⧫ Chapitre 9. — Généralités sur les suites réelles

I. — Définitions et exemples

Définition 1

Une suite réelle u est une liste ordonnée (en général infinie) de nombres réels numérotés par des entiers naturels consécutifs.

Le numéro d'un nombre de la liste s'appelle son rang ou son indice.

Notation 2. Une suite se nomme en général avec une lettre minuscule (souvent u, v ou w). Le terme de rang n d'une suite u se note u_n (ce qui se lit « u indice n »).

La suite u peut aussi se noter (u_n). Ainsi, u_n désigne un nombre réel (le terme d'indice n de la suite) alors que (u_n) désigne la suite (c'est-à-dire la liste de tous les nombres u_n).

Exemple 3.

1. La suite des puissances de 2 est la suite u définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 2^n$. Ainsi, $u_0 = 2^0 = 1$, $u_1 = 2^1 = 2$, $u_2 = 2^2 = 4$, $u_3 = 2^3 = 8$, et ainsi de suite.
2. La suite des racines carrées des entiers naturels est la suite v définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \sqrt{n}$. Ainsi, $v_0 = \sqrt{0} = 0$, $v_1 = \sqrt{1} = 1$, $v_2 = \sqrt{2}$, $v_3 = \sqrt{3}$, $v_4 = \sqrt{4} = 2$, et ainsi de suite.
3. La suite des inverses des entiers naturels non nuls est la suite w définie, pour tout entier naturel non nul n par $w_n = \frac{1}{n}$. Ainsi, $w_1 = \frac{1}{1} = 1$, $w_2 = \frac{1}{2} = 1$, $w_3 = \frac{1}{3}$, $w_4 = \frac{1}{4}$, et ainsi de suite.

Remarque 4. Une suite réelle est souvent définie pour tout entier naturel n mais ce n'est pas nécessairement le cas. Parfois, une suite n'est définie qu'à partir d'un certain rang. Si on veut préciser, par exemple, qu'une suite n'est définie qu'à partir du rang 5, on peut écrire $(u_n)_{n \geqslant 5}$.

⚠ Il ne faut pas confondre le rang d'un terme avec sa place dans la suite.

$$\begin{array}{cccccccc}
\text{rang } 0 & \text{rang } 1 & \text{rang } 2 & \text{rang } 3 & \text{rang } 4 & \cdots & \text{rang } n & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \cdots & u_n & \cdots \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\
1^{\text{er}} \text{ terme} & 2^{\text{e}} \text{ terme} & 3^{\text{e}} \text{ terme} & 4^{\text{e}} \text{ terme} & 5^{\text{e}} \text{ terme} & \cdots & (n+1)^{\text{e}} \text{ terme} & \cdots
\end{array}$$

Exemple 5. On considère la suite u définie par $u_n = 5 + \sqrt{n-3}$. Le premier terme de cette suite est $u_3 = 5 + \sqrt{3-3} = 5 + \sqrt{0} = 5$: c'est donc le terme de rang 3 car, si n vaut 0, 1 ou 2, $n - 3$ est négatif donc $\sqrt{n-3}$ n'existe pas.

Exemple 6. Les trois suites u, v et w définies dans l'exemple 3 peuvent respectivement s'écrire $(2^n)_{n \geqslant 0}$, $(\sqrt{n})_{n \geqslant 0}$ et $(\frac{1}{n})_{n \geqslant 1}$.

Exemple 7. On considère la suite u définie par $u_n = \frac{1}{n-1}$.

1. À partir de quel rang, la suite u est-elle définie ?
2. Calculer ses 3 premiers termes.

II. — Mode de génération d'une suite

Il existe différentes façons de définir concrètement une suite.

1) Par une expression explicite

On peut définir une suite par une expression explicite de u_n en fonction de n. Il s'agit de la façon dont on a défini les suites dans les différents exemples précédents. C'est la façon la plus simple et la plus directe de définir une suite. Elle permet en particulier de calculer n'importe quel terme de la suite.

Exemple 8. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{2^n-1}{2^n+1}$. Alors, on peut calculer directement u_4 :

$$u_4 = \frac{2^4-1}{2^4+1} = \frac{15}{17}.$$

2) Par une relation de récurrence

Une autre façon de définir une suite consiste à donner son premier terme et une relation permettant, connaissant un terme, de calculer le suivant. Une telle relation s'appelle une relation de récurrence.

C'est une façon un peu plus compliquée et surtout beaucoup moins directe de définir une suite. En particulier, pour déterminer un terme, il faut connaître le précédent.

Exemple 9. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \frac{1}{u_n+2}$. Si on veut calculer u_4, il est nécessaire de calculer tous les termes précédents. On calcule donc successivement :

$$\begin{aligned}
u_1 = u_{0+1} &= \frac{1}{u_0+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \\
u_2 = u_{1+1} &= \frac{1}{u_1+2} = \frac{1}{\frac{1}{3}+2} = \frac{1}{\frac{7}{3}} = \frac{3}{7} \\
u_3 = u_{2+1} &= \frac{1}{u_2+2} = \frac{1}{\frac{3}{7}+2} = \frac{1}{\frac{17}{7}} = \frac{7}{17} \\
u_4 = u_{3+1} &= \frac{1}{u_3+2} = \frac{1}{\frac{7}{17}+2} = \frac{1}{\frac{41}{17}} = \frac{17}{41}
\end{aligned}$$

Il ne faut pas confondre u_{n+1} et $u_n + 1$. Dans le premier cas, on ajoute 1 à n alors que, dans le second, on ajoute 1 à u_n.

Exemple 10. On considère la suite u définie par son premier terme $u_1 = 1$ et la relation de récurrence : pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = nu_n + 1$.

Calculer u_2, u_3 et u_4.

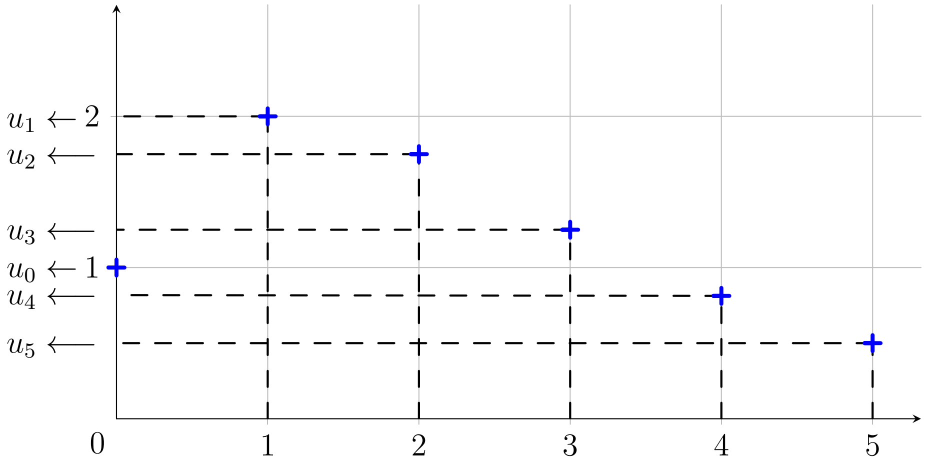
III. — Représentation graphique

On peut représenter graphiquement une suite u dans un repère par l'ensemble des points de coordonnées (n, u_n). Une telle représentation s'appelle un nuage de points.

L'ensemble des indices étant en général infini, on ne représentera dans la pratique qu'une partie du nuage de points correspondant aux premières valeurs de n.

Exemple 11. On considère la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3n+1}{2^n}$.

On peut représenter la suite (u_n) par le nuage de points suivant :



Exemple 12. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n + 1$.

Représenter le nuage de points associé aux 4 premiers termes de (u_n).

IV. — Variations

Définition 13

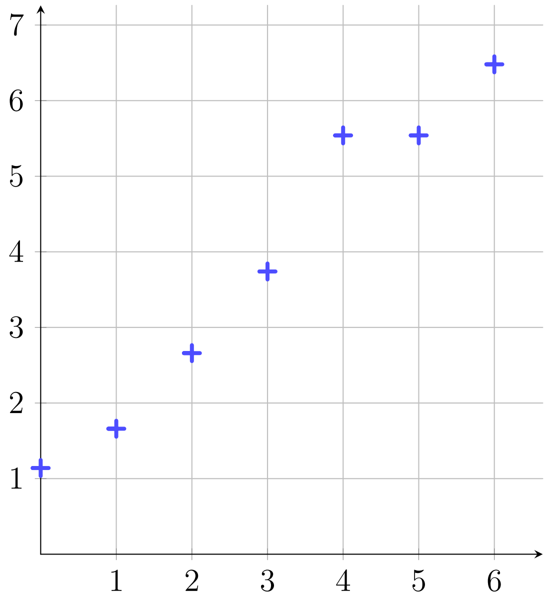
Soit N un entier naturel et (u_n) une suite réelle définie (au moins) à partir du rang N. On dit que :

— (u_n) est **croissante** à partir du rang N si, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_{n+1} \geqslant u_n$;

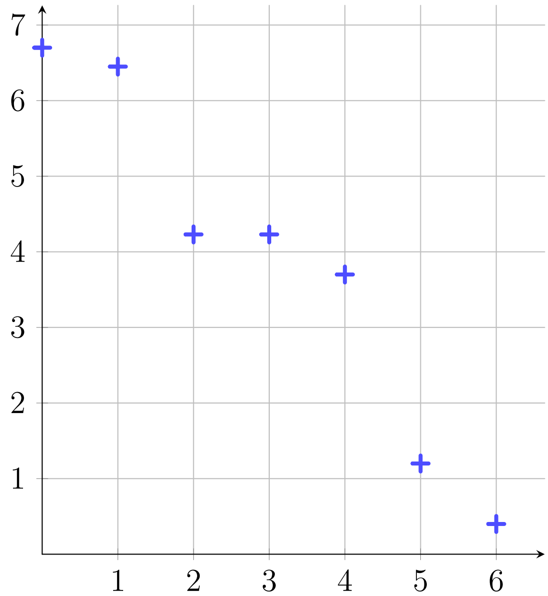
— (u_n) est **décroissante** à partir du rang N si, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_{n+1} \leqslant u_n$;

— (u_n) est **constante** à partir du rang N si, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_{n+1} = u_n$;

— (u_n) est **monotone** à partir du rang N si (u_n) est croissante ou décroissante à partir du rang N.



Nuage de points d'une suite croissante



Nuage de points d'une suite décroissante

Remarque 14. Il existe des suites qui ne sont pas monotones. Par exemple, la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (-1)^n$. En effet, si n est pair alors $(-1)^n = 1$ et $(-1)^{n+1} = (-1) \times (-1)^n = -1$ donc $u_n \geqslant u_{n+1}$ mais, si n est impair, $(-1)^n = -1$ et $(-1)^{n+1} = (-1) \times (-1)^n = 1$ donc $u_n \leqslant u_{n+1}$. Ainsi, la suite (u_n) change constamment de variation.

Étant donné une suite (u_n), on dispose de plusieurs méthodes pour étudier les variations de cette suite.

Méthode 15 : par une Comparaison directe

On peut essayer de comparer directement, pour tout entier n, les nombres u_n et u_{n+1}.

Exemple 16. Étudier les variations de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{1}{2n+1}$.

Méthode 17 : par l'étude du signe de la différence

On peut étudier, pour tout entier n, le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. Si, pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ donc (u_n) est croissante et, si pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ alors $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc (u_n) est décroissante.

Exemple 18. Étudier les variations de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n^2 - 5n + 1$.

Méthode 19 : comparer le rapport avec 1 si la suite est strictement positive

On suppose que, pour tout entier n, $u_n > 0$. On peut étudier, pour tout entier n, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et le comparer avec 1. Si, pour tout entier n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors, comme $u_n > 0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ donc (u_n) est croissante et si, pour tout entier n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ alors, de même, $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc (u_n) est décroissante.

Cette méthode ne s'applique qu'aux suites dont tous les termes sont strictement positifs.

Exemple 20. Étudier les variations de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{5^n}{7^n}$.

V. — Exercices

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer à partir de quel rang la suite (u_n) est définie et calculer les 3 premiers termes de la suite.

$$\text{a) } u_n = -n^2 + n + 1 \qquad \text{b) } u_n = \frac{1}{n-3} \qquad \text{c) } u_n = \sqrt{n^2 - 4}$$

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{n}{n+1}$.

1. Calculer les 3 premiers termes de cette suite.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $u_n + 1$, u_{n+1}, $u_n - 1$ et u_{n-1} en fonction de n.

Exercice 3. Dans chaque cas, calculer les 3 premiers termes de la suite (u_n)

$$\text{a) } \begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} u_5 = 1 \\ \text{pour tout } n \geqslant 5,\ u_{n+1} = u_n - n \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ \text{pour tout } n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1} \end{cases}$$

Exercice 4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 5n$.

1. Calculer les 3 premiers termes de (u_n).

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n et de n.

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, représenter les 5 premiers points du nuage de points associé à la suite (u_n).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n + 2$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n}{n+1}$.

3. $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 - u_n^2$.

4. $u_2 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{n-1}$.

Exercice 6. On considère deux suites (a_n) et (b_n) définies par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 2b_n}{5} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = 2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = \dfrac{2a_n + 3b_n}{5} \end{cases}$$

1. Calculer a_1, b_1, a_2 et b_2.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = a_n + b_n$. Démontrer que la suite (s_n) est constante.

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 3 - a_n$.

Exercice 7. Étudier les variations des suites suivantes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 3$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{n+2}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{n}{n+1}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 1 - \frac{1}{n+3}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \frac{2^n}{5^n}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \frac{2^n}{7^{n+1}}$.

Exercice 8. Étudier les variations des suites suivantes.

1. (u_n) est définie par $u_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1 - 2u_n)$.

2. (v_n) est définie par $v_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 2n$.

3. (w_n) est définie par $w_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + n - 5$.

4. (t_n) est définie par $t_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = t_n + (-1)^n$.

Exercice 9. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{2^n}{n^2}$.

1. Calculer, à l'aide de la calculatrice, les 10 premiers termes de (u_n) et conjecturer que (u_n) est monotone à partir d'un rang que l'on déterminera.

2. Démontrer la conjecture de la question précédente.

Exercice 10. Étudier les variations de la suite (a_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $a_n = \frac{3n-1}{4n+5}$.

Exercice 11. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (t_n) définie par $t_n = \frac{2^n}{n+2}$.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n > 0$.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{t_{n+1}}{t_n} - 1 = \frac{n+1}{n+3}$.

3. En déduire le sens de variation de (t_n).