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}=\frac{\frac{1\times 4}{3\times 4}-\frac{3\times 3}{4\times 3}}{\frac{2}{5}}=\frac{\frac{4}{12}-\frac{9}{12}}{\frac{2}{5}}=-\frac{5}{12}\times\frac{5}{2}=-\frac{25}{24}$

9) $\frac{4}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\frac{4}{\frac{1\times 2}{2\times 2}-\frac{1}{4}}=\frac{4}{\frac{2}{4}-\frac{1}{4}}=\frac{4}{\frac{1}{4}}=4\times\frac{4}{1}=16$

10) $$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{3}+\frac{1}{3}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{4}{3}}}=1+\frac{1}{1+\frac{3}{4}}$$
$$=1+\frac{1}{\frac{4}{4}+\frac{3}{4}}=1+\frac{1}{\frac{7}{4}}=1+\frac{4}{7}=\frac{7}{7}+\frac{4}{7}=\frac{11}{7}$$

11) $$\frac{\frac{2}{7}+\frac{5}{21}}{\frac{5}{9}-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2\times 3}{7\times 3}+\frac{5}{21}}{\frac{5}{9}-\frac{1\times 3}{3\times 3}}=\frac{\frac{6}{21}-\frac{5}{21}}{\frac{5}{9}-\frac{3}{9}}=\frac{\frac{1}{21}}{\frac{2}{9}}$$
$$=\frac{1}{21}\times\frac{9}{2}=\frac{1}{3\times 7}\times\frac{3\times 3}{2}=\frac{3}{14}$$

12) $\frac{2+\frac{1}{5}}{7-\frac{3}{5}}=\frac{\frac{2\times 5}{1\times 5}+\frac{1}{5}}{\frac{7\times 5}{1\times 5}-\frac{3}{5}}=\frac{\frac{10}{5}+\frac{1}{5}}{\frac{35}{5}-\frac{3}{5}}=\frac{\frac{11}{5}}{\frac{32}{5}}=\frac{11}{5}\times\frac{5}{32}=\frac{11}{32}$

13) $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} \times \dfrac{\frac{5}{6}+\frac{7}{3}}{1-\frac{5}{6}} = \dfrac{\frac{1\times2}{3\times2}-\frac{5\times3}{2\times3}}{\frac{3}{4}-\frac{1\times2}{2\times2}} \times \dfrac{\frac{5}{6}+\frac{7\times2}{3\times2}}{\frac{6}{6}-\frac{5}{6}} = \dfrac{\frac{2}{6}-\frac{15}{6}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{4}} \times \dfrac{\frac{5}{6}+\frac{14}{6}}{\frac{6}{6}-\frac{5}{6}}$

$$= \frac{-\frac{13}{6}}{\frac{1}{4}} \times \frac{\frac{19}{6}}{\frac{1}{6}} = -\frac{13}{6} \times \frac{4}{1} \times \frac{19}{6} \times \frac{6}{1}$$

$$= -\frac{13 \times 2 \times 2 \times 19}{2 \times 3} = \frac{494}{3}$$

14) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{1^5}{2^5} = \dfrac{1}{32}$

15) $7^5 \times \left(\frac{2}{7}\right)^6 = \dfrac{7^5}{1} \times \dfrac{2^6}{7^6} = \dfrac{7^5 \times 1}{1} \times \dfrac{2^6}{7^5 \times 7} = \dfrac{2^6}{7} = \dfrac{64}{7}$

16) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^4 \times \left(\dfrac{4}{3}\right)^3 = \dfrac{3^4}{4^4} \times \dfrac{4^3}{3^3} = \dfrac{3^3 \times 3}{4^3 \times 4} \times \dfrac{4^3 \times 1}{3^3 \times 1} = \dfrac{3}{4}$

17) $\dfrac{\left(\frac{7}{5}\right)^2}{\left(\frac{7}{10}\right)^3} = \dfrac{\frac{7^2}{5^2}}{\frac{7^3}{10^3}} = \dfrac{7^2}{5^2} \times \dfrac{10^3}{7^3} = \dfrac{7^2 \times 1}{5^2 \times 1} \times \dfrac{(2 \times 5)^3}{7^2 \times 7} = \dfrac{1}{5^2 \times 1} \times \dfrac{2^3 \times 5^2 \times 5}{7} = \dfrac{2^3 \times 5}{7} = \dfrac{40}{7}$

Exercice 8. Dans chacun des cas suivants, déterminer si le triangle ABC est rectangle ou non.
1. $AB = \frac{3}{4}$, $AC = 1$, $BC = \frac{5}{4}$ **2.** $AB = \frac{4}{3}$, $AC = \frac{5}{2}$ et $BC = \frac{17}{6}$ **3.** $AB = \frac{1}{2}$, $AC = \frac{2}{3}$, $BC = \frac{7}{6}$.

Solution.

1. Le plus grand côté est BC. De plus, $AB^2 + AC^2 = (\frac{3}{4})^2 + 1^2 = \frac{3^2}{4^2} + 1 = \frac{9}{16} + \frac{16}{16} = \frac{25}{16}$ et $BC^2 = (\frac{5}{4})^2 = \frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{16}$ donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Ainsi, par le sens réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A.

2. Le plus grand côté est BC. De plus,

$$AB^2 + AC^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} + \frac{5^2}{2^2} = \frac{16}{9} + \frac{25}{4} = \frac{16 \times 4}{9 \times 4} + \frac{25 \times 9}{4 \times 9} = \frac{64}{36} + \frac{225}{36} = \frac{289}{36}$$

et $BC^2 = (\frac{17}{6})^2 = \frac{17^2}{6^2} = \frac{289}{36}$ donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Ainsi, par le sens réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A.

3. Le plus grand côté est BC. De plus,

$$AB^2 + AC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} + \frac{2^2}{3^2} = \frac{1}{4} + \frac{4}{9} = \frac{1 \times 9}{4 \times 9} + \frac{4 \times 4}{9 \times 4} = \frac{9}{36} + \frac{16}{36} = \frac{25}{36}$$

et $BC^2 = (\frac{7}{6})^2 = \frac{7^2}{6^2} = \frac{49}{36}$ donc $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$. Ainsi, par la contraposée du sens direct du théorème de Pythagore, ABC n'est pas un triangle rectangle.

Exercice 9. La jauge de mon réservoir indique $\frac{1}{5}$. Je mets 33 litres d'essence dans le réservoir et la jauge indique ensuite $\frac{3}{4}$. Quelle est, en litres, la capacité du réservoir ?

Solution. D'après l'énoncé, 33 litres correspond à $\frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{15}{20} - \frac{4}{20} = \frac{11}{20}$ du réservoir donc la capacité du réservoir est $\frac{20}{11} \times 33 = 60$ litres.

3) Nombres décimaux

Exercice 10. Cet exercice est à traiter sans calculatrice.

1. Dans chacun des cas suivants, trouver une écriture fractionnaire du nombre qui montre que celui-ci est décimal.

$$-3{,}256 \qquad 5 \qquad -\frac{3}{5} \qquad \frac{101}{125} \qquad -\frac{1}{16}$$

2. Déterminer la partie entière et la partie décimale des nombres suivants.

$$17{,}324 \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{178}{100} \qquad \frac{27}{25} \qquad \frac{2300}{125}.$$

3. Déterminer l'écriture décimale des nombres suivants.

$$\frac{37}{100} \qquad \frac{1789}{10^4} \qquad \frac{36}{25} \qquad \frac{17}{8} \qquad \frac{250}{125}.$$

Solution.

1. $-3{,}256 = \dfrac{-3256}{1000} = \dfrac{-3256}{10^3}$ montre que $-3{,}256$ est décimal.

$5 = \dfrac{5}{1} = \dfrac{5}{10^0}$ montre que 5 est décimal.

$-\dfrac{3}{5} = -\dfrac{6}{10} = \dfrac{-6}{10^1}$ montre que $-\dfrac{3}{5}$ est décimal.

$\dfrac{101}{125} = \dfrac{101 \times 8}{125 \times 8} = \dfrac{808}{1000} = \dfrac{808}{10^3}$ montre que $\dfrac{101}{125}$ est décimal.

$-\dfrac{1}{16} = -\dfrac{1}{2^4} = -\dfrac{5^4}{2^4 \times 5^4} = \dfrac{5^4}{(2 \times 5)^4} = \dfrac{-5^4}{10^4}$ montre que $-\dfrac{1}{16}$ est un décimal.

2. La partie entière de 17,324 est 17 et sa partie décimale est 0,324.

$\dfrac{1}{2} = 0{,}5$ donc sa partie entière est 0 et sa partie décimale est 0,5.

$\dfrac{178}{100} = 1{,}78$ donc sa partie entière est 1 et sa partie décimale est 0,78.

$\dfrac{27}{25} = \dfrac{27 \times 4}{25 \times 4} = \dfrac{108}{100} = 1{,}08$ donc sa partie entière est 1 et sa partie décimale est 0,08.

$\dfrac{2300}{125} = \dfrac{23 \times 100}{5^3} = \dfrac{23 \times 2^2 \times 5^2}{5^2 \times 5} = \dfrac{23 \times 4}{5} = \dfrac{23 \times 8}{10} = \dfrac{184}{10} = 18{,}4$ donc sa partie entière est 18 et sa partie décimale est 0,4.

3. $\dfrac{37}{100} = 0{,}37$

$\dfrac{1789}{10^4} = 0{,}1789$

$\dfrac{36}{25} = \dfrac{36 \times 4}{25 \times 4} = \dfrac{144}{100} = 1{,}44$

$\dfrac{17}{8} = \dfrac{17 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \dfrac{17 \times 125}{10^3} = \dfrac{2125}{1000} = 2{,}125$

$\dfrac{250}{125} = \dfrac{2 \times 125}{125} = 2$

Exercice 11. (CRPE – Montpellier – 1996)

1. On a demandé à un élève de donner huit nombres décimaux. Il a proposé :

$$5 \qquad \frac{1}{6} \qquad 0 \qquad \frac{2}{5} \qquad 0{,}25 \qquad \frac{7}{21} \qquad \frac{1}{10} \qquad \frac{3}{12}.$$

Qu'en pensez-vous ? Justifiez votre réponse.

2. a et b sont des nombres entiers compris entre 1 et 5. Parmi tous les fractions $\frac{a}{b}$ possibles, trouver tous les nombres décimaux.

Solution.

1. D'une part, certains nombres proposés ne sont pas décimaux. En effet, $\dfrac{1}{6}$ est irréductible et 3 divise 6 donc $\dfrac{1}{6}$ n'est pas décimal. De même, $\dfrac{7}{21} = \dfrac{1}{3}$ n'est pas décimal.
   D'autre part, les autres nombres sont bien des décimaux mais $\dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$ donc ils ne sont pas tous différents.
2. Les nombre décimaux possibles sont
   - $\frac{1}{1} = 1$, $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{3}{1} = 3$, $\frac{4}{1} = 1$, $\frac{5}{1} = 5$
   - $\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{3}{2} = 1{,}5$, $\frac{5}{2} = 2{,}5$
   - $\frac{1}{4} = 0{,}25$, $\frac{3}{4} = 0{,}75$, $\frac{5}{4} = 1{,}25$
   - $\frac{1}{5} = 0{,}2$, $\frac{2}{5} = 0{,}4$, $\frac{3}{5} = 0{,}6$, $\frac{4}{5} = 0{,}8$

   Les autres fractions possibles ont un dénominateur divisible par 3 dans leur forme irréductible ou apparaissent déjà dans les fractions citées précédemment (comme $\frac{3}{3} = 1$ ou $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$).

Exercice 12 (CRPE – Sujet 0 – 2022)**.** Un nombre décimal est souvent défini de la façon suivante : « un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où a est un nombre entier et n est un nombre entier positif. »

1. On s'appuiera sur la définition précédente pour répondre aux deux questions suivantes.
   a. Montrer que 0,127 est un nombre décimal.
   b. Montrer que 14 est un nombre décimal.
2. Dans une classe de CM2, un enseignant demande aux élèves de dire ce qu'est un nombre décimal, voici trois réponses proposées par des élèves :

   Élève A : « Un nombre décimal est un nombre avec une virgule. »

   Élève B : « Un nombre décimal est un nombre qui s'écrit avec une fraction qui a 10 ou 100 au dénominateur. »

   Élève C : « Un nombre décimal est un nombre qui n'est pas entier. »

   Expliquer pourquoi chacune des définitions proposées ne convient pas d'un point de vue mathématique. On pourra notamment s'appuyer sur des contre-exemples.
3. Parmi les nombres suivants dire, en justifiant, lesquels sont décimaux et lesquels ne le sont pas : 2,48 ; $\frac{7}{25}$; 12 ; $\frac{7}{9}$; $\frac{49}{14}$.
4. Le produit de deux nombres décimaux est-il toujours un nombre décimal ? Justifier.
5. Le quotient de deux nombres décimaux est-il toujours un nombre décimal ? Justifier.

Solution.

1. **a.** $0{,}127 = \dfrac{127}{10^3}$ montre que 0,127 est décimal.
   b. $14 = \dfrac{14}{10^0}$ montrer que 14 est décimal.
2. La réponse de l'élève A n'est pas satisfaisante car tout nombre admet une écriture décimale, éventuellement illimitée. Ainsi, $\frac{1}{3} = 0{,}\underline{3}$ n'est pas décimal mais admet bien une écriture « avec une virgule ». De plus, 5 est décimal car $5 = \frac{5}{10^0}$ mais l'écriture de 5 ne contient pas de virgule.
   La réponse de l'élève B est insuffisante. Par exemple, 0,0002 est décimal mais ne peut pas s'écrire comme une fraction (de nombres entiers) avec un dénominateur égal à 10 ou à 100.
   La réponse de l'élève C est fausse car $\frac{1}{3}$ n'est pas un entier mais n'est pas un décimal non plus.

3. Comme $2{,}48 = \frac{248}{10^2}$, $\frac{7}{25} = \frac{28}{10^2}$, $12 = \frac{12}{10^0}$ et $\frac{49}{14} = \frac{7\times 7}{2\times 7} = \frac{7}{2} = \frac{35}{10}$, ces nombres sont décimaux. En revanche, $\frac{7}{9}$ est écrit sous forme irréductible et 3 divise le dénominateur donc $\frac{7}{9}$ n'est pas décimal.
4. La réponse est OUI. En effet, si x et y sont deux nombres décimaux alors il existe des entiers relatifs a et b et des entiers naturels n et m tels que $x = \frac{a}{10^n}$ et $y = \frac{b}{10^m}$. Dès lors,

$$x \times y = \frac{a}{10^n} \times \frac{b}{10^m} = \frac{a \times b}{10^n \times 10^m} = \frac{ab}{10^{n+m}}$$

donc, comme ab est un entier, $x + y$ est bien un décimal.
5. La réponse est NON. Par exemple, 1 et 3 sont des décimaux (car tout entier est un décimal) mais $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal.

Exercice 13 (D'après CRPE – Amiens – 1998)**.** On considère les deux nombres $\frac{29}{55}$ et $\frac{39}{75}$.

1. Sont-ils des nombres décimaux ?
2. Comparer ces deux nombres.
3. Trouver un nombre décimal strictement compris entre ces deux nombres.
4. Trouver une fraction qui ne soit pas un nombre décimal, strictement comprise entre ces deux nombres.

Solution.

1. La fraction $\frac{29}{55}$ est irréductible et 11 divise 55 donc $\frac{29}{55}$ n'est pas un décimal. En revanche, $\frac{39}{75} = \frac{3\times 13}{3\times 25} = \frac{13}{25} = \frac{13\times 4}{25\times 4} = \frac{52}{10^2}$ est un décimal.
2. Comme $\frac{29}{55} \approx 0{,}527 > 0{,}52$, $\frac{29}{55} > \frac{39}{75}$.
3. Le nombre $0{,}521 = \frac{521}{10^3}$ est un décimal strictement compris entre $\frac{39}{75}$ et $\frac{29}{55}$.
4. On peut commencer par mettre les deux nombres au même dénominateur : $\frac{29}{55} = \frac{29\times 5}{55\times 5} = \frac{145}{275}$ et $\frac{39}{75} = \frac{13\times 11}{25\times 11} = \frac{143}{275}$. Ainsi, $\frac{144}{275}$ est une fraction strictement compris entre $\frac{39}{75}$ et $\frac{29}{55}$. De plus, elle est écrite sous forme irréductible et 11 divise son dénominateur donc $\frac{144}{275}$ n'est pas un décimal.

Exercice 14 (CRPE – Nice – 1998)**.** Écrire un entier à la place du point pour que l'écriture fractionnaire désigne

un entier naturel	un décimal non entier naturel	un rationnel non décimal
$\frac{85}{85}$	$\frac{17}{85}$	$\frac{1}{85}$
$\frac{85}{85}$	$\frac{85}{10}$	$\frac{85}{3}$

Solution. Voir ci-dessus. En effet, $\frac{85}{85} = 1$ est entier, $\frac{17}{85} = \frac{1}{5} = 0{,}2$ et $\frac{85}{10} = 8{,}5$ sont décimaux non entiers et $\frac{1}{85}$ et $\frac{85}{3}$ sont rationnels non décimaux car ces fractions sont irréductibles et leurs dénominateurs admettent respectivement 17 et 3 comme diviseurs.

Exercice 15 (CRPE – Groupement 6 – 2008)**.**

1. Parmi les nombres rationnels suivants, quels sont ceux qui sont des décimaux ? Justifier la réponse.

$$\frac{1}{7} \qquad \frac{27}{8} \qquad \frac{91}{7} \qquad \frac{42}{17}$$

2. Le but de cette question est d'étudier l'écriture décimale de $\frac{1}{7}$.

  a. Poser la division de 1 par 7. En déduire l'écriture décimale périodique de $\frac{1}{7}$.

  b. Donner, en justifiant succinctement, la 32^{e} décimale de $\frac{1}{7}$.

3. Le but de cette question est de produire l'écriture décimale périodique de $\frac{42}{17}$. En utilisant un tableur pour effectuer la division de 42 par 17, on obtient le tableau suivant. À partir de la cellule A2, la colonne A donne les restes successifs de la division de 42 par 17. À partir de la cellule B2, la colonne B donne les quotients successifs.

	A	B
1	42	17
2	8	2
3	12	4
4	1	7
5	10	0
6	15	5
7	14	8
8	4	8
9	6	2
10	9	3
11	5	5
12	16	2
13	7	9
14	2	4
15	3	1
16	13	1
17	11	7
18	8	6
19	12	4
20	1	7
21	10	0
22	15	5
23	14	8
24	4	8

  a. Donner sans justification la 20^{e} décimale de l'écriture décimale de $\frac{42}{17}$.

  b. À partir du tableau ci-contre, donner l'écriture décimale périodique de $\frac{42}{17}$.

  c. Expliquer pourquoi on est sûr de retrouver dans la cellule A18 un reste déjà obtenu.

4. On se propose maintenant de retrouver l'écriture fractionnaire du rationnel $a = 1,\underline{23}$ (c'est-à-dire le nombre dont l'écriture décimale périodique est 1,232323232323...). Pour cela, calculer $100a - a$ et en déduire l'écriture de a sous forme fractionnaire.

Solution.

1. $\frac{1}{7}$ n'est pas décimal car cette fraction est irréductible et son dénominateur est divisible par 7.
$\frac{27}{8} = 3,375$ et $\frac{91}{7} = 13$ sont des décimaux.
$\frac{42}{17}$ n'est pas décimal car cette fraction est irréductible et son dénominateur est divisible par 17.

2. **a.**

$$\begin{array}{l|l}
1 & 7 \\ \cline{2-2}
1\,0 & 0.1\ 4\ 2\ 8\ 5\ 7\ 1\ 4\ 2 \\
\quad 3\,0 & \\
\qquad 2\,0 & \\
\qquad\quad 6\,0 & \\
\qquad\qquad 4\,0 & \\
\qquad\qquad\quad 5\,0 & \\
\qquad\qquad\qquad 1\,0 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 3\,0 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2\,0 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 6 &
\end{array}$$

Quand on retombe sur un reste égal à 1, la suite des décimales devient périodique. Ainsi, $\frac{1}{7} = 0,\underline{142857}$.

  b. La suite des décimales est périodique de période 6 et $32 = 6 \times 5 + 2$ donc la 32^{e} décimale est la même que la 2^{e} décimale : il s'agit donc d'un 4.

3. **a.** La 20^{e} décimale de $\frac{42}{17}$ est 5 (ligne 22 du tableau).

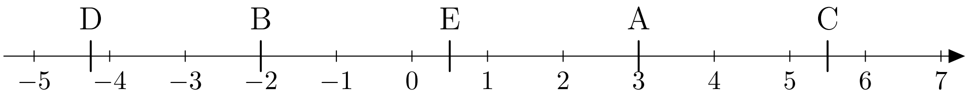
  b. D'après le tableau, on retrouve le reste 8 de la ligne 2 à la ligne 18 donc l'écriture décimale de $\frac{42}{17}$ est $2,\underline{4705882352941176}$.

c. Dans la division par 17, il y a 17 restes possibles. De plus, comme $\frac{42}{17}$ n'est pas décimal, aucun des restes dans la division de 42 par 17 ne peut être égal à 0. Ainsi, il y a au maximum 16 restes différents qui apparaissent donc à la ligne 18 (qui correspond au 17e reste), on retrouve nécessairement un reste déjà obtenu auparavant.

4. Comme $100a - a = 123{,}\underline{23} - 1{,}\underline{23} = 122$, on a $99a = 122$ donc $a = \frac{122}{99}$.

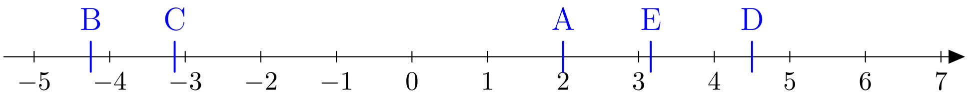
4) Nombres réels

Exercice 16. Sur la droite réelle ci-dessous, on a placé des points A, B, C, D et E. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, les abscisses de ces points.



Solution. Avec la précision permise par le graphique, $x_{\mathrm{A}} = 3$, $x_{\mathrm{B}} = -2$, $x_{\mathrm{C}} = 5{,}5$ et $x_{\mathrm{D}} = -4{,}2$.

Exercice 17. Sur la droite réelle ci-dessous, placer (avec la précision permise par le graphique) le point A d'abscisse 2, le point B d'abscisse $-\dfrac{17}{4}$, le point C d'abscisse $-\pi$, le point D d'abscisse $\dfrac{9}{2}$ et le point E d'abscisse $\sqrt{10}$.



Solution. Voir ci-dessus.

Exercice 18. Compléter en utilisant $\in$ ou $\notin$. On ne demande pas de justification.

$$5 \in \mathbb{Z}\,; \quad \pi \in \mathbb{R}\,; \quad \frac{1}{3} \notin \mathbb{D}\,; \quad \frac{1}{10} \in \mathbb{D}\,; \quad -3 \in \mathbb{Z}\,; \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}\,; \quad 0{,}75 \in \mathbb{Q}\,; \quad \frac{10}{2} \in \mathbb{N}.$$

Solution. Voir-dessus.

Exercice 19. Pour chacune des phrases suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant sa réponse.

1. Il existe un nombre décimal qui est un entier naturel.

2. Il n'existe pas de nombre rationnel qui soit décimal.

3. Il existe un nombre décimal compris entre 1,3 et 1,4.

4. Il existe un nombre rationnel non décimal compris entre 1,3 et 1,4.

5. Le produit de deux nombres décimaux est un nombre décimal.

6. Le produit de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.

Solution.

1. VRAI. Par exemple, $5 = \frac{5}{10^0}$ est un décimal qui est un entier naturel.

2. FAUX. Par exemple, $\frac{1}{10}$ est un rationnel qui est aussi un décimal.

3. VRAI. Par exemple, $1{,}35 = \frac{135}{10}$ est un décimal compris entre 1,3 et 1,4.

4. VRAI. Par exemple, $\frac{4}{3} = 1{,}\underline{3}$ est un rationnel non décimal compris entre 1,3 et 1,4.

5. VRAI. En effet, si x et y sont deux nombres décimaux alors il existe des entiers relatifs a et b et des entiers naturels n et m tels que $x = \frac{a}{10^n}$ et $y = \frac{b}{10^m}$. Dès lors,

$$x \times y = \frac{a}{10^n} \times \frac{b}{10^m} = \frac{a \times b}{10^n \times 10^m} = \frac{a \times b}{10^{n+m}}$$

donc, comme $a \times b$ est un entier, $x \times y$ est bien un décimal.

6. FAUX. Par exemple, $\sqrt{2}$ est irrationnel mais $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ est un rationnel.

Exercice 20. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera sa réponse.

1. Pour tout réel x, si x est décimal alors $3x$ est décimal.

2. Pour tout réel x, si $3x$ est décimal alors x est décimal.

3. Pour tout réel x, si x^2 est rationnel alors x est rationnel.

4. Pour tout réel x, si x est rationnel alors x^2 est rationnel.

Solution.

1. VRAI. Si x est rationnel alors il existe un entier a et un entier naturel n tels que $x = \frac{a}{10^n}$ donc $3x = \frac{3a}{10^n}$ est un décimal car $3a$ est un entier.

2. FAUX. Par exemple, $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal bien que $3 \times \frac{1}{3} = 1$ soit un décimal.

3. FAUX. Par exemple, $\sqrt{2}$ est un irrationnel bien que $\sqrt{2}^2 = 2$ soit un rationnel.

4. VRAI. Si x est rationnel alors il existe des entiers a et b avec $b \neq 0$ tels que $x = \frac{a}{b}$ donc $x^2 = (\frac{a}{b})^2 = \frac{a^2}{b^2}$ est un rationnel car a^2 et b^2 sont des entiers.

Exercice 21.

1. Soit x un réel non nul. Montrer que x est rationnel si et seulement si $\dfrac{1}{x}$ est rationnel.

2. Déterminer deux irrationnels x et y différents tels que $x \times y$ soit un entier.

Solution.

1. Supposons que x est rationnel. Alors, il existe deux entiers a et b avec $b \neq 0$ tel que $x = \frac{a}{b}$. De plus, comme $x \neq 0$, $a \neq 0$ et $\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ est un rationnel.

Réciproquement, si $\frac{1}{x}$ est un rationnel alors, d'après ce qui précède, $\frac{1}{\frac{1}{x}}$ est un rationnel c'est-à-dire x est un rationnel.

On a donc bien montré l'équivalence x est un rationnel si et seulement si $\frac{1}{x}$ est un rationnel.

2. On peut prendre par exemple, $x = \sqrt{2}$ et $y = 3\sqrt{2}$ qui sont tous les deux irrationnels et tels que $x \times y = 3 \times \sqrt{2}^2 = 3 \times 2 = 6$ est un entier.

Exercice 22. On propose une autre démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ en utilisant un raisonnement géométrique. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il existe donc deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.

1. On considère un triangle PQR rectangle et isocèle en P tel que PQ $=$ PR $= q$. Démontrer que QR $= p$.

2. Ainsi, il existe au moins un triangle rectangle isocèle dont tous les côtés ont des longueurs qui sont des nombres entiers. Parmi tous les triangles rectangles isocèles à côtés entiers, on note ABC celui qui a les plus petits côtés. On suppose qu'il est rectangle en A et on pose $a =$ BC et $b =$ AB $=$ AC. Enfin, on note D le point de [BC] tel que CA $=$ CD et E le point d'intersection de [AB] avec la perpendiculaire à [BC] passant par D.

a. Faire une figure.

b. Montrer que le triangle BDE est rectangle isocèle en D.

c. Montrer que la longueur BD est un entier.

d. Montrer que $\mathrm{AE} = a - b$ et en déduire que la longueur BE est un entier.

e. Conclure.

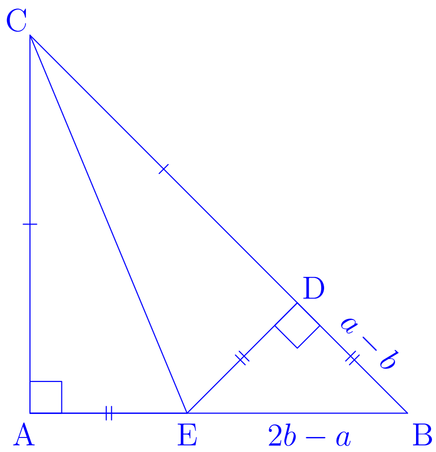
Solution.

1. D'après le théorème de Pythagore,

$$\mathrm{QR}^2 = \mathrm{QP}^3 + \mathrm{QR}^2 = q^2 + q^2 = 2q^2$$

donc, comme $q > 0$, $\mathrm{QR} = \sqrt{2q^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{q^2} = \sqrt{2} \times q$. Or, par hypothèse, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ donc $\mathrm{QR} = \frac{p}{q} \times q$ donc $\mathrm{QR} = p$.

2. **a.**



b. Par hypothèse, les droites (BC) et (DE) sont perpendiculaires donc (BDE) est rectangle en D.

Comme ABC est rectangle et isocèle en A, $\widehat{\mathrm{ABC}} = 45°$. Dès lors, dans le triangle BDE :

$$\widehat{\mathrm{DEB}} = 180° - (\widehat{\mathrm{EBD}} + \widehat{\mathrm{BDE}}) = 180° - (90° + 45°) = 45°$$

Ainsi, $\widehat{\mathrm{DEB}} = \widehat{\mathrm{EBD}}$ donc BDE est isocèle en D.

On conclut que le triangle BDE est rectangle isocèle en D.

c. Par hypothèse, $\mathrm{CD} = \mathrm{CA} = b$ et $\mathrm{BD} = a$ donc $\mathrm{BD} = \mathrm{CB} - \mathrm{CD} = a - b$. Or, a et b sont des entiers donc $a - b$ aussi. Ainsi, la longueur BD est un entier.

d. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AEC rectangle en A, il vient

$$\mathrm{AE}^2 = \mathrm{CE}^2 - \mathrm{AC}^2 = \mathrm{CE}^2 - b^2$$

et, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle CDE rectangle en D, on obtient

$$\mathrm{DE}^2 = \mathrm{CE}^2 - \mathrm{CD}^2 = \mathrm{CE}^2 - b^2$$

donc $\mathrm{AE}^2 = \mathrm{DE}^2$ et, comme ce sont des longueurs donc des nombres positifs, $\mathrm{AE} = \mathrm{DE}$.

Or, comme BDE est isocèle en D, $\mathrm{DE} = \mathrm{BD} = a - b$ d'après la question précédente. Ainsi, $\mathrm{AE} = a - b$.

On en déduit que $\mathrm{BE} = \mathrm{AB} - \mathrm{AE} = b - (a - b) = 2b - a$ donc, comme a et b sont des entiers, a longueur BE est un entier.

e. Ainsi, le triangle BDE est un triangle isocèle rectangle dont les longueurs des côtés sont des entiers strictement plus petits que les longueurs des côtés de ABC. C'est absurde puisque ABC est le plus petit triangle rectangle isocèle dont les longueurs des côtés sont des entiers.
Ainsi, on conclut que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Exercice 23. On rappelle que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et π sont irrationnels.

1. Démontrer que $2-\sqrt{2}$ est irrationnel.
2. Démontrer que $\sqrt{\pi}$ est irrationnel.
3. Démontrer que $\sqrt{\sqrt{3}-1}$ est irrationnel.

Solution.

1. Supposons que $2-\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, il existe deux entiers a et b avec $b \neq 0$ tels que $2-\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Dès lors, $\sqrt{2} = 2 - \frac{a}{b} = \frac{2b}{b} - \frac{a}{b} = \frac{2b-a}{b}$ donc, comme $2b-a$ et b sont des entiers, $\sqrt{2}$ est un rationnel. C'est absurde donc $2-\sqrt{2}$ est irrationnel.
2. Supposons que $\sqrt{\pi}$ soit rationnel. Alors, il existe deux entiers a et b avec $b \neq 0$ tels que $\sqrt{\pi} = \frac{a}{b}$. Dès lors, $\pi = \sqrt{\pi}^2 = (\frac{a}{b})^2 = \frac{a^2}{b^2}$ donc, comme a^2 et b^2 sont des entiers, π est un rationnel. C'est absurde donc $\sqrt{\pi}$ est irrationnel.
3. Supposons que $\sqrt{\sqrt{3}-1}$ soit rationnel. Alors, il existe deux entiers a et b avec $b \neq 0$ tels que $\sqrt{\sqrt{3}-1} = \frac{a}{b}$. Dès lors, $\sqrt{3}-1 = (\frac{a}{b})^2 = \frac{a^2}{b^2}$ donc $\sqrt{3} = \frac{a^2}{b^2} + 1 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{b^2}$ donc, comme a^2+b^2 et b^2 sont des entiers, $\sqrt{3}$ est un rationnel. C'est absurde donc $\sqrt{\sqrt{3}-1}$ est irrationnel.