⧫ Corrigés des exercices du chapitre 8

1) Expériences aléatoires et évènements

Exercice 1. Une urne contient cinq boules rouges numérotées 1, 1, 2, 4 et 4, quatre boules bleues numérotées 1, 1, 2 et 4 et six boules vertes numérotées 1, 1, 1, 2, 2 et 4.

On tire une boule au hasard dans l'urne. Déterminer l'univers de l'expérience

1. si on s'intéresse à la couleur de la boule tirée ;

2. si on s'intéresse au numéro de la boule tirée.

Solution.

1. Si on s'intéresse à la couleur de la boule tirée, l'univers est $\{\text{rouge}, \text{bleue}, \text{verte}\}$.

2. Si on s'intéresse au numéro de la boule tirée, l'univers est $\{1, 2, 4\}$.

Exercice 2. On lance deux dés cubiques équilibrés et on calcule le produit des deux nombres obtenus.

Déterminer l'univers de cette expérience aléatoire.

Solution. On peut utiliser un tableau pour déterminer toutes les issues possibles :

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Ainsi, l'univers de l'expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$.

Exercice 3. On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Dans chacun des cas suivants, déterminer le cardinal de l'univers :

1. on s'intéresse aux deux nombres obtenus en distinguant les deux dés ;

2. on s'intérese aux deux nombres obtenus sans distinguer les deux dés.

Solution.

1. Si on distingue les deux dés, une issue est un couple de deux nombres entiers entre 1 et 6 donc le cardinal de l'univers est $6^2 = 36$.

2. Si on ne distingue pas les deux dés, une issue est une paire de deux entiers entre 1 et 6 (sans ordre donc). Il y a $\binom{6}{2} = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15$ paires de nombres distincts et 6 paires de nombres identiques.

Ainsi, dans ce cas, le cardinal de l'univers est $15 + 6 = 21$.

Exercice 4. On lance un dé cubique. Pour chacun des évènements suivants, dire s'il est élémentaire, impossible, certain ou aucun des trois.

1. A : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 » ;
2. B : « Obtenir un multiple de 3 » ;
3. C : « Obtenir un multiple de 7 » ;
4. D : « Obtenir un diviseur de 7 » ;
5. E : « Obtenir un diviseur de 12 ».

Solution.

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ est un évènement certain.
2. $B = \{3, 6\}$ est une évènement quelconque.
3. $C = \varnothing$ est un évènement impossible.
4. $D = \{1\}$ est un évènement élémentaire.
5. $E = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ est un évènement quelconque.

2) Loi de probabilité

Exercice 5. On reprend la situation de l'exercice 1.

1. Déterminer la probabilité de tirer une boule rouge.
2. Déterminer la probabilité de tirer une boule portant le numéro 1.
3. On tire à présent deux boules dans l'urne.
   a. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?
   b. Quelle est la probabilité de tirer deux boules portant le numéro 1 ?

Solution.

1. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 15 boules. Ainsi, la probabilité de tirer une boule rouge est $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.
2. De même, la probabilité de tirer une boule portant le numéro 1 est $\frac{7}{15}$.
3. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des $\binom{15}{2} = \frac{15\times14}{2} = 105$ tirages de deux boules.
   a. La probabilité de tirer deux boules rouges est $\frac{\binom{5}{2}}{105} = \frac{\frac{5\times4}{2}}{105} = \frac{10}{105} = \frac{2}{21}$.
   b. La probabilité de tirer deux boules portant le numéro 1 est $\frac{\binom{7}{2}}{105} = \frac{\frac{7\times6}{2}}{105} = \frac{21}{105} = \frac{1}{5}$.

Exercice 6. Un cadenas possède un code à 3 chiffres. On tente un code au hasard. Quelle est la probabilité de trouver le bon code ?

Solution. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des $10^3 = 1000$ codes possibles.

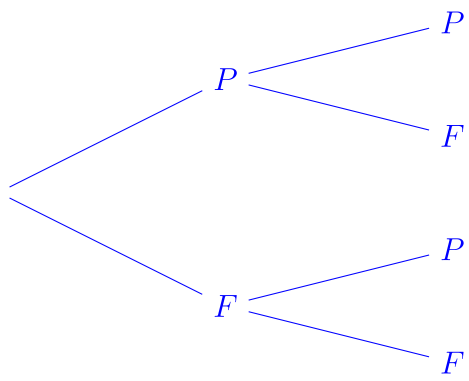
Ainsi, la probabilité de trouver le bon code en essayant un code au hasard est $\frac{1}{1000}$.

Exercice 7. On lance deux fois de suite une pièce équilibrée.

1. Représenter la situation par un arbre.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois *pile* ?

Solution.

1. On note P pour *pile* et F pour *face*.



2. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 4 issues : PP, PF, FP et FF. La probabilité d'obtenir deux fois *pile* est donc $\frac{1}{4}$.

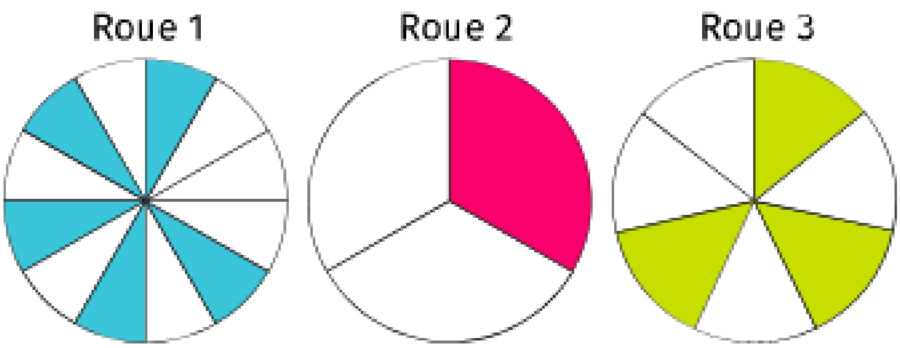
Exercice 8. On dispose d'un dé truqué tel que la probabilité d'obtenir une face soit proportionnelle au chiffre porté par cette face. On lance ce dé.

1. Déterminer la probabilité de chaque face.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?

Solution.

1. Par hypothèse, il existe un coefficient de proportionnalité k tel que $P(1) = k$, $P(2) = 2k$, $P(3) = 3k$, $P(4) = 4k$, $P(5) = 5k$ et $P(6) = 6k$. Ainsi, comme la somme de ces probabilités vaut 1, $k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 1$ c'est-à-dire $21k = 1$ donc $k = \frac{1}{21}$. On en déduit que $P(1) = \frac{1}{21}$, $P(2) = \frac{2}{21}$, $P(3) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$, $P(4) = \frac{4}{21}$, $P(5) = \frac{5}{21}$ et $P(6) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.
2. La probabilité d'obtenir un chiffre pair est donc $P(2) + P(4) + P(6) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21}$.

Exercice 9. Lors d'une kermesse, dans un stand, sont disposées les trois roues ci-dessous.

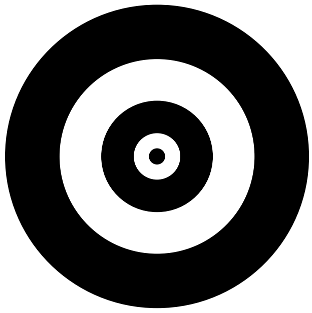


Tous les secteurs angulaires d'une même roue ont la même aire. Le joueur doit choisir une des trois roues et la lancer. Il remporte un lot s'il tombe sur un secteur coloré. Quelle roue le joueur a-t-il intérêt à choisir ?

Solution. Pour chaque roue, on modélise l'expérience par un probabilité proportionnelle à l'aire du secteur angulaire. Comme, sur une roue donnée, les secteurs angulaires ont même aire, cela revient à modéliser par l'équiprobabilité sur les secteurs angulaires. Ainsi, pour la Roue 1, la probabilité de remporter un lot est $\frac{5}{12}$, pour la Roue 2, est est égale à $\frac{1}{3}$ et, pour la Roue 3, elle est égale à $\frac{3}{7}$. Or, $\frac{1}{3} = \frac{4}{12} < \frac{5}{12}$ et $\frac{3}{7} = \frac{36}{84}$ et $\frac{5}{12} = \frac{35}{84}$ donc $\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{3}{7}$.

Ainsi, pour maximiser ses chances de gain, un joueur a intérêt à choisir la Roue 3.

Exercice 10. Un joueur lance une fléchette sur une cible de rayon 20 cm partagée en 5 secteurs délimités par les cercles de rayons 1 cm, 3 cm, 7 cm et 13 cm. En supposant que la fléchette atteint un point « au hasard » sur la cible, quelle est la probabilité qu'elle atteigne chacun des 5 secteurs ?



Solution. On modélise l'expérience par une probabilité proportionnelle à l'aire du secteur.

L'aire totale, en cm^2 de la cible est $\pi \times 20^2 = 400\pi$.

L'aire, en cm^2 du petit disque central est $\pi \times 1^2 = \pi$ donc la probabilité d'atteindre ce secteur est $\frac{\pi}{400\pi} = \frac{1}{400}$.

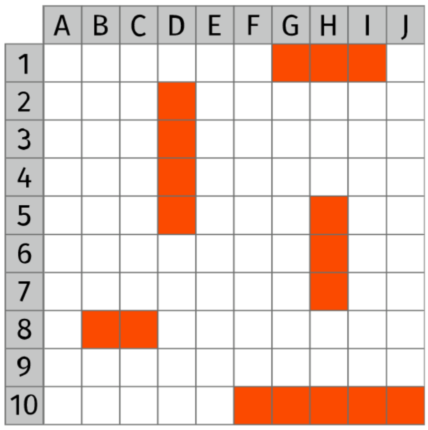
L'aire, en cm^2, de la petite couronne blanche est $\pi \times 3^2 - \pi = 8\pi$ donc la probabilité d'atteindre ce secteur est $\frac{8\pi}{400\pi} = \frac{1}{50}$.

L'aire, en cm^2, de la petite couronne noire est $\pi \times 7^2 - \pi \times 3^2 = 40\pi$ donc la probabilité d'atteindre ce secteur est $\frac{40\pi}{400\pi} = \frac{1}{10}$.

L'aire, en cm^2, de la grande couronne blanche est $\pi \times 13^2 - \pi \times 7^2 = 120\pi$ donc la probabilité d'atteindre ce secteur est $\frac{120\pi}{400\pi} = \frac{3}{10}$.

L'aire, en cm^2, de la grande couronne noire est $\pi \times 20^2 - \pi \times 13^2 = 231\pi$ donc la probabilité d'atteindre ce secteur est $\frac{231\pi}{400\pi} = \frac{231}{400}$.

Exercice 11. À la bataille navale, chaque joueur a une flotte composée de cinq bateaux : un porte-avions (5 cases), un croiseur (4 cases), un contre-torpilleur (3 cases), un sous-marin (3 cases) et un torpilleur (2 cases). Un joueur a disposé ses bateaux comme représentés ci-contre. Les bateaux sont obligatoirement disposés horizontalement ou verticalement. L'autre joueur choisit de tirer sur une case au hasard.



1. Quelle est la probabilité qu'il touche un bateau ?

2. Quelle est la probabilité qu'il touche un bateau s'il décide de ne tirer que dans les colonnes D et H ?

3. Au tour précédent, il a touché la case D4. Quelle est la probabilité de toucher à nouveau le croiseur en jouant intelligemment ?

Solution.

1. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 100 cases de la grille. La probabilité de toucher un bateau est alors $\frac{17}{100}$.

2. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 20 cases des colonnes D et H. La probabilité de toucher un bateau est $\frac{9}{20}$.

3. Si le joueur a touché un bateau en cases D4, il a intérêt à jouer ensuite sur l'un des cases D3, D5, C4 ou E4. On modélise donc l'expérience par l'équiprobabilité sur ces 4 cases. La probabilité de toucher un bateau est alors $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Exercice 12. Un loto est organisé. On tire au hasard, successivement et sans remise, des jetons dans une urne qui contient 100 jetons numérotés de 0 à 99.

Pour jouer, on utilise une grille composée de 3 lignes. Sur chaque ligne, il y a 5 numéro et tous les numéros de la grille sont différents.

1. Quelle est la probabilité que le premier numéro tiré figure sur la grille ?
2. On suppose que le premier numéro tiré n'est pas sur la grille. Quelle est la probabilité que le second numéro tiré figure sur la grille ?
3. On suppose que le premier numéro tiré est sur la grille. Quelle est la probabilité que le second numéro tiré figure également sur la grille ?

Solution.

1. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 100 nombres de 0 à 99. La probabilité que le premier tiré figure sur la grille $\dfrac{15}{100} = \dfrac{3}{20}$.
2. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 99 nombres qui n'ont pas encore été tirés. Comme le premier nombre tiré ne figure pas sur la grille, les 15 numéros de la grille font partie de ces 99 nombres donc la probabilité que le second tiré figure sur la grille est $\dfrac{15}{99} = \dfrac{5}{33}$.
3. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 99 nombres qui n'ont pas encore été tirés. Comme le premier nombre tiré figure sur la grille, il reste 14 numéros de la grille qui font partie de ces 99 nombres donc la probabilité que le second tiré figure sur la grille est $\dfrac{14}{99}$.

Exercice 13. On dispose de deux dés cubiques parfaitement équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer simultanément ces deux dés et à soustraire le plus petit des deux nombres au plus grand. Par exemple, si on obtient 3 et 5, l'issue est $5 - 3 = 2$. Si on obtient le même nombre sur les deux dés, l'issue est 0.

1. Compléter directement sur l'énoncé le tableau ci-dessous et en déduire l'univers de cette expérience.

dé 2 / dé 1	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

2. Les issues de l'expérience sont-elles équiprobables ?
3. Déterminer les probabilités des évènements suivants :
   A : « Obtenir 5 »
   B : « Obtenir un nombre pair »
   C : « Obtenir une nombre inférieur ou égal à 2 »

4. Un jeu consiste à deviner quel va être le résultat de cette expérience. Sur quelle valeur doit-on parier pour avoir la plus grande probabilité de gagner ?

Solution.

1.

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

2. Les lancers sont équiprobables donc la probabilité d'une issue est $\frac{m}{36}$ où m est le nombre de lancers qui réalisent cette issue. Comme toutes les issues ne correspondent pas au même nombre de lancer (par exemple, il y a 2 lancers qui donnent 5 mais 6 lancers qui donnent 6), on en déduit que les issues ne sont pas équiprobables.

3. $P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.
$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
$P(C) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

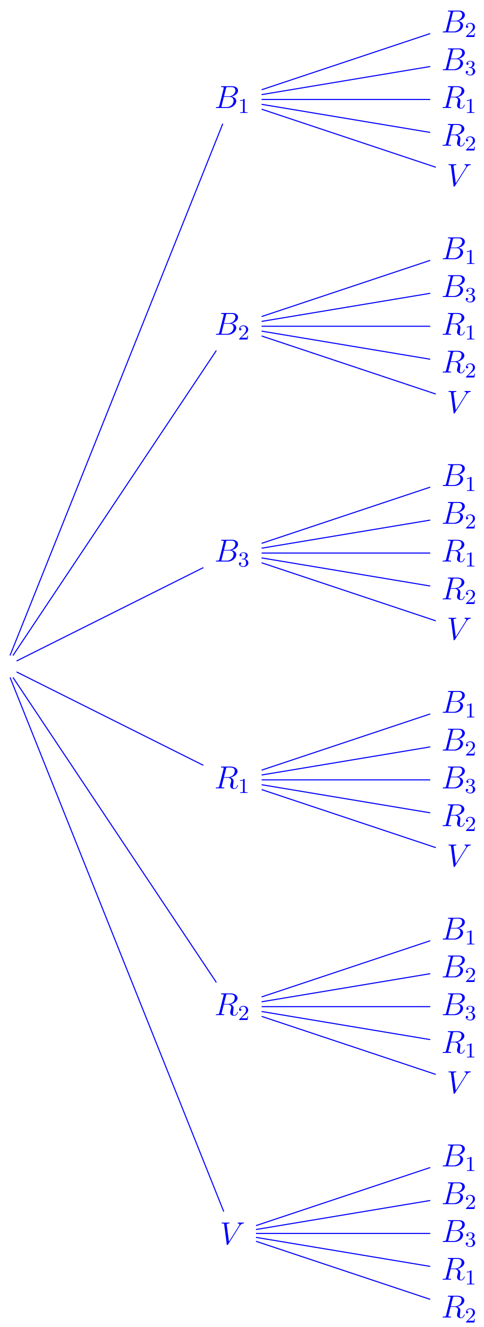
4. Le nombre qui apparaît le plus souvent est 1 avec 10 lancers donc c'est celui qui a la plus grande probabilité d'être obtenu. On a donc intérêt à parier sur le nombre 1 pour maximiser la probabilité de gagner.

Exercice 14. Une urne contient trois boules bleues, deux boules rouges et une boule verte. On tire successivement et sans remise deux boules dans l'urne.

1. Traduire la situation par un arbre de dénombrement.
2. Quelle est la probabilité :
   - **a.** de tirer deux boules de la même couleur ?
   - **b.** de ne pas tirer de boule bleue ?
   - **c.** de tirer au moins une boule verte ?

Solution.

1. Notons B_1, B_2 et B_3 les trois boules bleues, R_1 et R_2 les deux boules rouges et V la boule verte. Comme la première boule tirée n'est pas remise dans l'urne, on obtient l'arbre suivant :



2. Ici, il n'y a pas équiprobabilité sur les couleurs mais sur les boules. On modélise donc l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des tirages possibles. D'après l'arbre, il y a $6 \times 5 = 30$ tirages possibles.

a. La probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est $\dfrac{8}{30} = \dfrac{4}{15}$.

b. La probabilité de ne pas tirer de boule bleue est $\dfrac{6}{30} = \dfrac{1}{5}$.

c. La probabilité de tirer au moins une boule verte est $\dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 15. On tire simultanément trois cartes au hasard dans un paquet de 32 cartes. Quelle est la probabilité

1. de n'obtenir que des coeurs ?

2. de n'obtenir que des as ?

3. d'obtenir deux coeurs et un pique ?

Solution. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des $\binom{32}{3}$ tirages. Or, $\binom{32}{3} = \frac{32\times31\times30\times29!}{3\times2\times1\times29!} = 16 \times 31 \times 10 = 4960$.

1. Il y a $\binom{3}{8} = \frac{8\times7\times6\times5!}{3\times2\times1\times5!} = 56$ tirages qui ne contiennent que des cœurs donc la probabilité de n'obtenir que des cœurs est $\frac{56}{4960} = \frac{7}{620}$.

2. Il y a $\binom{3}{4} = 4$ tirages qui ne contiennent que des cœurs donc la probabilité de n'obtenir que des cœurs est $\frac{4}{4960} = \frac{1}{1240}$.

3) Union, intersection et complémentaire

Exercice 16. On donne $P(\mathrm{A}) = 0{,}4$, $P(\mathrm{B}) = 0{,}7$ et $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}2$. Calculer $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$.

Solution. Par théorème,

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}4 + 0{,}7 - 0{,}2 = 0{,}9.$$

Exercice 17. On donne $P(\mathrm{R}) = 0{,}6$, $P(\mathrm{S}) = 0{,}8$ et $P(\mathrm{R} \cup \mathrm{S}) = 0{,}9$. Calculer $P(\mathrm{R} \cap \mathrm{S})$.

Solution. Par théorème,

$$P(\mathrm{R} \cap \mathrm{S}) = P(\mathrm{R}) + P(\mathrm{S}) - P(\mathrm{R} \cup \mathrm{S}) = 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}9 = 0{,}5.$$

Exercice 18. On donne $P(\mathrm{E}) = 0{,}6$, $P(\mathrm{E} \cap \mathrm{F}) = 0{,}5$ et $P(\mathrm{E} \cup \mathrm{F}) = 0{,}7$. Calculer $P(\mathrm{F})$.

Solution. Par théorème, $P(\mathrm{E}\cup\mathrm{F}) = P(\mathrm{E}) + P(\mathrm{F}) - P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})$ donc $0{,}7 = 0{,}6 + P(\mathrm{F}) - 0{,}5 = 0{,}1 + P(\mathrm{F})$ donc $P(\mathrm{F}) = 0{,}6$.

Exercice 19. On pioche au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On considère les évènements F : « On obtient une figure » et T : « On obtient un trèfle ».

1. Déterminer $P(\mathrm{F})$ et $P(\mathrm{T})$.

2. Déterminer $P(\mathrm{F} \cap \mathrm{T})$ et $P(\mathrm{F} \cup \mathrm{T})$.

3. Déterminer la probabilité de ne pas obtenir une figure.

Solution. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 32 cartes du jeu.

1. Les figures sont les rois, les dames et les valets : il y en a donc $3 \times 4 = 12$. Ainsi, $P(\mathrm{F}) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$.
De même, il y a 8 trèfles donc $P(\mathrm{T}) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

2. L'évènement $\mathrm{F} \cap \mathrm{T}$ est « Obtenir une figure qui est un trèfle ». Or, il y a 3 figures qui sont des trèfles donc $P(\mathrm{F} \cap \mathrm{T}) = \frac{3}{32}$.
On en déduit que $P(\mathrm{F} \cup \mathrm{T}) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} - \frac{3}{32} = \frac{17}{32}$.

3. La probabilité de ne pas obtenir de figure est $P(\overline{\mathrm{F}}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

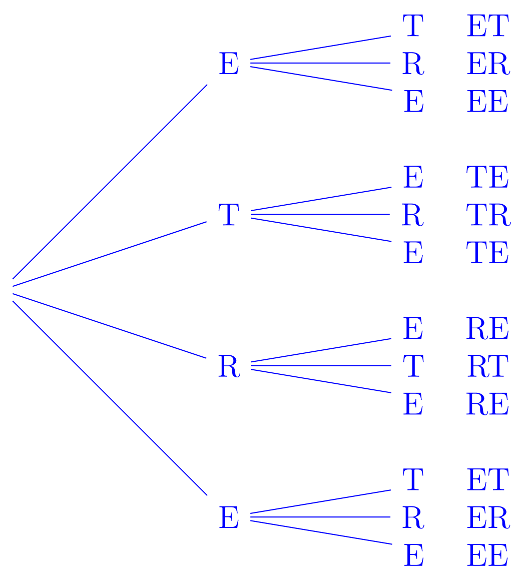
Exercice 20. On écrit chacune des lettres du mot ETRE sur un carton et on place ces quatre cartons dans un sac.

On tire un carton au hasard dans le sac puis on en tire un second sans remettre le premier dans le sac. On obtient ainsi un « mot » de deux lettres (qui n'a pas forcément un sens).

1. Utiliser un arbre pour déterminer le nombre d'issues possibles.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement A : « le mot formé commence par un T ».
3. Déterminer la probabilité de l'évènement B : « le mot formé contient une voyelle ».
4. Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap B$.
5. En déduire la probabilité de l'évènement $A \cup B$.

Solution.

1.



Il y a 7 issues possibles : ET, ER, EE, TE, TR, RE et RT.

Dans la suite, on modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 12 tirages.

2. Il y a 3 tirages qui donnent des mots commençant par un T donc $P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

3. Il y a 10 tirages qui donnent des mots contenant une voyelle donc $P(B) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

4. L'évènement $A \cap B$ est « le mot commence par un T et contient une voyelle » autrement dit « le mot est TE ». Or, il y a 2 tirages qui donnent TE donc $P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

5. On en déduit que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$ c'est-à-dire $P(A \cup B) = \frac{11}{12}$.

Exercice 21. On choisit au hasard un nombre entier entre 1 et 100. On considère les évènements :

A : « le nombre choisi est le carré d'un entier » ;

B : « le nombre choisi est le cube d'un entier ».

1. Les évènements A et B sont-ils incompatibles ?
2. Déterminer $P(\mathrm{A})$, $P(\mathrm{B})$ et $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.
3. En déduire $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$.

Solution.

1. On a $\mathrm{A} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$ et $\mathrm{B} = \{1, 8, 27, 64\}$ donc $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{1, 64\} \neq \emptyset$ donc les évènements A et B ne sont pas incompatibles.

2. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 100 entiers de 1 à 100. Alors, $P(\mathrm{A}) = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$, $P(\mathrm{B}) = \dfrac{4}{100} = \dfrac{1}{25}$ et $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \dfrac{2}{100} = \dfrac{1}{50}$.

3. On en déduit que

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{25} - \frac{1}{50} = \frac{3}{25}.$$

Exercice 22. Un jeu de tarot comporte 78 cartes : 56 cartes « classiques », (14 de chaque couleur : roi ; dame ; cavalier ; valet ; 10 ; 9 ; 8 ; 7 ; 6 ; 5 ; 4 ; 3 ; 2 ; as), 21 atouts (numérotés de 1 à 21) et un joker appelé « excuse ». On tire au hasard une carte dans le jeu de tarot et on considère les évènements :

C : « la carte tirée est un carreau » ;

F : « la carte tirée est une figure » ;

A : « la carte tirée est un atout ».

1. Déterminer $P(\mathrm{C})$, $P(\mathrm{F})$ et $P(\mathrm{A})$.

2. Définir par une phrase l'évènement $\mathrm{C} \cap \mathrm{F}$ et donner sa probabilité.

3. Définir par une phrase l'évènement $\mathrm{C} \cup \mathrm{F}$ et donner sa probabilité.

4. Que dire des évènements $\mathrm{C} \cap \mathrm{A}$ et $\mathrm{F} \cap \mathrm{A}$?

5. En déduire $P(\mathrm{C} \cup \mathrm{A})$ et $P(\mathrm{F} \cup \mathrm{A})$?

Solution. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 78 cartes du jeu.

1. $\mathrm{P(C)} = \dfrac{14}{78} = \dfrac{7}{39}$, $\mathrm{P(F)} = \dfrac{4 \times 4}{78} = \dfrac{16}{78} = \dfrac{8}{39}$ et $\mathrm{P(A)} = \dfrac{21}{78} = \dfrac{7}{26}$.

2. $\mathrm{C} \cap \mathrm{F}$: « la carté tirée est une figure de carreau » et $\mathrm{P(C \cap F)} = \dfrac{4}{78} = \dfrac{2}{39}$.

3. $\mathrm{C} \cup \mathrm{F}$: « la carté tirée est une figure ou un carreau » et

$$\mathrm{P(C \cup F) = P(C) + P(F) - P(C \cap F)} = \frac{14}{78} + \frac{16}{78} - \frac{4}{78} = \frac{26}{78} = \frac{1}{3}.$$

4. Les évènements $\mathrm{C} \cap \mathrm{A}$ et $\mathrm{F} \cap \mathrm{A}$ sont des évènements impossibles car un atout n'est pas un carreau ni une figure.

5. On en déduit que

$$\mathrm{P(C \cup A) = P(C) + P(A) - P(C \cap A)} = \frac{14}{78} + \frac{21}{78} - 0 = \frac{35}{78}$$

et

$$\mathrm{P(F \cup A) = P(F) + P(A) - P(F \cap A)} = \frac{16}{78} + \frac{21}{78} - 0 = \frac{37}{78}$$

Exercice 23. Un octet est une suite de 8 chiffres 0 ou 1. Par exemple, 01000110 est un octet. On choisit un octet au hasard.
Quelle est la probabilité qu'il contienne au moins un 0 et un 1 ?

Solution. Un octet s'obtient en choisissant un chiffre 0 ou 1 pour chacune des 8 places. Il y a donc $2^8 = 256$ octets différents.

On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 256 octets.

Notons A l'évènement « l'octet contient au moins un 0 et un 1 ». Alors, $\overline{A} = \{00000000\,;11111111\}$. Ainsi, $P(\overline{A}) = \frac{2}{256} = \frac{1}{128}$ donc $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{128}$ c'est-à-dire $P(A) = \frac{127}{128}$.

Exercice 24. On considère une classe de 30 élèves qui sont tous nés en 2003. Le professeur de mathématiques propose de parier avec vous 10 euros que deux personnes dans cette classe ont la même date d'anniversaire.

Avez-vous intérêt à accepter le pari ?

Solution. Il y a 365 jours dans l'année 2003. Considérons une classe comme une liste ordonnée de 30 élèves (par exemple, par ordre alphabétique). On modélise le problème par l'équiprobabilité sur l'ensemble des listes de 30 dates de naissances possibles. Il y a 365^{30} listes possibles. Parmi celles-ci, il y a $365 \times 364 \times \cdots 337 \times 336$ listes qui contiennent des dates toutes différentes. La probabilité que deux éléves (au moins) aient la même date d'anniversaire est donc

$$1 - \frac{365 \times 364 \times \cdots \times 337 \times 336}{365^{30}} \approx 0{,}7$$

Cette probabilité étant (très supérieure) à 1, on n'a pas (du tout) intérêt à accepter le pari.

Exercice 25. On interroge au hasard 200 personnes à la sortie d'une salle de cinéma à propos du roman dont le film qu'ils ont vu est une adaptation. 95 personnes avaient lu le roman avant de venir voir le film et 140 personnes ont aimé le film. De plus, parmi les personnes qui ont lu le roman, 55 ont apprécié l'adaptation.

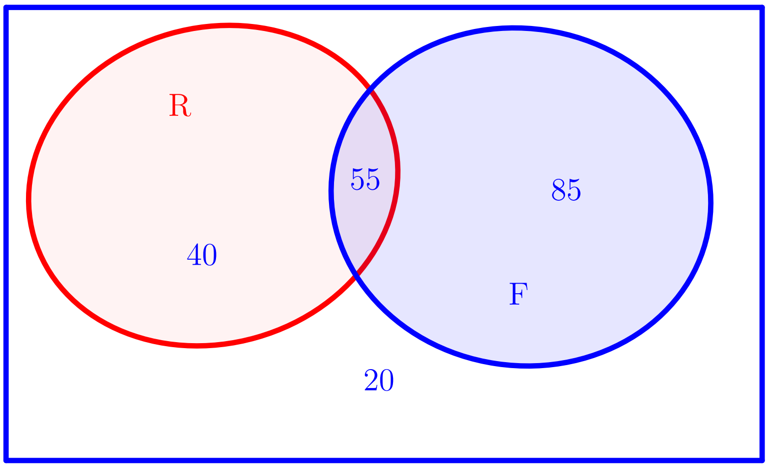
On considère les évènements :

F : « la personne a aimé le film » et R : « la personne a lu le roman ».

1. Représenter la situation par un diagramme de Venn.
2. Quelle est la probabilité qu'une personne n'ait pas aimé le film et n'ait pas lu le livre ?
3. Définir par une phrase l'évènement $\mathrm{R} \cap \overline{\mathrm{F}}$ et donner sa probabilité.
4. Définir par une phrase l'évènement $\overline{\mathrm{R}} \cap \mathrm{F}$ et donner sa probabilité.

Solution.

1.



2. La probabilité qu'une personne n'ait pas aimé le film et n'ai pas lu le livre est $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{F}} \cap \overline{\mathrm{R}}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{F} \cap \mathrm{R}}) = \dfrac{20}{200} = \dfrac{1}{10}$.
3. $\mathrm{R} \cap \overline{\mathrm{F}}$: « La personne a lu le livre et n'a pas aimé l'adaptation » et $\mathrm{P}(\mathrm{R} \cap \overline{\mathrm{F}}) = \dfrac{40}{200} = \dfrac{1}{5}$.
4. $\overline{\mathrm{R}} \cap \mathrm{F}$: « La personne n'a pas lu le livre et a aimé le film » et $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{R}} \cap \mathrm{F}) = \dfrac{85}{200} = \dfrac{17}{40}$.

Exercice 26. Dans une population, les individus peuvent posséder (ou non) un caractère génétique a ou un caractère génétique b (ou les deux caractères). La probabilité, pour un individu choisi au hasard, de posséder le caractère a est 0,8, la probabilité de posséder le caractère b est 0,6 et la probabilité de posséder les deux caractères est 0,45.

On choisit un individu au hasard dans la population et on note

A : « l'individu possède la caractère a » B : « l'individu possède le caractère b »

1. Donner la probabilité des évènements A, B et $A \cap B$ et en déduire la probabilité $A \cup B$.
2. On considère l'évènement C : « l'individu ne possède aucun des deux caractères ».
   Exprimer C à l'aide de A et B et en déduire la probabilité de C.

Solution.

1. D'après l'énoncé, $\mathbf{P}(A) = 0{,}8$, $\mathbf{P}(B) = 0{,}6$ et, comme $A \cap B$ est l'événement : « l'individu possède les deux caractères », $\mathbf{P}(A \cap B) = 0{,}45$.
   Par théorème, $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ donc $\mathbf{P}(A \cup B) = 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}45$ soit $\mathbf{P}(A \cup B) = 0{,}95$.
2. L'événement C est l'évènement contraire de l'évènement « l'individu possède au moins l'un des deux caractères » c'est-à-dire $C = \overline{A \cup B}$. On en déduit que $\mathbf{P}(C) = 1 - \mathbf{P}(A \cup B) = 1 - 0{,}95$ soit $\mathbf{P}(C) = 0{,}05$.

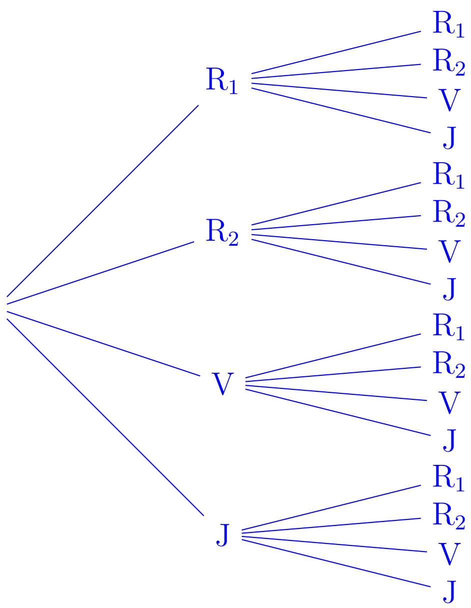
4) Exercices de synthèse

Exercice 27. Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher : deux rouges, une verte et une jaune. On tire au hasard une boule de cette urne. Après avoir noté la couleur de cette boule, on la replace dans l'urne et on procède à un second tirage. On note alors à nouveau la couleur obtenue.

1. Représenter l'expérience par un arbre en notant R_1 et R_2 les deux boules rouges, V la boule verte et J la boule jaune.
2. Soit E l'évènement « les deux boules tirées sont rouges » et F l'évènement « une seule des deux boules tirées est rouge ».
   A l'aide de l'arbre, déterminer les probabilités des évènements E et F.
3. Définir par une phrase l'évènement $G = E \cup F$.
   Calculer la probabilité de G.
4. On considère l'évènement H : « aucune des boules tirées n'est rouge ». Exprimer H à l'aide de G et en déduire la probabilité de H.
5. Les boules de l'urne portent un numéro : les rouges portent toutes les deux le numéro 1, la verte le numéro 2 et la jaune le numéro 4.
   On appelle S la somme des numéros obtenus après le tirage des deux boules.
   Déterminer, en justifiant sa réponse, la probabilité que S soit supérieure ou égale à 4. (On pourra s'aider de l'arbre construit à la question 1).

Solution.

1.



issues	S
R_1R_1	2
R_1R_2	2
R_1V	3
R_1J	4
R_2R_1	2
R_2R_2	2
R_2V	3
R_2J	4
VR_1	3
VR_2	3
VV	4
VJ	6
JR_1	5
JR_2	5
JV	6
JJ	8

On a écrit au bout de chaque branche les 16 issues de cette expérience qui sont toutes équiprobables.

2. Il y a 4 issues qui réalisent l'évènement E (R_1R_1, R_1R_2, R_2R_1 et R_2R_2) donc, par équiprobabilité, $p(\mathrm{E}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

De même, il y a 8 issues qui réalisent l'évènement F (R_1V, R_1J, R_2V, R_2J, VR_2, JR_1, VR_2, JR_2) donc $p(\mathrm{F}) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

3. L'évènement G est « au moins une des deux boules tirées est rouge ». Par théorème,

$$p(\mathrm{G}) = p(\mathrm{E}) + p(\mathrm{F}) - p(\mathrm{E} \cap \mathrm{F}).$$

Or, les évènements E et F sont incompatibles car on ne peut avoir à la fois 2 boules rouges et exactement une boule rouge. Ainsi, $\mathrm{E} \cap \mathrm{F} = \varnothing$ et donc $p(\mathrm{G}) = p(\mathrm{E}) + p(\mathrm{F}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ soit $p(\mathrm{G}) = \frac{3}{4}$.

4. L'évènement H est l'évènement contraire (ou complémentaire) de G c'est-à-dire $\mathrm{H} = \overline{\mathrm{G}}$. On en déduit que $p(\mathrm{H}) = 1 - p(\mathrm{G}) = 1 - \frac{3}{4}$ c'est-à-dire $p(\mathrm{H}) = \frac{1}{4}$.

5. On a inscrit sur l'arbre, à côté de chaque issue, la somme correspondante. On voit qu'il y a 8 issues qui réalisent l'événement « S est supérieure ou égale à 4 » donc la probabilité de cet événement est $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

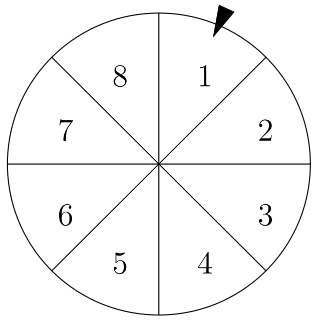
Exercice 28. Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.). Pour chacune des questions, une seule réponse est exacte.

1. Lors d'une tombola, on fait tourner une roue parfaitement équilibrée représentée ci-dessous. Les 8 secteurs sont identiques. On lit le numéro en face du repère lorsque la roue s'arrête.

   On considère les évènements A : « Le numéro est strictement supérieur à 4 » et B : « Le numéro est pair »

a. La probabilité de l'évènement $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ est :

a) $\dfrac{1}{8}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{1}{2}$.



b. La probabilité de l'évènement $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est :

a) $\dfrac{3}{4}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1.

c. La probabilité de l'évènement $\overline{\mathrm{A}}$ est :

a) 0 b $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{1}{4}$.

2. On désigne par A et B des évènements définis sur un univers Ω et par P une probabilité sur Ω.

a. Si A et B sont incompatibles, si $P(\mathrm{A}) = 0{,}43$ et $P(\mathrm{B}) = 0{,}15$ alors la probabilité de $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est :

a) 0,0645 b) 0,58 c) 0,28.

b. Si $P(\mathrm{A}) = 0{,}6$ et $P(\overline{\mathrm{B}}) = 0{,}7$ et $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}8$ alors :

a) $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}1$ b) $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}5$ c) ces valeurs ne sont pas possibles.

c. On lance deux pièces de monnaie parfaitement équilibrées. La probabilité d'obtenir au moins une fois pile est :

a) 0,33 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{3}{4}$.

Solution.

1.	**a.**	a	b	c
	b.	a	b	c
	c.	a	b	c
2.	**a.**	a	b	c
	b.	a	b	c
	c.	a	b	c

Exercice 29. On dispose d'un dé cubique dont les six faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Ce dé est déséquilibré de la façon suivante : la probabilité d'obtenir la face numérotée 1 est égale à 0,5 et les 5 autres faces ont la même probabilité d'être obtenue.

On lance une fois le dé et on note le numéro obtenu.

1. Démontrer que la probabilité d'obtenir 2 est 0,1.

2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 3 »

B : « Obtenir un nombre impair »

C : « Obtenir un nombre pair »

D : « Obtenir un nombre autre que 1 »

3. Décrire chacun des évènements suivants à l'aide d'une phrase claire et précise puis calculer sa probabilité :

$$\overline{\mathrm{B}}\ ; \quad \mathrm{A} \cup \mathrm{B}\ ; \quad \mathrm{A} \cap \mathrm{B}\ ; \quad \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}.$$

Solution.

1. Notons a la probabilité d'obtenir 2 (qui est la même que d'obtenir 3, 4, 5 et 6). Alors, $0{,}5 + 5a = 1$ donc $5a = 0{,}5$ et ainsi $a = 0{,}1$.
2. $P(\mathrm{A}) = P(1) + P(2) + P(3) = 0{,}5 + 2 \times 0{,}1 = 0{,}7$.
   $P(\mathrm{B}) = P(1) + P(3) + P(5) = 0{,}5 + 2 \times 0{,}1 = 0{,}7$.
   $P(\mathrm{C}) = 1 - P(\mathrm{B}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.
   $P(D) = 1 - P(1) = 0{,}5$.
3. $\overline{\mathrm{B}}$: « Obtenir un chiffre pair » donc $\overline{\mathrm{B}} = \mathrm{C}$ et ainsi $P(\overline{\mathrm{B}}) = 0{,}3$.
   $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$: « Obtenir un nombre impair ou un nombre inférieur ou égal à 3 » donc $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(1) + P(2) + P(3) + P(5) = 0{,}8$.
   $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$: « Obtenir un nombre impair inférieur ou égal à 3 » donc $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(1) + P(3) = 0{,}6$.
   $\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}$: « Obtenir un nombre pair inférieur ou égal à 3 » donc $P(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = P(2) = 0{,}1$.

Exercice 30. Dans une station balnéaire, on a interrogé 600 touristes, français ou étrangers, sur leur séjour. Tous ont répondu être soit au camping, soit à l'hôtel.

1. Sachant qu'un total de 240 touristes étrangers ont été interrogés et qu'un quart des français interrogés ont séjourné dans un hôtel, compléter le tableau suivant :

	Camping	Hôtel	Total
Français			
Etrangers		48	
Total			600

2. Dans cette question, les résultats seront donnés sous forme décimale arrondie à 10^{-2} près.
   On choisit au hasard une personne parmi les 600 interrogées et on suppose que toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies.
   On considère les évènements E : « La personne interrogée est un touriste étranger » et C : « La personne interrogée séjourne dans un camping ».
   a. Calculer les probabilités $P(\mathrm{E})$ et $P(\mathrm{C})$ des évènements E et C.
   b. On considère l'évènement A : « La personne interrogée est un touriste étranger et séjourne dans un camping ».
   Exprimer l'évènement A à l'aide de E et C puis calculer la probabilité $P(\mathrm{A})$ de cet évènement.
   c. Calculer la probabilité $P(\mathrm{E} \cup \mathrm{C})$ de l'évènement $\mathrm{E} \cup \mathrm{C}$.
   d. On sait que la personne interrogée est dans un camping. Calculer la probabilité qu'elle soit un touriste français.

Solution.

1.

	Camping	Hôtel	Total
Français	270	90	360
Etrangers	192	48	240
Total	462	138	600

2. D'après l'énoncé, P est l'équiprobabilité sur l'ensemble des 600 personnes interrogées.

   a. $P(\mathrm{E}) = \frac{240}{600} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ et $P(\mathrm{C}) = \frac{462}{600} = \frac{77}{100} = 0{,}77$.

   b. $\mathrm{A} = \mathrm{E} \cap \mathrm{C}$ et $P(\mathrm{A}) = \frac{192}{600} = \frac{8}{25} = 0{,}32$.

   c. $P(\mathrm{E} \cup \mathrm{C}) = P(\mathrm{E}) + P(\mathrm{C}) - P(\mathrm{E} \cap \mathrm{C}) = \frac{2}{5} + \frac{77}{100} - \frac{8}{25} = \frac{17}{20} = 0{,}85$.

   d. On modélise ici par l'équiprobabilité sur l'ensemble des personnes d'un camping. La probabilité que la personne soit un touriste français est $\frac{270}{462} = \frac{45}{77} \approx 0{,}58$.

Exercice 31. Une urne contient 20 boules blanches, 10 boules noires et un certain nombre n de boules rouges.

On tire au hasard une boule dans l'urne.

On considère les évènements :

B : « la boule tirée est blanche »

N : « la boule tirée est noire »

R : « la boule tirée est rouge »

1. Dans cette question, on suppose que l'urne contient en tout 50 boules.

   a. Déterminer la valeur de n.

   b. Déterminer les probabilités des évènements B, N et R.

2. Dans cette question, on suppose que le nombre total de boules dans l'urne est inconnu (et donc n est également inconnu).

   a. Exprimer, en fonction de n, la probabilité de l'évènement R.

   b. Déterminer n de telle façon que $P(R) = 0{,}75$.

   c. Déterminer le plus petit entier n tel que $P(R) \geqslant 0{,}99$.

   d. Déterminer la plus grande valeur de n telle la probabilité que la boule tirée ne soit pas rouge soit au moins égale à $\frac{3}{4}$.

Solution.

1. a. On a $20 + 10 + n = 50$ donc $n = 50 - 30$ c'est-à-dire $n = 20$.

   b. On modélise les tirages au hasard par l'équiprobabilité P sur l'ensemble des 50 boules. Comme il y a 20 boules blanches, on a donc $P(B) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$, comme il y a 10 boules noires, $P(N) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$ et comme il y a 20 boules rouges, $P(R) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$.

2. a. Le nombre total de boules est $30 + n$. On modélise les tirages au hasard par l'équiprobabilité P sur l'ensemble des $n + 30$ boules. Comme il y a n boules rouges, $P(R) = \frac{n}{30+n}$.

   b. On a

$$P(R) = 0{,}75 \Leftrightarrow \frac{n}{30+n} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4n = 3(30+n) \Leftrightarrow 4n = 90 + 3n \Leftrightarrow n = 90$$

   Ainsi, $P(R) = 0{,}75$ si et seulement si $n = 90$.

   c. Comme $n + 30 > 0$, on a

$$P(R) \geqslant 0{,}99 \Leftrightarrow \frac{n}{n+30} \geqslant 0{,}99 \Leftrightarrow n \geqslant 0{,}99(n+30) \Leftrightarrow n \geqslant 0{,}99n+29{,}7 \Leftrightarrow 0{,}01n \geqslant 29{,}7$$

   et, comme $0{,}01 > 0$, $0{,}01n \geqslant 29{,}7$ équivaut à $n \geqslant \frac{29{,}7}{0{,}01}$ c'est-à-dire $n \geqslant 2970$.

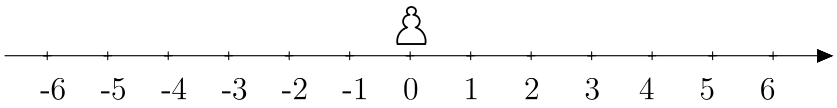
   Ainsi, le plus petit entier n tel que $P(R) \geqslant 0{,}99$ est 2970.

d. On a $P(\overline{R}) = 1 - P(R) = \frac{30}{n+30}$. Ainsi,

$$P(\overline{R}) \geqslant \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{30}{n+30} \geqslant \frac{3}{4} \Leftrightarrow 30{\times}4 \geqslant 3(n{+}30) \Leftrightarrow 120 \geqslant 3n{+}90 \Leftrightarrow 30 \geqslant 3n \Leftrightarrow n \leqslant 10$$

donc la plus grande valeur de n telle la probabilité que la boule tirée ne soit pas rouge soit au moins égale à $\frac{3}{4}$ est 10.

Exercice 32. On dispose un pion sur un axe gradué. Initialement, le pion se trouve à l'abscisse 0.



On lance plusieurs fois de suite une pièce équilibrée. À chaque fois qu'on obtient *pile*, on déplace le pion d'une unité vers la droite et à chaque fois qu'on obtient *face*, on déplace le pion d'une unité vers la gauche.

Par exemple, si on lance la pièce 3 fois et qu'on obtient *face*, *pile* et *face* alors le pion se trouve successivement à l'abscisse -1 puis 0 puis -1.

1. Dans cette question, on suppose qu'on lance la pièce 3 fois.

a. Déterminer la probabilité que le pion soit à l'abscisse 1 à l'issue des 3 lancers.

b. Déterminer la probabilité que le pion soit à l'abscisse 2 à l'issue des 3 lancers.

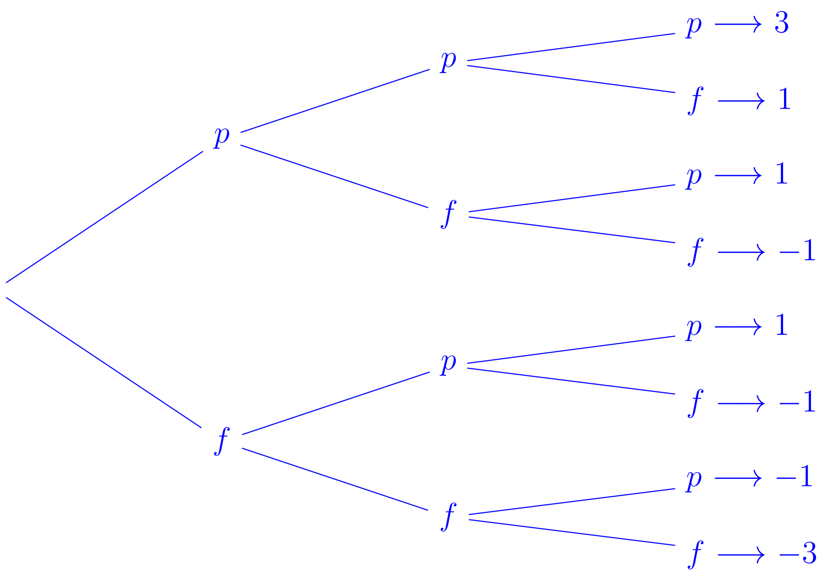
2. Dans cette question, on suppose qu'on lance la pièce 2020 fois.

a. Déterminer la probabilité que le pion soit à l'abscisse 1 à l'issue des 2020 lancers.

b. Déterminer la probabilité que le pion soit à l'abscisse 2020 à l'issue des 2020 lancers.

Solution.

1. a. On peut représenter la situation par un arbre en codant p pour *pile* et f pour *face*.



On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des lancers possibles (qui correspondent 8 aux chemins possibles sur l'arbre).

Comme il y a 3 chemins qui mènent à l'abscisse 1, la probabilité que le pion soit à l'abscisse 1 à l'issue des 3 lancers est $\frac{3}{8}$.

b. Il n'y a aucun chemin qui mène à l'abscisse 2 donc la probabilité que le pion soit à l'abscisse 2 à l'issue des 3 lancers est 0.

2. Dans cette question, on modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 2^{2020} lancers.

a. Notons n_p le nombre de *pile* obtenu au cours de 2020 lancers. On a alors obtenu $2020 - n_p$ *face* et la position finale du pion est $n_p - (2020 - n_p) = 2n - 2020$. Comme $2n$ et 2020 sont pairs, l'abscisse finale est également paire. Ainsi, la probabilité que le pion soit à l'abscisse 1 à l'issue des 2020 lancers est 0.

b. Il n'y a qu'une seule façon que l'abscisse finale soit 2020, c'est d'obtenir *pile* à chaque lancer. Ainsi, la probabilité que le pion soit à l'abscisse 2020 à l'issue des 2020 lancers est $\frac{1}{2^{2020}}$.

Exercice 33. On lance un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. La loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

face	1	2	3	4	5	6
probabilité	$\dfrac{1}{12}$	a	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{12}$

1. Déterminer la valeur de a.

2. Écrire chacun des évènements suivants sous forme d'un ensemble puis déterminer sa probabilité.

a. A : « Obtenir un chiffre pair »

b. B : « Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 5 »

c. $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.

Solution.

1. Comme la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1, on a $\mathbf{P}(1)+\mathbf{P}(2)+\mathbf{P}(3)+\mathbf{P}(4)+\mathbf{P}(5)+\mathbf{P}(6) = 1$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{12}+a+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{12} = 1$. On en déduit que $a = 1 - \left(\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{12}\right)$ soit $a = \dfrac{1}{6}$.

2. a. $\mathrm{A} = \{2,4,6\}$ donc $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \mathbf{P}(2)+\mathbf{P}(4)+\mathbf{P}(6) = \dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{12}$ soit $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{3}$.

b. $\mathrm{B} = \{1,2,3,4,5\}$ donc $\mathrm{B} = \overline{\{6\}}$ et ainsi $\mathbf{P}(\mathrm{B}) = 1 - \mathbf{P}(6) = 1 - \dfrac{1}{12}$ soit $\mathbf{P}(\mathrm{B}) = \dfrac{11}{12}$.

c. $\mathrm{C} = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$ donc $\mathbf{P}(\mathrm{C}) = 1$.

Exercice 34. Une urne contient 2 boules vertes, 1 boule rouge et 1 boule noire. On effectue successivement et avec remise deux tirages au hasard d'une boule dans l'urne. On note la couleur de chaque boule tirée. Une issue de cette expérience est un couple de deux couleurs dans l'ordre d'apparition.

1. À l'aide d'un arbre, déterminer le nombre de tirages possibles puis le nombre d'issues de l'expérience. (Dans l'arbre, on notera V_1 et V_2 les 2 boules vertes, R la boule rouge et N la boule noire.)

2. Quel est l'univers de cette expérience ?

3. Déterminer la probabilité de l'évènement A : « les deux boules sont de la même couleur ».

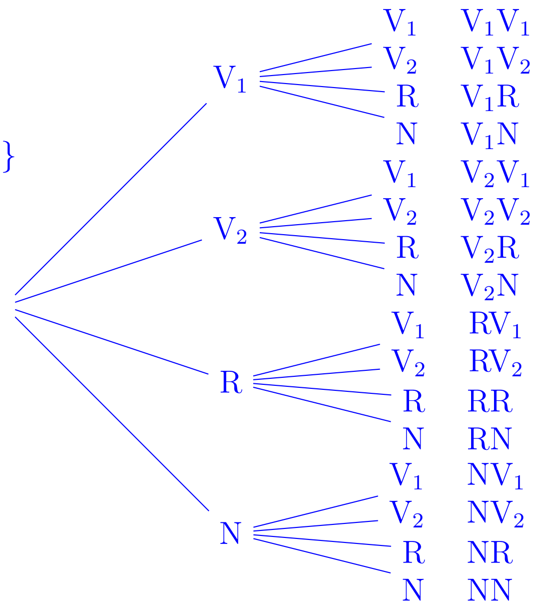
4. On considère l'évènement B : « Au moins une des boules tirées est noire ».

a. Décrire par une phrase l'évènement $\overline{\mathrm{B}}$.

b. Déterminer la probabilité de $\overline{\mathrm{B}}$ et en déduire celle de B.

Solution.

1. À l'aide de l'arbre ci-contre, on dénombre 16 tirages différents qui donnent 9 issues différentes.



2. On en déduit que l'univers de cette expérience est

$$\Omega = \{\mathrm{VV}, \mathrm{VR}, \mathrm{VN}, \mathrm{RV}, \mathrm{RR}, \mathrm{RN}, \mathrm{NV}, \mathrm{NR}, \mathrm{NN}\}$$

(où V désigne la couleur verte, R la couleur rouge et N la couleur noire).

3. Comme les 16 tirages sont équiprobables et qu'il y a 6 tirages qui réalisent A, $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$.

4. a. $\overline{\mathrm{B}}$ est l'événement « Aucune boule tirée n'est noire ».

b. Il y a 9 tirages qui réalisent $\overline{\mathrm{B}}$ donc $\mathbf{P}(\overline{\mathrm{B}}) = \dfrac{9}{16}$ et ainsi $\mathbf{P}(\mathrm{B}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{\mathrm{B}}) = \dfrac{7}{16}$

Exercice 35. Une agence de voyage a effectué un sondage auprès de ses clients pendant la saison estivale. Les résultats de ce sondage sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	Le client a voyagé à l'étranger	Le client a voyagé en France	Total
Le client est satisfait		305	
Le client n'est pas satisfait	155		220
Total		370	1 000

1. Compléter le tableau ci-dessus directement sur l'énoncé.

2. On choisit au hasard un client de cette agence.

a. Quel est univers de l'expérience ?
Par quelle probabilité va-t-on modéliser l'expérience ?

b. Quelle est la probabilité de l'évènement A : « le client est satisfait » ?

c. Quelle est la probabilité de l'évènement B : « le client a voyagé en France » ?

d. Quelle est la probabilité de l'évènement C : « le client est satisfait et il a voyagé en France » ?

e. Définir par une phrase l'évènement $\overline{A \cup B}$ puis calculer sa probabilité.

3. On choisit au hasard un client ayant voyagé à l'étranger.
Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas satisfait ?

Solution.

1.

	Le client a voyagé à l'étranger	Le client a voyagé en France	Total
Le client est satisfait	475	305	780
Le client n'est pas satisfait	155	65	220
Total	630	370	1 000

2. **a.** L'univers est l'ensemble des 1000 clients de l'agence.
On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 1000 clients de l'agence.

b. Il y a 780 clients satisfait donc $P(A) = \frac{780}{1000} = \frac{39}{50}$.

c. Il y a 370 clients qui ont voyagé en France donc $P(B) = \frac{370}{1000} = \frac{37}{100}$.

d. Il y a 305 clients qui sont satisfaits et qui ont voyagé en France donc $P(C) = \frac{305}{1000} = \frac{61}{200}$.

e. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$: « le client n'est pas satisfait et il a voyagé à l'étranger » donc $P(\overline{A \cup B}) = \frac{155}{1000} = \frac{31}{200}$.

3. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des clients ayant voyagé à l'étranger.
Parmi les clients ayant voyagé à l'étranger, il y en a 155 qui ne sont pas satisfait donc la probabilité que le client ne soit pas satisfait est $\frac{155}{630} = \frac{31}{126}$.

Exercice 36. Dans un lycée, une classe de 32 élèves (20 filles et 12 garçons) doit être répartie en deux groupes A et B pour les TP de sciences. Chaque groupe contient 16 élèves pris au hasard.
Y a-t-il une chance sur deux pour que le groupe A contiennent autant de filles que de garçons ?

Solution. On modélise par l'équiprobabilité sur l'ensemble des groupes possibles. Il y a en tout $\binom{32}{16} = 601\,080\,390$ groupes possibles. Parmi ceux-ci, il y en a $\binom{20}{8} \times \binom{12}{8} = 62\,355\,150$ qui contiennent autant de garçons que de filles donc la probabilité que le groupe A contient autant de garçons que de filles est $\frac{62\,355\,150}{601\,080\,390} \approx 0{,}1$.
Cette probabilité est très inférieure à 0,5 donc il y a u beaucoup moins d'une chance sur deux que le groupe A contiennent autant de filles que de garçons.

Exercice 37. Un enfant joue avec des cubes alphabétiques en bois. Il dispose d'un cube pour chaque lettre de l'alphabet et il en prend 5 au hasard qu'il empile.

1. Quelle est la probabilité que ces cubes, de haut en bas, forment le mot PRIME.
2. Quelle est la probabilité qu'il choisisse les lettres du mot CIBLE ?
3. Quelle est la probabilité qu'il choisissent 5 lettres appartenant au mot ABDOMEN ?

Solution.

1. On modélise par l'équiprobabilité sur l'ensemble des arrangements de 5 cubes parmi les 26. Il y a $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 7\,893\,600$ arrangements possibles donc la probabilité d'obtenir le mot PRIME est $\frac{1}{7\,893\,600}$.
2. On modélise par l'équiprobabilité sur l'ensemble des combinaisons de 5 lettres parmi les 26. Il y a $\frac{7893600}{5!} = 65\,780$ combinaisons possibles donc la probabilité qu'il choisisse les lettres du mot CIBLE est $\frac{1}{65\,780}$.

3. On conserve le modèle précédent. La probabilité qu'il choisisse 5 lettres du mot ABDOMEN est $\frac{\binom{7}{5}}{65\,780} = \frac{21}{65\,780}$.

Exercice 38. Une urne contient six boules numérotée de 1 à 6. On tire successivement et sans remise les 6 boules de l'urne.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir des boules numérotées dans l'ordre croissant.
2. Déterminer la probabilité que la seconde boule tirée porte le numéro 3.
3. Déterminer la probabilité que le numéro de la dernière boule tirée soit supérieur à tous les numéros des boules précédemment tirées.
4. On considère 6 compartiments numérotés de 1 à 6 et chaque boule est placé dans le compartiment correspondant à son tirage (la première boule tirée dans le compartiment 1, la deuxième boule tirée dans le compartiment deux, etc). On dit qu'une boule est bien placée si le numéro de la boule correspond au numéro du compartiment.
   a. Quelle est la probabilité pour qu'exactement 4 boules soient bien placées ?
   b. Quelle est la probabilité qu'aucune boule ne soit bien placée ?

Solution. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur les $6! = 720$ tirages possibles.

1. Il y a un seul tirage qui donne des boules numérotées dans l'ordre croissant (1, 2, 3, 4, 5, 6) donc la probabilité cherchée est $\frac{1}{720}$.
2. Il y a $5 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ tirages qui amènent la boule 3 au second tirage donc la probabilité cherchée est $\frac{120}{720} = \frac{1}{6}$.
3. L'évènement considéré est réalisé si et seulement si la dernière boule tirée est celle qui porte le numéro 6. Comme précédemment, la probabilité de cet évènement est $\frac{5! \times 1}{720} = \frac{1}{6}$.
4. a. Un tirage qui donne exactement 4 boules bien placées est entièrement déterminer par le numéro de ces 4 boules. En effet, uns fois ces 4 boules déterminées, on sait les boules obtenues pour les 4 tirages correspondant et on sait deux plus que, pour les deux autres tirages, les boules ne sont pas bien placées donc elles sont échangées. Ainsi, il y a $\binom{6}{4} = 15$ tirages qui donnent exactement 4 boules bien placées donc la probabilité cherchée est $\frac{15}{720} = \frac{5}{234}$.
   b. Le nombre de tirages qui ne contiennent aucune boule bien placée est $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 120$ donc la probabilité de n'obtenir aucune boule bien placée est $\frac{120}{720} = \frac{1}{6}$.