♦ Corrigés des exercices du chapitre 2

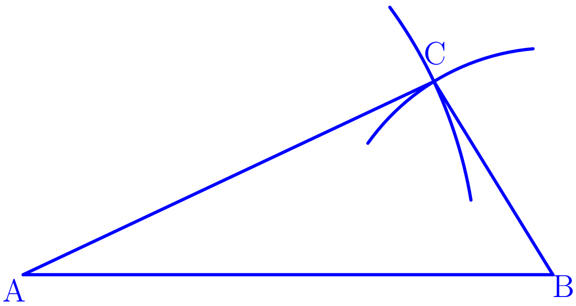
1) Généralités

Exercice 1. Dans chacun des cas suivant, si cela est possible, construire à la règle graduée et au compas, le triangle ABC.

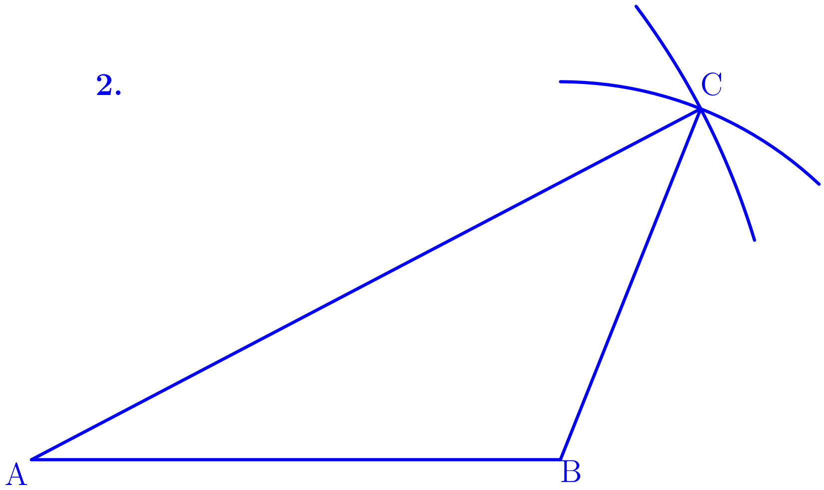
1. $\mathrm{AB} = 7$ cm, $\mathrm{AC} = 6$ cm et $\mathrm{BC} = 3$ cm ;
2. $\mathrm{AB} = 7$ cm, $\mathrm{AC} = 5$ cm et $\mathrm{BC} = 10$ cm ;
3. $\mathrm{AB} = 3$ cm, $\mathrm{AC} = 9$ cm et $\mathrm{BC} = 5$ cm ;

Solution.

1.



2.

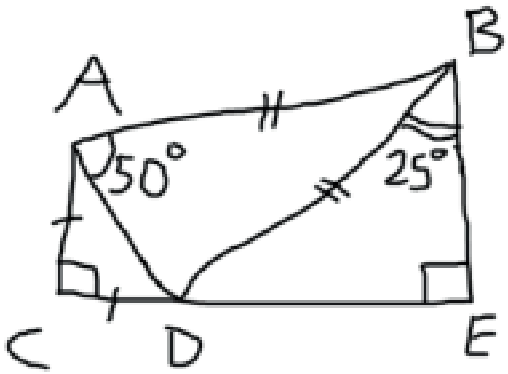


3. Comme $3 + 5 = 8 < 9$, le triangle n'est pas constructible.

Exercice 2. Un triangle isocèle possède un angle de 100°. Déterminer la mesure en degré des deux autres angles.

Solution. Commençons par remarquer que l'angle de 100° ne peut pas être un des deux angles à la base sinon, comme le triangle est isocèle, la somme des angles dépasserait 200° et donc 180°. Ainsi, l'angle de 100° est l'angle au sommet donc, comme le triangle est isocèle, les deux autres angles se partagent, à parts égales, $180° - 100° = 80°$ donc chacun mesure 40°.

Exercice 3 (CRPE – Groupement 1 – 2018)**.** On considère la figure ci-dessous.



Les points C, D et E sont-ils alignés ?

Solution. Comme ACD est isocèle rectangle en C, les deux autres angles sont égaux et se partagent $180° - 90° = 90°$ donc ils mesurent chacun $45°$. En particulier, $\widehat{\text{CDA}} = 45°$.

Ensuite, comme ABD est isocèle en B, $\widehat{\text{ADB}} = \widehat{\text{DAB}} = 50°$.

Enfin, dans le triangle BDE, $\widehat{\text{BDE}} = 180° - 90° - 25° = 65°$.

On en déduit que $\widehat{\text{CDE}} = 45° + 50° + 65° = 160° \neq 180°$ donc les points C, D et E ne sont pas alignés.

Exercice 4. Dans un triangle ABC, le côté AB mesure 10 cm, le côté AC mesure 17 cm et le côté BC mesure 21 cm. On sait, de plus, que la hauteur associée à [BC] mesure 8 cm.

1. Calculer, en cm^2, l'aire de ABC.

2. Déterminer les longueurs des hauteurs issues de B et de C.

Solution.

1. Comme la hauteur associée à [BC] mesure 8 cm, l'aire de ABC est $\dfrac{21 \times 8}{2} = 84$ cm^2.

2. Notons h la longueur de la hauteur issue de B. Alors, l'aire, en cm^2, de ABC est $\dfrac{\text{AC} \times h}{2}$ donc $\dfrac{17 \times h}{2} = 84$. On en déduit que $h = \dfrac{168}{17} \approx 9{,}9$ cm.
De même, notons h' la longueur de la hauteur issue de C. Alors, l'aire, en cm^2, de ABC est $\dfrac{\text{AB} \times h'}{2}$ donc $\dfrac{10 \times h}{2} = 84$. On en déduit que $h = \dfrac{168}{10} = 16{,}8$ cm.

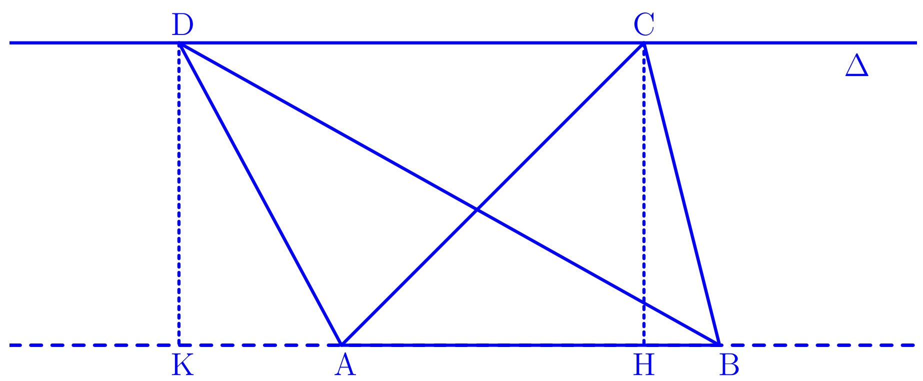
Exercice 5 (CRPE – Groupement 1 – 2017)**.** On considère un triangle ABC dont l'aire est égale à 18 cm^2 et tel que AB mesure 7,3 cm, AC mesure 7,5 cm et BC mesure 5,2 cm. On note H le pied de la hauteur issue de B.

Déterminer la longueur, en mm, du segment BH.

Solution. On sait que $\dfrac{\text{AC} \times \text{BH}}{2} = 18$ donc $\dfrac{7{,}5 \times \text{BH}}{2} = 18$ c'est-à-dire $7{,}5 \times \text{BH} = 18 \times 2 = 36$ donc $\text{BH} = \frac{36}{7{,}5} = 4{,}8$. Ainsi, le segment BH mesure 4,8 mm.

Exercice 6. On considère un segment [AB] et un point C n'appartemant pas (AB). On appelle Δ la droite parallèle à (AB) passant par C. Étant donné un point D sur Δ, comparer les aires des triangles ABC et ABD.

Solution. Faisons une figure.



Comme les droites (AB) et Δ sont parallèles, les hauteurs CH et DK sont égales donc

$$\text{aire(ABD)} = \frac{\text{AB} \times \text{DK}}{2} = \frac{\text{AB} \times \text{CH}}{2} = \text{aire(ABC)}.$$

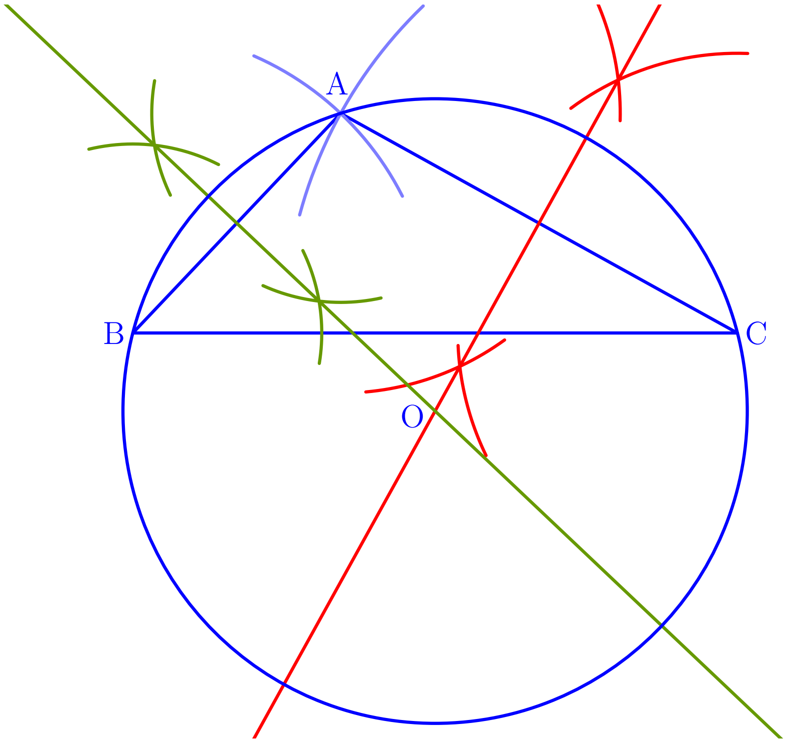
Ainsi, les triangles ABC et ABD ont la même aire.

2) Hauteurs et médiatrices

Exercice 7.

1. Construire à la règle graduée et au compas un triangle ABC tel que AB = 4 cm, AC = 6 cm et BC = 8 cm.
2. En utilisant le compas la règle non graduée, construire le cercle circonscrit à ABC.

Solution.



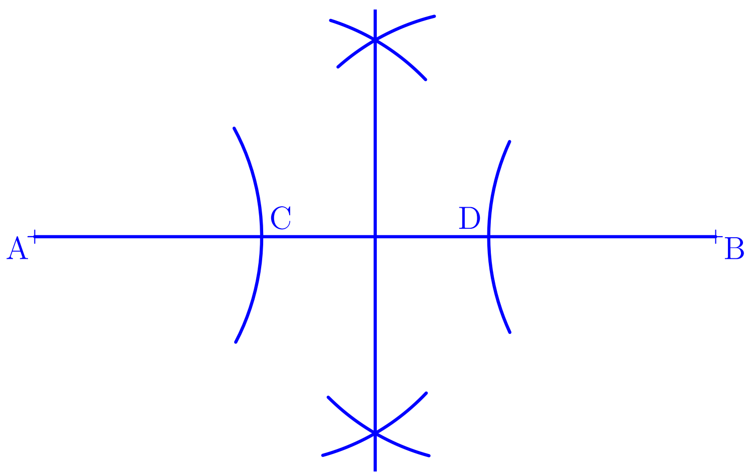
Exercice 8. On considère un segment [AB] tel que AB = 9 cm. On dispose d'un compas bloqué donc l'ouverture ne permet que de tracer des cercles de 3 cm de rayon.

Comment tracer la médiatrice de [AB] à l'aide de ce compas bloqué ?

Solution. Avec le compas, on construit le point C et D sur [AB] tels que AC = BD = 3 cm.

Ensuite, toujours avec le compas, on construit la médiatrice de [CD], ce qui est possible car CD = 3 cm donc l'ouverture du compas est suffisante.

La droite ainsi construite est perpendiculaire à [CD] donc à [AB] et passe pas le milieu de [CD]. Or, comme AC = BD, le milieu de [CD] est aussi le milieu de [AB] et donc la médiatrice de [CD] et aussi la médiatrice de [AB].



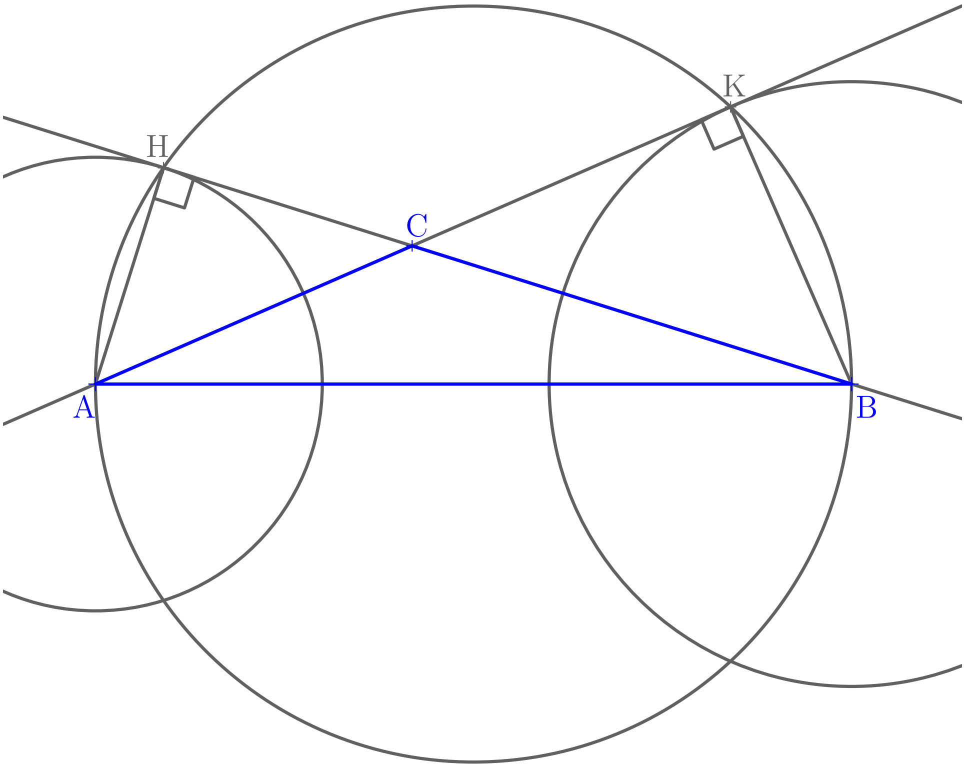
Exercice 9. Dans chaque cas suivant, construire, à la règle graduée et au compas, le triangle ABC à l'aide des informations données.

1. $AB = 10$ cm, la hauteur issue de A mesure 3 cm, celle issue de B mesure 4 cm et [AB] est le plus grand côté du triangle.
2. ABC est isocèle en C, AB mesure 8 cm et la hauteur issue de A mesure 7 cm.
3. $AB = 10$ cm, la hauteur issue de A mesure 6 cm, celle issue de C mesure 3 cm et [AB] est le plus grand côté du triangle.

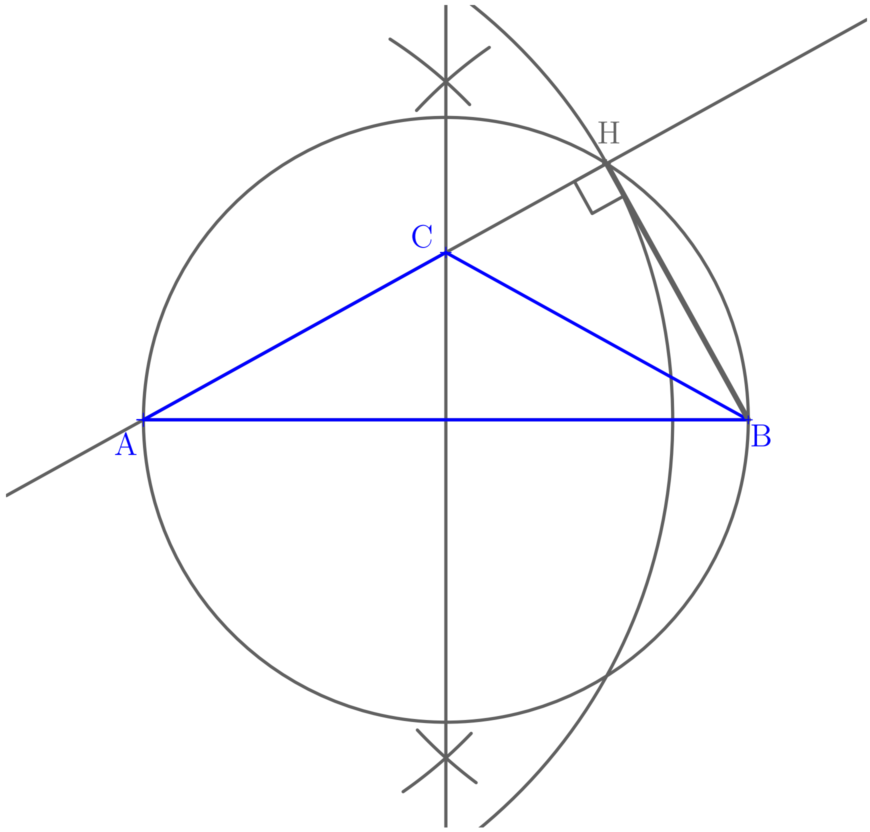
Solution.

1. Notons H le pied de la hauteur issue de A. Alors, l'angle $\widehat{HAB}$ est droit donc H appartient au cercle de diamètre [AB]. De plus, $AH = 3$ cm donc H appartient au cercle de centre A et de rayon 3 cm. Ainsi, H est l'un des points d'intersection de ces deux cercles.

   On recommence de même avec K, pied de la hauteur issue de B. Ce point ce trouve à l'intersection du cercle de diamètre [AB] et du cercle de centre B et de rayon 4. Là encore, deux points sont possibles mais, comme [AB] est le plus grand côté du triangle, il faut choisir celui qui du même côté que H par rapport à la droite (AB). Le point C est alors le point d'intersection de (AH) et (BK).



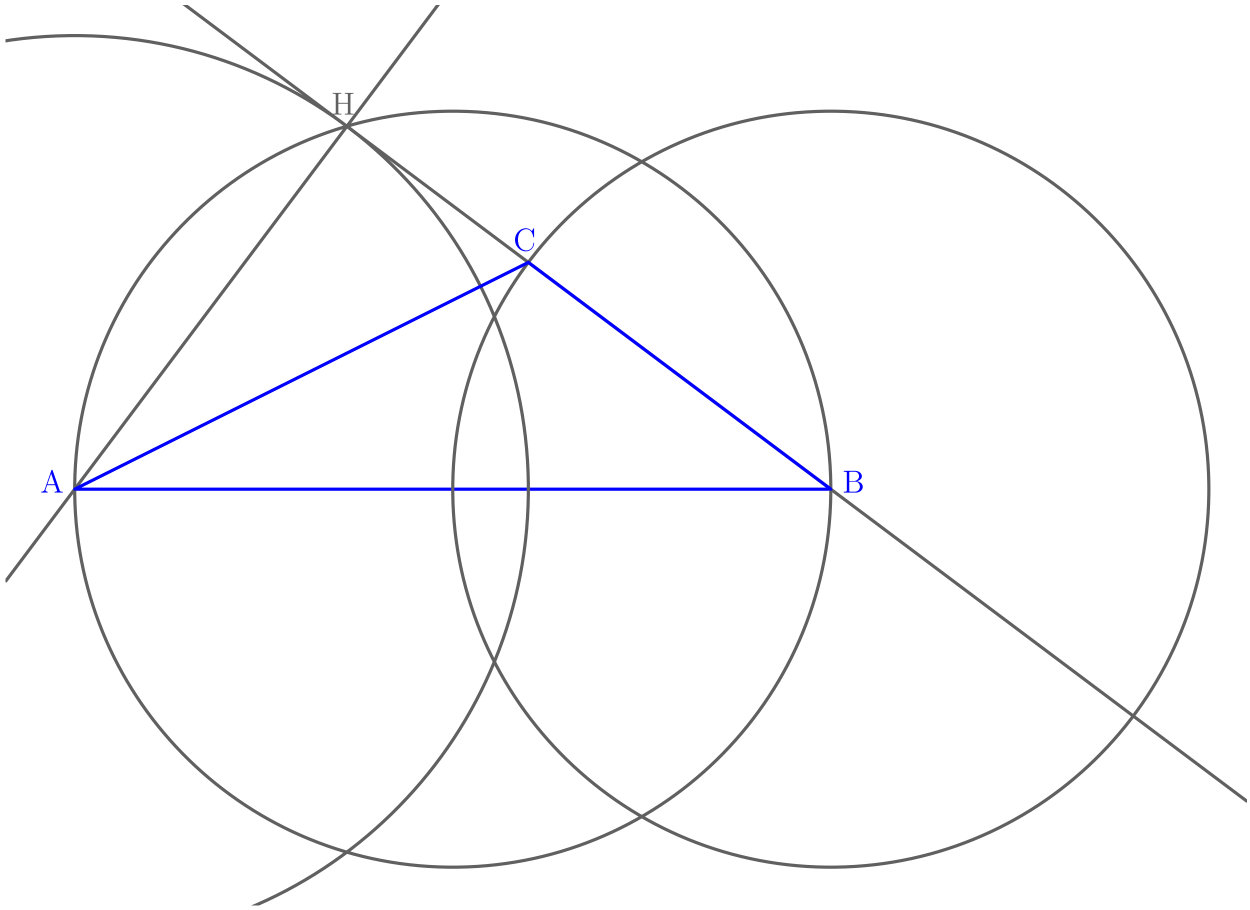
2. Comme ABC est isocèle en C, le point C se trouve sur la médiatrice de [AB]. De plus, si on note H le pied de la hauteur issue de A alors H est à l'intersection du cercle de diamètre [AB] et du cercle de centre A et rayon 7. On choisit l'un des deux points possibles. Le point C est alors à l'intersection de la médiatrice de [AB] et de la droite (AH).



3. Notons H le pied de la hauteur issue de A et K le pied de la hauteur issue de C. Le point H se trouve sur le cercle de diamètre [AB] et sur le cercle de centre A et rayon 6 cm. On choisit un des deux points d'intersection. On sait alors que C se trouve sur la droite (BH).

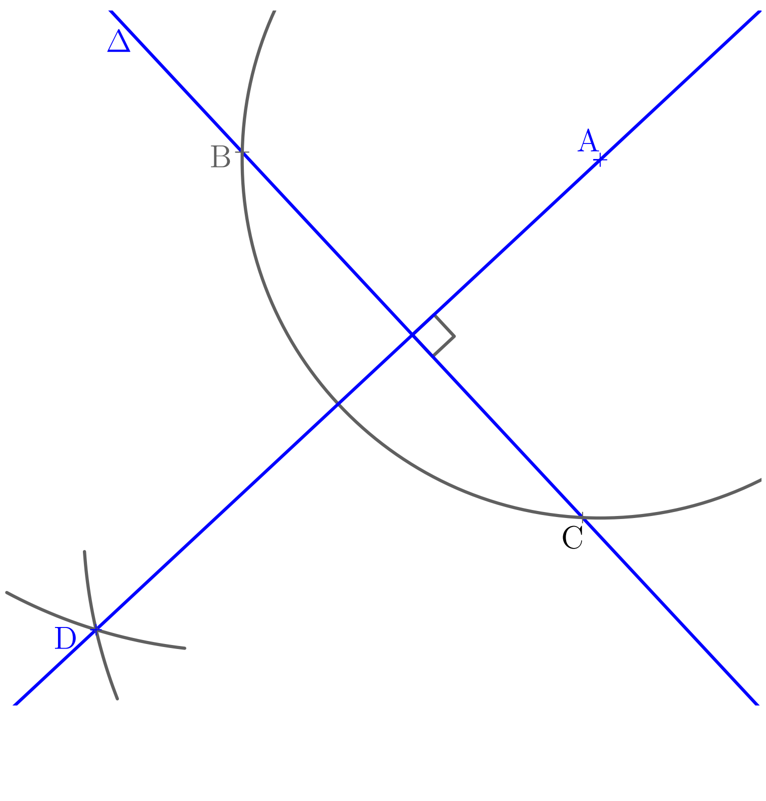
De plus, l'aire de ABC est $\dfrac{\text{AB} \times \text{CK}}{2} = \dfrac{10 \times 3}{2} = 15\ \text{cm}^2$. Par ailleurs, cette aire aussi égale à $\dfrac{\text{BC} \times \text{AH}}{2} = \dfrac{\text{BC} \times 6}{2} = 3\text{BC}$. Ainsi, $3\text{BC} = 15$ donc $\text{BC} = 5$ cm.

Ainsi, C est un des deux points d'intersection de (BH) et du cercle de centre B et de rayon 5 cm. Le fait que [AB] est le plus grand côté du triangle permet de conclure que C est le point d'intersection situé du même côté de (AB) que H.



Exercice 10. Étant donné une droite Δ et un point A, construire à la règle et au compas la perpendiculaire à Δ passant par A.

Solution. À l'aide du compas, on trace un cercle de centre et de rayon suffisamment grand pour qu'il coupe Δ en deux points B et C. Le point A est alors équidistant de B et C donc la perpendiculaire à Δ passant par A est la médiatrice. Il suffit alors, à l'aide du compas, de construire un autre point D équidistant de B et C et la droite cherchée est la droite (AD).

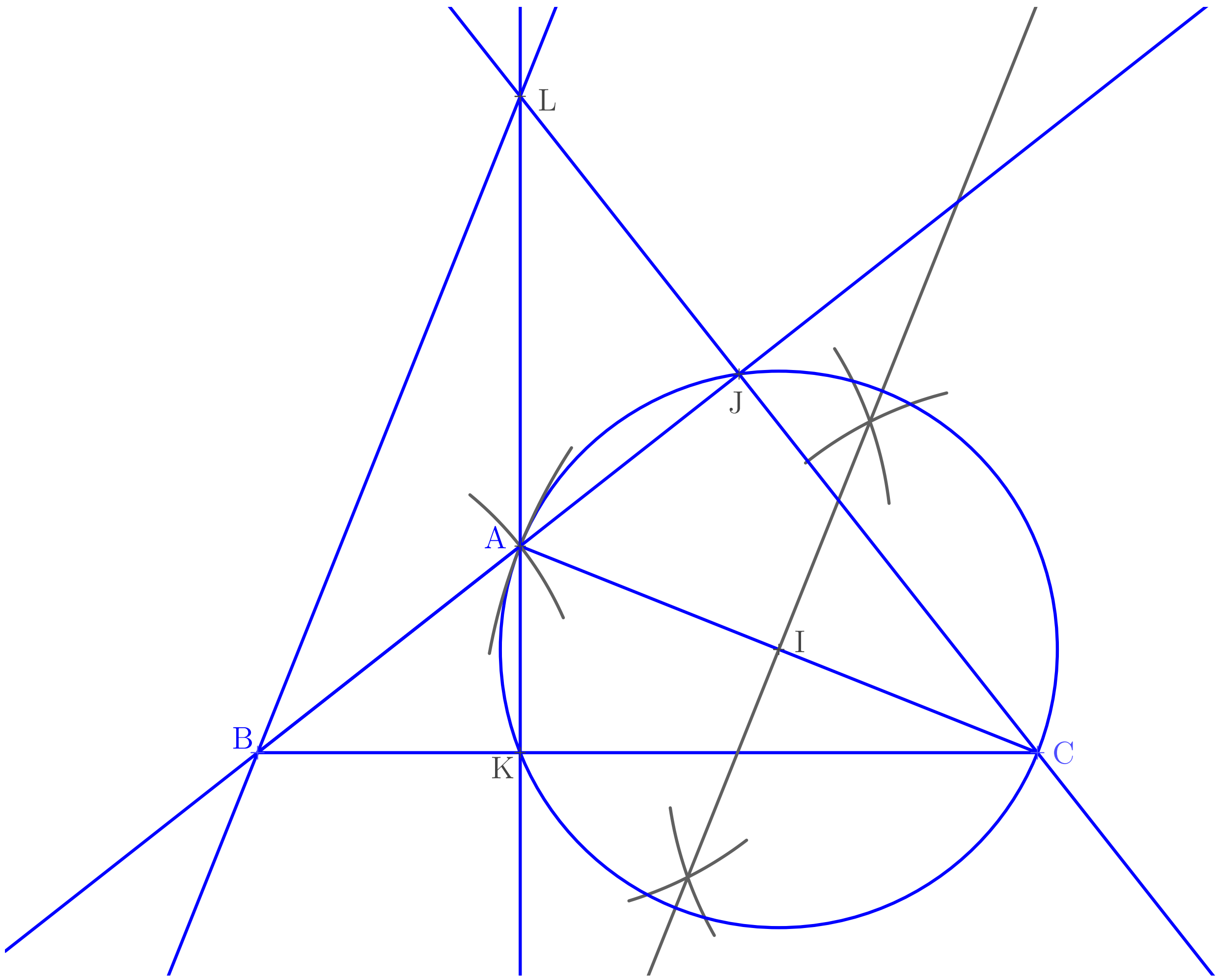


Exercice 11 (CRPE – Antilles – 1993)**.**

1. Construire à la règle graduée et au compas un triangle ABC tel que BC = 105 mm, AC = 75 mm et AB = 45 mm.
2. Construire à la règle non graduée et au compas le cercle de diamètre [AC].
3. Construire à la règle non graduée seule les trois hauteurs du triangle ABC.

Solution.

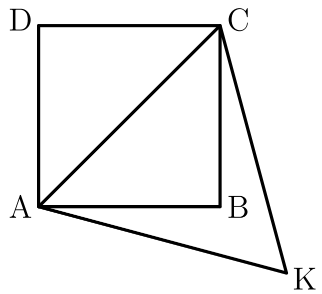
1. On trace le segment [BC] à l'aide de la règle graduée. Ensuite, à l'aide du compas, on construit le point A tel que AB = 45 mm et AC = 75 mm.
2. À l'aide du compas, on construit la médiatrice de [AC]. Elle coupe le segment [AC] en son milieu I. Il suffit ensuite de tracer le cercle de rayon [IC] centrée en I.
3. Notons J le pied de la hauteur issue de C et K le pied de la hauteur issue de A. Alors, les triangles AJC et AKC sont rectangles en J et K respectivement. Ainsi, J et K appartiennent au cercle de diamètre [AC], on peut donc les construire à la règle seule en prolongeant [AB]. Les hauteurs issue de A et C sont alors les droites (AK) et (CJ). Ces droites se coupent en l'orthocentre L du triangle. Pour construire la hauteur, il suffit alors de tracer (BL) car les trois hauteurs sont concourantes en L.



Exercice 12. Soit ABC un triangle non aplati. On note J le pied de la hauteur issue de C et K le pied de la hauteur issue de A. Montrer qu'il existe un cercle $\mathscr{C}$ passant par les points A, B, J et K.

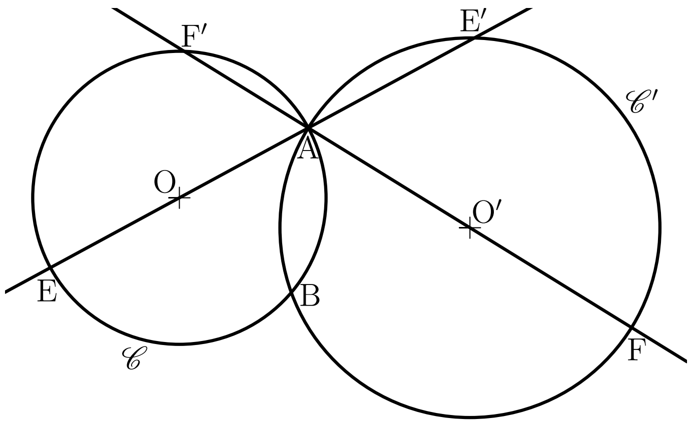
Solution. Il s'agit du cercle de diamètre [AC] (voir la figure ci-dessus).

Exercice 13. Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré et AKC est un triangle équilatéral.
Montrer que les points K, B et D sont alignés.



Solution. Comme ABCD est un carré, AB = AC = CD = AD donc (BD) est la médiatrice de [AC]. De plus, ACK est équilatéral donc AK = CK donc K appartient à (BC). Il s'ensuit que D, B et K sont alignés.

Exercice 14. Sur la figure ci-dessous, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles de centres respectifs O et O′ qui sont sécants en deux points A et B. On note E le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à A, F le point de $\mathscr{C}'$ diamétralement opposé à A, E′ le point d'intersection de (AE) avec $\mathscr{C}'$ et F′ le point d'intersection de (AF) avec $\mathscr{C}$.



1. Montrer que le point E, B et F sont alignés.

2. Montrer que les droites (EF′), (AB) et (FE′) sont concourantes.

Solution.

1. Comme B appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AE], $\widehat{EBA} = 90°$ et, comme B appartient au cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre [AF], $\widehat{FBA} = 90°$. On en déduit que $\widehat{EBF} = \widehat{EBA} + \widehat{FBA} = 90° + 90° = 180°$ donc les points E, B et F sont alignés.

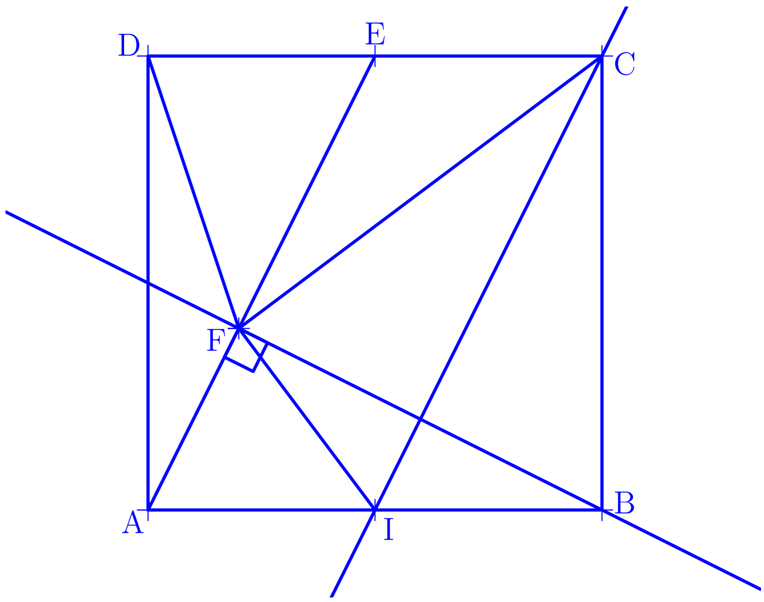
2. Notons G le point d'intersection des droites EF′et FE′. Alors, comme comme les points F′ et E′ appartiennent respectivement aux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, (EF′) est perpendiculaire à (AF′) et donc à (FF′) et (FE′) est perpendiculaire à (AE,) et donc à (EE′). Ainsi, (FF′) et (EE′) sont les hauteurs de EFG issues respectivement de F et E et donc, comme elles se coupent en A, A est l'orthocentre de EFG. Or, (AB) passe par A et est perpendiculaire à (EF) d'après la question 1., donc (AB) est la troisième hauteurs de EFG. Dès lors, (AB) passe par G et donc (EF′), (FE′) et (AB) sont concourantes en G.

Exercice 15. On considère un carré ABCD. On note E le milieu de [CD] et F le point d'intersection de la (AE) avec la perpendiculaire à (AE) passant par B.

1. Faire une figure.
2. On note I le milieu de [AB]. Montrer que (CI) est la médiatrice de [BF]
3. Conclure que les triangles BCF et DCF sont isocèles.

Solution.

1.



2. Comme le triangle AFB est rectangle en F, AFB est inscrit dans le cercle de centre I et de rayon IB donc IF = IB. Ainsi, I est équidistant de F et B. De plus, (AI) et (EC) sont parallèles et AI = EC donc AICE est un parallélogramme donc (AE) est parallèle à (CI). Or, (AE) est perpendiculaire à (FB) donc (CI) est également perpendiculaire à (FB). On en déduit que (CI) est la médiatrice de [FB].
3. Dès lors, CB = CF donc BCF est isocèle en C. De plus, CB = CD donc CF = CD et ainsi CDF est isocèle en C.

3) Théorème de Pythagore

Exercice 16. Dans chacun des cas suivants, déterminer si le triangle ABC est rectangle.

1. $AB = 3$, $BC = 5$ et $AC = 6$.
2. $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 2\sqrt{6}$ et $AC = 6$.

Solution.

1. Le plus grand côté est AC. On calcule donc $AB^2 + BC^2 = 3^2 + 5^2 = 34$ et $AC^2 = 6^2 = 36$. Ainsi, $AB^2 + BC^2 \neq AC^2$ donc, par la contraposée du sens direct du théorème de Pythagore, ABC n'est pas un triangle rectangle.
2. Le plus grand côté est AC. On calcule donc $AB^2+BC^2 = (2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{6})^2 = 12+24 = 36$ et $AC^2 = 6^2 = 36$. Ainsi, $AB^2+BC^2 = AC^2$ donc, par le sens réciproque du théorème de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en B.

Exercice 17. On considère un triangle ABC isocèle en A tel que AB mesure 17 cm et BC mesure 16 cm. Déterminer l'aire, en cm^2, de ABC.

Solution. Comme ABC est isocèle en A, la médiatrice issue de A est aussi une hauteur donc le pied H de la hauteur issue de A est le milieu de [BC]. Ainsi, $\text{BH} = \dfrac{16}{2} = 8$. De plus, comme ABH est rectangle en H, par le théorème de Pythagore, $\text{AH}^2 = \text{AB}^2 - \text{BH}^2 = 17^2 - 8^2 = 225$ donc $\text{AH} = \sqrt{226} = 15$. On conclut que l'aire, en cm^2, de ABC est $\dfrac{16 \times 15}{2} = 120$.

Exercice 18.

1. Montrer que la diagonale d'un carré de coté a est $a\sqrt{2}$.

2. Montrer que la hauteur d'un triangle équilatéral est $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Solution.

1. Considérons un carré ABCD de côté a. Alors, le triangle ABC est rectangle en B donc, par le théorème de Pythagore, $\text{AC}^2 = \text{AB}^2 + \text{BC}^2 = 2a^2$. Dès lors, $\text{AC} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{a^2} = a\sqrt{2}$.

2. Considérons un triangle équilatéral ABC. Notons H le milieu de [AB] de sote que $\text{AH} = \dfrac{a}{2}$. Comme ABC est en particulier isocèle, H est aussi le pied de la hauteur issue de C. De plus, CAH est rectangle en H donc, par le théorème de Pythagore, $\text{CH}^2 = \text{AC}^2 - \text{AH}^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$. Ainsi, $\text{CH} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{a^2}}{\sqrt{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

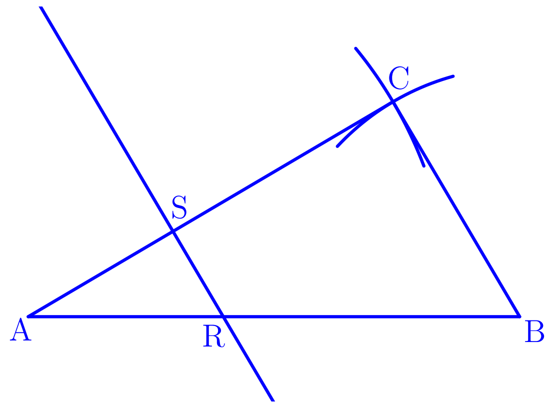
Exercice 19 (d'après CRPE – Groupement 1 - 2016)**.** On considère un triangle ABC tel que AB = 65 cm, AC = 56 cm et BC = 33 cm. On note R un point de [AB] distinct de A et B. La perpendiculaire à [AC] passant par R coupe [AC] en S.

1. Faire une figure à l'échelle 1/10.

2. Montrer que les droites (BC) et (RS) sont parallèles.

Solution.

1.



2. Étant donné que $\text{AC}^2 + \text{CB}^2 = 56^2 + 33^2 = 4\,225$ et $\text{AB}^2 = 65^2 = 4\,225$, $\text{AC}^2 + \text{CB}^2 = \text{AB}^2$ donc, par le sens réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B. Ainsi, (BC) est perpendiculaire à (AC) et, par définition (RS) est également perpendiculaire à (AC) donc (RS) et (BC) sont parallèles.

Exercice 20. On considère un triangle ABC rectangle en A tel que AB mesure 3 cm et AC mesure 5cm. On note H le pied de la hauteur issue de A.

Déterminer la longueur AH.

Solution. Calculons l'aire de ABC de deux façons. D'abord, comme ABC est rectangle en A, la hauteur associé à [AC] est AB donc l'aire de ABC est $\frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{AC}}{2} = \frac{3 \times 5}{2} = 7{,}5 \text{ cm}^2$.

D'autre part, l'aire de ABC est également égale à $\frac{\mathrm{BC} \times \mathrm{AH}}{2}$ donc $\mathrm{BC} \times \mathrm{AH} = 2 \times 7{,}5 = 15 \text{ cm}^2$.

De plus, comme ABC est rectangle en A, par le théorème de Pythagore, $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 3^2 + 5^2 = 34$ donc $\mathrm{BC} = \sqrt{34}$ cm. Ainsi, on conclut que $\sqrt{34} \times \mathrm{AH} = 15$ donc $\mathrm{AH} = \frac{15}{\sqrt{34}}$ cm c'est-à-dire $\mathrm{AH} \approx 2{,}6$ cm.

Exercice 21. En utilisant un compas et une règle graduée, comment construire de façon exacte un segment de longueur $\sqrt{5}$ cm ?

Solution. À la règle graduée, on trace un segment [AB] de longueur 4 cm. À l'aide du compas et de la règle, on trace la médiatrice Δ de [AB]. Celle-ci coupe le segment [AB] en son milieu I. À l'aide du compas, on trace le cercle de centre I et de rayon 1 et on note C l'un des deux points d'intersection du cercle avec Δ. Ainsi, par construction, $\mathrm{CI} = 1$ cm, $\mathrm{CB} = 2$ cm et le triangle CIB est rectangle en I. Dès lors, par le théorème de Pythagore, $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{BI}^2 + \mathrm{IC}^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ donc $\mathrm{BC} = \sqrt{5}$ cm.

Exercice 22 (CRPE – Besançon – 2005)**.** Soit a, b et c trois entiers tels que $c \geqslant b \geqslant c > 0$. On suppose que a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle rectangle. Montrer que l'un au moins de ce ces trois nombres est pair.

Solution. Comme a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle rectangle et comme a est le plus grand côté, par le théorème de Pythagore, $a^2 = b^2 + c^2$.

Si b ou c est pair alors on a terminé. Sinon, b et c sont impairs donc, comme un entier et son carré ont la même parité, b^2 et c^2 sont également impairs et la somme de deux nombres impairs est paire. Ainsi, a^2 est pair et donc a est pair.

Ainsi, dans tous les cas, l'un des trois nombres a, b ou c est pair.

Exercice 23 (d'après CRPE – Groupement 3 – 2016)**.** On considère trois points A, B et C tels que $\mathrm{AB} = 8$ cm, $\mathrm{AC} = 6$ cm et les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

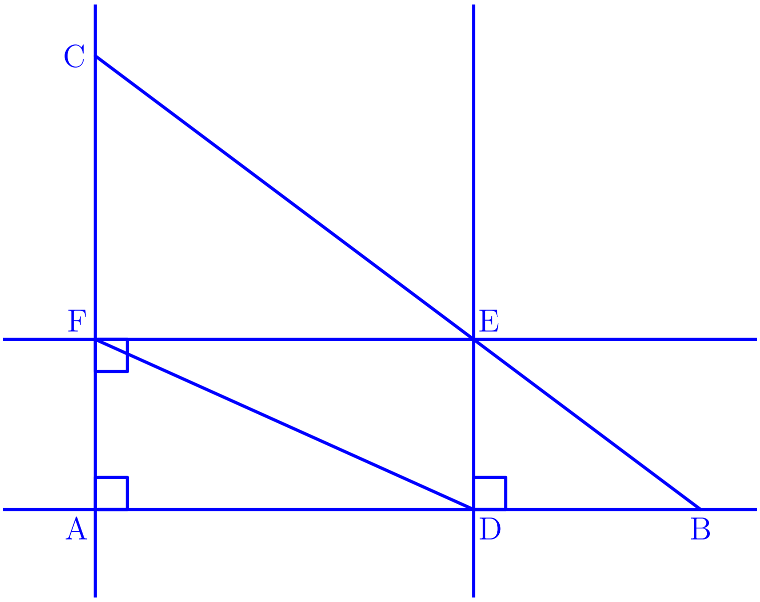
On place un point D sur [AB] distinct de A et de B, on note E le point d'intersection de la perpendiculaire à [AB] passant par D avec [BC] et F le point d'intersection de la perpendiculaire à [AC] passant par E avec [AC].

Le but de l'exercice est de déterminer la distance DF est minimale lorsque D varie sur [AB].

1. Faire une figure.
2. Calculer la longueur BC.
3. Justifier que $\mathrm{AE} = \mathrm{DF}$.
4. Déterminer la position du point E tel que AE soit minimale.
   On suppose désormais que E est dans cette position.
5. En calculant l'aire de ABC de deux façons différentes, déterminer la longueur AE et en déduire la longueur DF minimale.

Solution.

1.



2. Comme ABC est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$ donc $BC = 10$ cm.

3. Le quadrilatère ABEF possède 4 angles droits donc c'est un rectangle. Dès lors, ces diagonales ont même longueur donc DF = AE.

4. D'après ke cours, AE est minimale lorsque (AE) est perpendiculaire à (BC) c'est-à-dire lorsque E est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

5. Comme ABC est rectangle en A, l'aire de ABC est $\dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{8 \times 6}{2}$ cm^2 = 24 cm^2.
D'autre part, l'aire de ABC est $\dfrac{AE \times BC}{2}$ cm^2 donc $AE \times BC = 48$ cm^2 et donc $AE = \dfrac{48}{10}$ cm = 4,8 cm. Comme, par ailleurs, DF = AE, on conclut que la valeur minimale de DF est 4,8 cm.

Exercice 24 (d'après CRPE – Groupement 1 – 2017)**.** Une entreprise de BTP est mandatée pour étudier la faisabilité de la réalisation d ?une portion d'autoroute et d'un nouvel échangeur dans la région de Bordeaux/Brive-la-Gaillarde/Montauban.

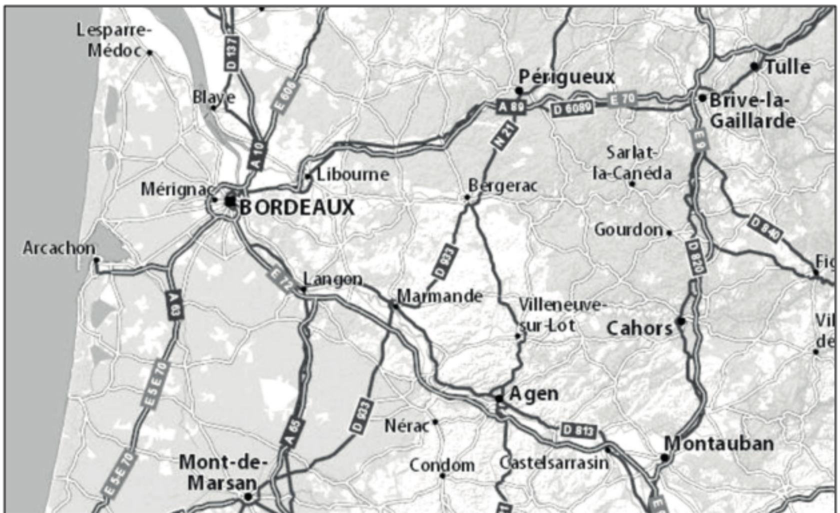


Figure 1 : Source = http://www.viamichelin.fr/

1. À vol d'oiseau, il y a 204,4 km entre Brive-la-Gaillarde et Bordeaux, 210 km entre Bordeaux et Montauban et 145,6 km entre Montauban et Brive-la-Gaillarde. On admet que cette situation géographique est modélisée par un triangle ABC, construit à une certaine échelle, dans lequel A représente Bordeaux, B représente Brive-la-Gaillarde et C représente Montauban.

Dans ce triangle, la longueur AB est 7,3 cm.

a. Montrer que la longueur AC est 7,5 cm et que la longueur BC est 5,2 cm.

b. Construire le triangle ABC.

c. Déterminer l'échelle utilisée pour modéliser la situation.

2. Dans le cadre d'un projet d'extension, la société d'exploitation mandate une entreprise de BTP pour étudier la construction d'une portion d'autoroute reliant Brive-la-Gaillarde et l'autoroute entre Bordeaux et Montauban. On cherche à construire la portion d'autoroute la plus courte possible.

Sur la figure construite précédemment, on note D le point du segment [AC] tel que la distance BD soit la plus courte possible. Le point D représente l'emplacement de l'échangeur à construire.

a. Placer le point D sur la figure et indiquer ce que représente la droite (BD) dans le triangle ABC.

b. Un théorème, appelé théorème d'Al Kashi, permet d'établir l'égalité suivante, que l'on admettra :

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2 \times \mathrm{AC} \times \mathrm{AD}.$$

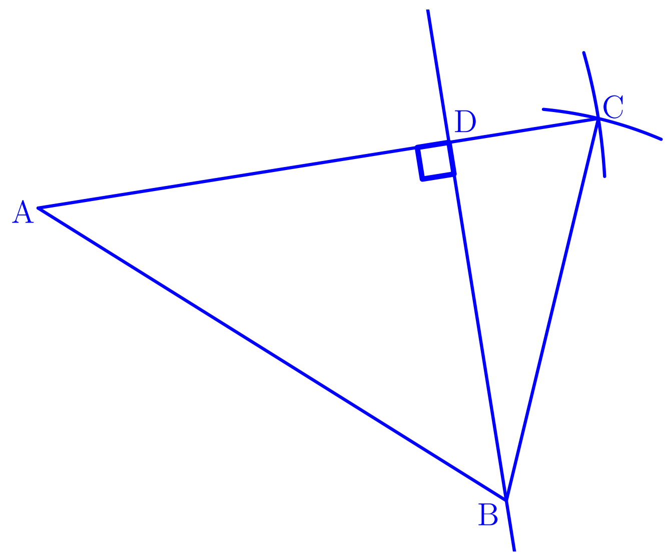
En utilisant cette égalité, montrer que AD = 5,5 cm.

c. En déduire les longueurs CD et BD.

Solution.

1. a. Il y a proportionnalité des distances donc $\dfrac{\mathrm{AB}}{204{,}4} = \dfrac{\mathrm{AC}}{210} = \dfrac{\mathrm{BC}}{145{,}6}$. On en déduit que $\mathrm{AC} = \dfrac{7{,}3 \times 210}{204{,}4}$ cm $= 7{,}5$ cm et que $\mathrm{BC} = \dfrac{7{,}3 \times 145{,}6}{204{,}4}$ cm $= 5{,}2$ cm.

b.



c. L'échelle est $\dfrac{7{,}3 \times 10^{-2}}{204{,}4 \times 10^3} = \dfrac{73 \times 10^{-3}}{2044 \times 10^2} = \dfrac{1}{2\,800\,000}$.

2. **a.** D'après le cours, le point D tel que BD soit minimale est le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

b. Grâce à la formule d'Al-Kashi,

$$2 \times \mathrm{AC} \times \mathrm{AD} = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2$$

donc

$$\mathrm{AD} = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2}{2 \times \mathrm{AC}}.$$

On en déduit que

$$\mathrm{AD} = \frac{7{,}3^2 + 7{,}5^2 - 5{,}2^2}{2 \times 7{,}5}\ \mathrm{cm} = 5{,}5\ \mathrm{cm}.$$

c. On en déduit que $\mathrm{CD} = 7{,}5\ \mathrm{cm} - 5{,}5\ \mathrm{cm} = 2\ \mathrm{cm}$.
En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABD rectangle en D, on obtient

$$\mathrm{BD}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{AV}^2 = 7{,}3^2\ \mathrm{cm}^2 - 5{,}5\ \mathrm{cm}^2 = 23{,}04\ \mathrm{cm}^2$$

donc $\mathrm{BD} = 4{,}8\mathrm{cm}$.