PPPE1 **mars 2023**

Dénombrement – Corrigés des exercices de révision

Exerice 1. On considère l'ensemble $E = \{a\,;b\,;c\,;d\,;e\,;f\,;g\,;h\}$ et les parties $A = \{a\,;b\,;e\,;f\}$ et $B = \{a\,;c\,;d\,;f\,;h\}$ de E.

1. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A \cup B}$ $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A \cap \overline{B}}$.
2. Déterminer le cardinale de E, de A, de B, de $A \cap B$ et de $A \cup B$.
3. Déterminer le nombre de parties de E.
4. Déterminer le nombre de parties de B et les écrire toutes.

Solution.

1. $A \cap B = \{a\,;f\}$, $A \cup B = \{a\,;b\,;c\,;d\,;e\,;f\,;h\}$, $\overline{A} = \{c\,;d\,;g\,;h\}$, $\overline{B} = \{b\,;e\,;g\}$, $\overline{A \cup B} = \{g\}$, $\overline{A \cap B} = \{b\,;c\,;d\,;e\,;g\,;h\}$ et, d'après les lois de de Morgan, $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup B = \{a\,;c\,;d\,;f\,;g\,;h\}$.
2. $\text{Card}(E) = 8$, $\text{Card}(A) = 4$, $\text{Card}(B) = 5$, $\text{Card}(A \cap B) = 2$ et $\text{Card}(A \cup B) = 7$.
3. Comme $\text{Card}(E) = 8$, le nombre de parties de E est $2^8 = 256$.
4. Comme $\text{Card}(B) = 5$, le nombre de parties de B est $2^5 = 32$. Ces parties sont $\varnothing$, $\{a\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{f\}$, $\{h\}$, $\{a\,;c\}$, $\{a\,;d\}$ $\{a\,;f\}$, $\{a\,;h\}$, $\{c\,;d\}$, $\{c\,;f\}$, $\{c\,;h\}$, $\{d\,;f\}$, $\{d\,;h\}$, $\{f\,;h\}$, $\{a\,;c\,;d\}$, $\{a\,;c\,;f\}$, $\{a\,;c\,;h\}$, $\{a\,;d\,;f\}$, $\{a\,;d\,;h\}$, $\{a\,;f\,;h\}$, $\{c\,;d\,;f\}$, $\{c\,;d\,;h\}$, $\{c\,;f\,;h\}$ $\{d\,;f\,;h\}$, $\{a\,;c\,;d\,;f\}$, $\{a\,;c\,;d\,;h\}$, $\{a\,;c\,;f\,;h\}$ $\{a\,;d\,;f\,;h\}$, $\{c\,;d\,;f\,;h\}$ et B.

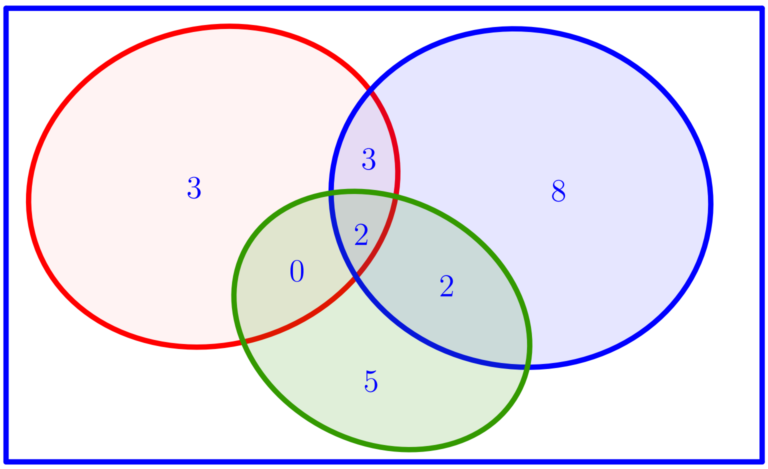
Exerice 2. Dans un groupe de 40 personnes, 8 parlent russe, 15 parlent anglais et 9 parlent allemand. De plus, parmi elles, 4 parlent anglais et allemand, 5 parlent anglais et russe, 2 parlent allemand et russe et 2 parlent les 3 langues.

1. Représenter la situation par un diagramme de Venn.
2. Déterminer le nombre de personnes ne parlant ni russe, ni anglais, ni allemand.

Solution.

1. L'énoncé est un peu ambigu concernant les personnes parlant plusieurs langues : il faut comprendre que celles qui parlent 2 langues peuvent aussi en parler une troisième. Ainsi, il y a $4-2=2$ personnes qui parlent uniquement anglais et allemand, $5-2=3$ personnes qui parlent uniquement anglais et russe et aucune qui parlent uniquement allemand et russe. Anisi, $15-2-3-2=8$ personnes qui parlent uniquement anglais, $9-2-0-2=4$ personnes qui parlent uniquement allemand et $8-3-0-2=3$ qui parlent uniquement russe.

   On peut représenter la situation par le diagramme de Venn ci-dessous sur lequel sont représentés en rouge les personnes parlant russe, en bleu les personnes parlant anglais et en vert les personnes parlant alemand.



2. On en déduit qu'il y a $3+3+2+8+2+5=23$ personnes parlant l'une des 3 langues donc il y a $40-23=17$ personnes ne parlant aucun des trois langues.

Exerice 3. Lors d'un enquête de satisfaction sur un produit, 18 personnes ont répondu aux questions suivantes :

- Avez-vous aimé le produit que vous avez testé ?
- L'achèteriez-vous ?

Dix personnes ont répondu « oui » à la première question, treize personnes ont répondu « non » à la seconde question et huit personnes ont répondu « non » aux deux questions.

1. Représenter la situation par un tableau.
2. Combien de personnes ont répondu « oui » aux deux questions ?

Solution.

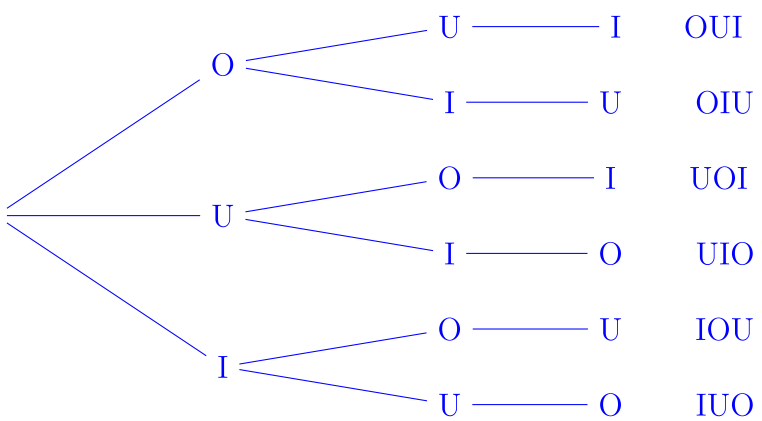
1. On peut représenter la situation par le tableau suivant :

	a aimé	n'a pas aimé	Total
achèterait	5	0	5
n'achèterait pas	5	8	13
Total	10	8	18

2. Ainsi, 5 personnes ont répondu « OUI » aux deux questions.

Exerice 4. À l'aide d'un arbre, déterminer tous les anagrammes de « OUI » possibles. Combien y en a-t-il ?

Solution.



Ainsi, le mot « OUI » possède 6 anagrammmes qui sont OUI, OIU, UOI, UIO, IOU et IUO.

Exerice 5. Un jury est composé de 10 personnes choisies parmi 9 hommes et 11 femmes.

1. Combien peut-on former de jurys différents ?
2. Combien peut-on former de jurys composés exclusivement de femmes ?
3. Combien peut-on former de jurys paritaires (c'est-à-dire composés d'autant d'hommes que de femmes) ?
4. Combien peut-on former de jurys comportant 1 seul homme ou 1 seule femme ?

Solution.

1. On peut former $\binom{20}{10} = \dfrac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10!}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 10!} = 19 \times 17 \times 13 \times 4 \times 11 = 184\,756$ jurys.
2. On peut former $\binom{11}{10} = 11$ jurys composés uniquement de femmes.
3. On peut former $\binom{9}{5} \times \binom{11}{5}$ jurys paritaires. Or, $\binom{9}{5} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!4 \times 3 \times 2 \times 1} = 3 \times 7 \times 6 = 126$ et $\binom{11}{5} = \dfrac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 6!} = 11 \times 3 \times 2 \times 7 = 462$ donc on peut former $126 \times 462 = 58\,212$ jurys paritaires.
4. Il y a $\binom{9}{1} \times \binom{11}{9} = 9 \times \dfrac{11 \times 10}{2} = 495$ jurys comportant un seul homme et $\binom{11}{1} \times \binom{9}{9} = 11 \times 1 = 11$ jurys comportant une seule femmes. Ainsi, il y a $495 + 11 = 506$ jurys comportant un seul homme ou une seule femme.

Exerice 6. Sept amis, 4 garçons et 3 filles, se rendent à un concert. Ils s'assoient les uns à côté des autres dans la même rangée.

1. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?
2. Combien y a-t-il de dispositions dans lesquelles les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre ?
3. Combien y a-t-il de dispositions dans lesquelles les garçons et les filles sont intercalés ?

Solution.

1. Il y a $7! = 5\,040$ dispositions possibles.
2. Il n'y a que deux dispositions possible : les garçons à gauche et les filles à droite ou le contraire.
3. Comme il y a plus de garçons que de filles, la disposition est nécessairement G-F-G-F-G-F-G. On en déduit qu'il y a $4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$ dispositions possibles.

Exerice 7.

1. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot DIJON ?
2. Parmi ces anagrammes, combien commencent par un D ?
3. Parmi ces anagrammes, combien commencent par une consonne ?

Solution.

1. Comme les lettres du mot DIJON sont tous distinctes, il y a $5! = 120$ anagrammes possibles.
2. Parmi ceux-ci, $4! = 24$ commencent par un D.
3. De la même façon, il y en a 24 qui commencent par un J et 24 qui commencent par un N donc il y a en $3 \times 24 = 72$ qui commencent par une consonne.

Exerice 8. Ruben doit trouver un code composé de 8 symboles différents.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Parmi les symboles, figurent ♦ et ∞.
   a. Combien y a-t-il de codes qui commencent par ♦ ?
   b. Combien y a-t-il de codes qui commencent par ♦ et qui finissent par ∞ ?

Solution.

1. Il y a $8! = 40\,320$ codes possibles.

2. **a.** Il y a $7! = 5\,040$ codes commençant par $\blacklozenge$.

b. Il y a $6! = 720$ codes commençant par $\blacklozenge$ et finissant par ∞.

Exerice 9. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot REMETTRE.

Solution. Pour déterminer une anagramme du mot REMETTRE, on peut :

- choisir la place des 3 E ; il y a $\binom{8}{3} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 56$ choix ;
- choisir la place des 2 R parmi les 5 places restantes : il y a $\binom{5}{2} = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$ choix ;
- choisir la place des 2 T parmi les 3 places restantes : il y a $\binom{3}{2} = \dfrac{3 \times 2}{2} = 3$ choix ;
- il n'y a plus qu'une seule place possible pour la lettre M.

Ainsi, le nombre d'anagramme du mot REMETTRE est $56 \times 10 \times 3 = 1\,680$.

Exerice 10. La gamme de Do comprend les notes Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La et Si. Un accord est un ensemble de notes jouées simultanément.

1. Combien existe-t-il d'accords de 2 notes ?

2. Combien existe-t-il d'accords de 3 notes ?

3. Combien existe-t-il d'accords de 3 notes qui contiennent le Do ?

Solution.

1. Il y a $\binom{7}{2} = \dfrac{7 \times 6}{2} = 21$ accords à 2 notes.

2. Il y a $\binom{7}{3} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 35$ accords à 3 notes.

3. Si l'accord contient le Do, il ne reste plus que 2 autres notes à choisir. Il y a donc $\binom{6}{2} = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15$ accords à 3 notes qui contiennent un Do.

Exerice 11. Combien y a-t-il de nombres à 6 chiffres qui contiennent exactement 2 fois le chiffre 5 ?

Solution. Comme le premier chiffre d'un nombre à 6 chiffres ne peut pas être 0, il faut distinguer 2 cas.

Si le premier chiffre du nombre est 5, il faut choisir la place l'autre 5 : il y a 5 choix puis choisir les 4 autres nombres différents de 5 : il y a $9^4 = 6\,561$ choix. Ainsi, il y a $5 \times 6\,561 = 32\,805$ nombres a 6 chiffres commençant par 5 et contenant exactement deux 5.

Sinon, pour déterminer un tel nombre, on peut :

- choisir la place des 2 chiffres 5 : il y a $\binom{5}{2} = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$ possibilités ;
- choisir les 4 autres nombres différents (et le premier différent de 0) : il y a $8 \times 9^3 = 5\,832$ possibilités.

Ainsi, il y a $10 \times 5\,832 = 58\,320$ nombres à 6 chiffres contenant deux 5 et ne commençant pas par 5.

Finalement, on conclut qu'il y a $32\,805 + 58\,320 = 91\,125$ nombres à 6 chiffres contenant exactement deux 5.

Exerice 12. On dispose dans un sac 8 boules : 3 noires, 2 rouges et 3 vertes.

1. On tire simultanément 3 boules du sac.
   a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   b. Combien de tirages comportent exactement 2 boules noires ?
   c. Combien de tirages comportant au moins 1 boule noire ?
2. On tire simultanément deux boules du sac.
   Combien de tirages comportent 2 boules de la même couleur ?

Solution.

1. a. Il y a $\binom{8}{3} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 56$ tirages possibles.
   b. Il y a $\binom{3}{2} \times \binom{5}{1} = 3 \times 5 = 15$ tirages qui contiennent exactement deux boules noires.
   c. Il y a $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$ tirages qui ne contiennent pas de boules noires donc il y a $56 - 10 = 46$ tirages qui contiennent au moins une boule noire.
2. Il y a $\binom{3}{2} = 3$ tirages qui contiennent 2 boules noires, $\binom{2}{2} = 1$ tirages qui contiennent 2 boules rouges et $\binom{3}{2} = 3$ tirages qui contiennent 2 boules vertes. Ainsi, il y a $3+1+3 = 7$ tirages qui contiennent deux boules de la même couleur.

Exerice 13. On a placé dans une urne opaque cinq jetons noirs, trois jetons blancs et un jeton rouge indiscernables au toucher.

1. On tire un jeton de l'urne, on le remet dans l'urne et on en tire un second.
   a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   b. Combien de tirages comportent un jeton rouge ?
   c. Combien de tirages ne comportent que des jetons blancs ?
2. On tire un jeton puis un second sans remettre le premier.
   a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   b. Combien de tirages comportent un jeton rouge ?
   c. Combien de tirages ne comportent que des jetons blancs ?
3. On tire 2 jetons simultanément dans l'urne.
   a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   b. Combien de tirages comportent un jeton rouge ?
   c. Combien de tirages ne comportent que des jetons blancs ?

Solution.

1. a. Il y a $9^2 = 81$ tirages possibles.
   b. Il y a $8^2 = 64$ tirages qui ne comportent pas de jetons rouges donc il y a $81 - 64 = 17$ tirages qui comportent un jeton rouge.
   c. Il y a $3^2 = 9$ tirages qui ne comportant que des jetons blancs.
2. a. Il y a $9 \times 8 = 72$ tirages possibles.
   b. Il y a $8 \times 7 = 56$ tirages qui ne comportent pas de jetons rouges donc il y a $72 - 56 = 16$ tirages qui comportent un jeton rouge.

c. Il y a $3 \times 2 = 6$ tirages qui ne comportant que des jetons blancs.

3. a. Il y a $\binom{9}{2} = \dfrac{9 \times 8}{2} = 36$ tirages possibles.

b. Il y a $\binom{8}{2} = \dfrac{8 \times 7}{2} = 28$ tirages qui ne comportent pas de jetons rouges donc il y a $36 - 28 = 8$ tirages qui comportent un jeton rouge.

c. Il y a $\binom{3}{2} = 3$ tirages qui ne comportant que des jetons blancs.

Exerice 14. On tire une main de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien de mains contiennent exactement un roi, un dame et deux valets ?
2. Combien de mains contiennent l'as de pique et au moins deux trèfles ?
3. Combien de mains contiennent exactement un roi et deux carreaux ?
4. Combien de mains contiennent exactement trois cartes de couleur noire ?

Solution.

1. Il y a $\binom{4}{1} = 4$ choix pour le roi, $\binom{4}{1} = 4$ choix pour la dame, $\binom{4}{2} = \dfrac{4 \times 3}{2} = 6$ choix pour les deux valets et $\binom{20}{1} = 20$ choix pour la dernière carte qui n'est ni un roi, ni une dame, ni un valet. Ainsi, il y a $4^2 \times 6 \times 20 = 1\,920$ mains possibles.

2. Pour ne pas compter 2 fois les mêmes mains, il faut distinguer si la main contient 2, 3 ou 4 trèfles.
Il y a $\binom{4}{2} \times \binom{27}{2} = \dfrac{4 \times 3}{2} \times \dfrac{27 \times 26}{2} = 6 \times 27 \times 13 = 2\,106$ mains qui contiennent l'as de pique et exactement 2 trèfles.
Il y a $\binom{4}{3} \times \binom{27}{1} = 4 \times 27 = 108$ mains qui contiennent l'as de pique et exactement 3 trèfles.
Il y a 1 seule main qui contient l'as de pique et exactement 4 trèfles.
Ainsi, il y a $2\,106 + 108 + 1 = 2\,215$ mains qui contiennent l'as de pique et au moins 2 trèfles.

3. Ici, il faut distinguer selon que le tirage contient le roi de carreau ou non.
S'il contient le roi de carreau, il reste un carreau à choisir parmi les 7 autres et 3 cartes à choisir parmi les 21 qui ne sont ni des rois ni des carreaux. Cela laisse $7 \times \binom{21}{3}$ choix.
Or, $\binom{21}{3} = \dfrac{21 \times 20 \times 19 \times 18!}{3 \times 2 \times 1 \times 18!} = 7 \times 10 \times 19 = 1\,330$ donc il y a $7 \times 1\,330 = 9\,310$ choix.
S'il ne contient pas le roi de carreau, il contient 1 roi choisi parmi les 3 autres rois, 2 carreaux autres que le roi et 2 autres cartes choisies parmi les 21 qui ne sont ni des rois ni des carreaux. Cela laisse donc $3 \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{2}$ choix. Or, $\binom{7}{2} \times \binom{21}{2} = \dfrac{7 \times 6}{2} \times \dfrac{21 \times 20}{2} = 21 \times 210 = 4\,410$ donc il y a $3 \times 4\,410 = 13\,230$ choix.
Par le principe additif, on conclut qu'il y a $9\,310 + 13\,230 = 22\,540$ tirages qui contiennent exactement 1 roi et 2 carreaux.

4. Il s'agit de choisir 3 cartes parmi les 16 noires et 2 cartes parmi les 2 rouges. Il y a $\binom{16}{3} \times \binom{16}{2}$ choix. Or, $\binom{16}{3} = \dfrac{16 \times 15 \times 14 \times 13!}{3 \times 2 \times 1 \times 13!} = 16 \times 4 \times 6 = 560$ et $\binom{16}{2} = \dfrac{16 \times 15}{2} = 8 \times 15 = 120$.
Ainsi, il y a $560 \times 120 = 67\,200$ contenant exactement 3 cartes de couleur noire.