⧫ Chapitre 8. — Probabilités sur un ensemble fini

I. — Expériences aléatoires et évènements

1) Expériences aléatoires

Définition 1

Une expérience aléatoire est une expérience qui possède les 3 propriétés suivantes :
- l'ensemble des résultats possibles de l'expérience est connu *a priori* ;
- on peut répéter l'expérience dans les mêmes conditions ;
- le résultat d'une réalisation de l'expérience est le fruit du hasard.

Exemple 2.

1. Lancer une pièce équilibrée est une expérience aléatoire. Il y a deux résultats possibles : *pile* ou *face*, on peut répéter l'expérience autant de fois qu'on le désire et, si on lance la pièce, le résultat est bien le fruit du hasard.
2. De même, lancer un dé cubique équilibré est une expérience aléatoire. C'est un exemple historique important. En effet, le mot « aléatoire » vient du latin *alea* qui signifie *dé* et le mot « hasard » vient de l'arabe *al-zahr* qui signifie également *dé*.
3. Un tirage au loto est une expérience aléatoire.

Remarque 3. Toutes les expériences dont les résultats sont le fruit du hasard ne sont pas des expériences aléatoires. Par exemple, si on rencontre quelqu'un dans la rue « par hasard », cela ne constitue pas une expérience aléatoire.

Définition 4

L'ensemble des résultats (ou issues) possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'univers associé à cette expérience. On le note, en général, Ω.

Exemple 5.

1. L'univers du lancer de pièce équilibré est $\Omega = \{pile, face\}$.
2. L'univers du lancer de dé cubique équilibré est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
3. L'univers du tirage du loto est l'ensemble de toutes les combinaisons possibles. Il y en a $\binom{49}{5} \times 10 = 19\,068\,840$.

Remarque 6. Les trois expériences de l'exemple précédent ont un univers de cardinal fni (2 pour la première, 6 pour la deuxième et 19 068 840 pour la troisième). Il existe des expériences dont l'univers contient une infinité d'éléments (par exemple, choisir un réel au hasard dans l'intervalle $[0\,;1]$).

Dans tout ce chapitre, nous ne considérerons que des expériences ayant un univers fini.

2) Évènements

Dans tout ce paragraphe, on considère une expérience aléatoire. On note Ω son univers et on suppose que Ω est fini.

Définition 7

On définit :

1. un **évènement** lié à cette expérience comme étant une partie quelconque de Ω ;
2. un **évènement élémentaire** lié à cette expérience comme étant une partie de Ω ne contenant qu'un seul élément.

Si A est un évènement et si $a \in \mathrm{A}$, on dit que l'issue a réalise l'évènement A. Ainsi, un évènement élémentaire est un évènement qui n'est réalisé que par une seule issue.

Remarque 8. Cette vision est la vision moderne des évènements comme étant des parties de l'univers. Cependant, historiquement, les évènements ont d'abord été définis à l'aide de phrases les décrivant. On a gardé aujourd'hui cette double vision et il faut savoir passer de l'une à l'autre.

Exemple 9. On lance un dé cubique équilibré. L'univers est alors $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. L'évènement A : « Obtenir 6 » est l'évènement $\mathrm{A} = \{6\}$. C'est un évènement élémentaire. Il n'est réalisé que par l'issue 6.
2. L'évènement B : « Obtenir un chiffre pair » est l'évènement $\mathrm{B} = \{2, 4, 6\}$. Il est réalisé par les trois issues 2, 4 et 6.
3. L'évènement C : « Obtenir un chiffre supérieur à 7 » est l'évènement $\mathrm{C} = \varnothing$. Il n'est réalisé par aucune issue de l'expérience.
4. L'évènement D : « Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6 » est l'évènement $\mathrm{D} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$. Il est réalisé par toutes les issues de l'expérience.

Définition 10

1. L'évènement $\varnothing$ est appelé l'évènement impossible. Il n'est réalisé par aucune issue de l'expérience.
2. L'évènement Ω est appelé l'évènement certain. Il est réalisé par toutes les issues de l'expérience.

Remarque 11. Des évènements A et B étant des parties de l'univers, on peut considérer l'évènement $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ que l'on désigne par « A et B », l'évènement $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ que l'on désigne par « A ou B » et l'évènement $\overline{\mathrm{A}}$ qu'on appelle l'évènement contraire de A.

L'évènement $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ est réalisé si et seulement si les deux évènements A et B sont réalisés simultanément, l'évènement $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est réalisé si et seulement si au moins un des deux évènements A ou B est réalisé et $\overline{\mathrm{A}}$ est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé.

Exemple 12. En reprenant les évènements de l'exemple 9, écrire les évènements suivants à l'aide d'une phrase puis à l'aide d'un ensemble :

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \qquad \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \qquad \overline{\mathrm{A}} \qquad \overline{\mathrm{B}} \qquad \mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{B}} \qquad \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}.$$

Définition 13

On dit que deux évènements A et B sont incompatibles (ou disjoints) si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.
Autrement dit, deux évènement sont incompatibles s'il n'existe pas d'issue qui les réalise tous les deux.

Exemple 14.

1. On lance un dé cubique. Les évènements A :« Obtenir un chiffre pair » et B : « Obtenir 5 » sont incompatibles.
2. De manière générale, pour tout évènement A, les évènements A et $\overline{\mathrm{A}}$ sont incompatibles.

II. — Loi de probabilité sur un univers fini

1) Définition

Définition 15

On considère une expérience aléatoire. On suppose que son univers Ω est constitué de n éléments $x_1, x_2, ..., x_n$ c'est-à-dire $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Définir une loi (ou une distribution) de probabilité P sur Ω, c'est associer à chaque issue x_i un réel p_i de telle façon que :

1. pour tout entier i entre 1 et n, $0 \leqslant p_i \leqslant 1$;
2. $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

En règle générale, la probabilité p_i d'un élément x_i sera notée $P(x_i)$.

Remarque 16. La plupart du temps, on dira simplement « probabilité » au lieu de « loi de probabilité ».

Exemple 17.

1. Lorsqu'on lance une pièce, l'univers est $\Omega = \{pile; face\}$. On définit donc une probabilité P sur Ω en définissant $P(pile)$ et $P(face)$. Par exemple, on définit une probabilité P sur Ω en posant $P(pile) = \frac{1}{3}$ et $P(face) = \frac{2}{3}$ et on en définit une autre en posant $P(pile) = \frac{3}{5}$ et $P(face) = \frac{2}{5}$. Il y a donc plusieurs probabilités possibles.
   Si on sait que la pièce est bien équilibré, on choisira la probabilité qui donne la même valeur pour *pile* et $face$ c'est-à-dire la probabilité P définie par $P(pile) = \frac{1}{2}$ et $P(face) = \frac{1}{2}$.
2. De même, si on lance un dé cubique, l'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et, si le dé est bien équilibré, on choisira sur Ω la probabilité P définie par $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$.

Définition 18

Lorsqu'on a choisi une probabilité P sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire, on dit qu'on a modélisé l'expérience par la loi de probabilité P sur Ω.

Définition 19

On considère une expérience aléatoire modélisée par une probabilité P sur son univers Ω. Si A est un évènement de Ω alors on définit la probabilité de A, notée $P(\mathrm{A})$, comme la somme des probabilités des issues qui réalisent A.

Exemple 20. On lance un dé cubique équilibré. On modélise cette expérience par la probabilité P telle que $P(a) = \frac{1}{6}$ pour tout issue a de l'expérience.

Considérons l'évènement A : « Obtenir un chiffre pair ». Alors, $\mathrm{A} = \{2, 4, 6\}$ donc $P(\mathrm{A}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ donc $P(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}$.

Propriété 21

On considère une expérience aléatoire modélisée par une probabilité P sur son univers Ω. Alors,

1. $P(\varnothing) = 0$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Si A et B sont deux évènements tels que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ alors $P(\mathrm{A}) \leqslant P(\mathrm{B})$.
4. Si A est un évènement alors $0 \leqslant P(\mathrm{A}) \leqslant 1$.

Remarque 22. Quand on calcule des probabilités, il est nécessaire de toujours s'assurer que les résultats obtenus sont des réels compris entre 0 et 1.

2) Équiprobabilité

Définition 23

On considère une expérience aléatoire et Ω son univers. La probabilité telle que toutes les issues de Ω aient la même probabilité est appelée l'équiprobabilité (ou loi uniforme) sur Ω.

Remarque 24. C'est la loi qu'on a utilisé dans les exemples précédents.

De manière générale, on modélise par l'équiprobabilité à chaque fois qu'on lance des objets « équilibrés » (pièce, dé) ou qu'on effectue des tirages « au hasard » (d'une carte dans un jeu, d'une boule dans une urne, d'un objet dans un sac...)

Exemple 25. On considère une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. On tire une boule au hasard. L'univers de cette expérience est $\{R_1, R_2, N_1, N_2, N_3\}$. On modélise le tirage par l'équiprobabilité P sur Ω. On a donc $P(a) = \frac{1}{5}$ pour tout issue a de l'expérience. Si on note A : « Tirer une boule rouge » et B : « Tirer une boule noire » alors $P(\mathrm{A}) = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ et $P(\mathrm{B}) = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.

Pour la même expérience, on pourrait ne s'intéresser qu'aux couleurs des boules. L'univers serait alors $\Omega' = \{rouge, noir\}$ et, dans ce cas, le modèle précédent conduit à choisir comme modèle sur Ω la probabilité P' telle que $P'(rouge) = \frac{2}{5}$ et $P'(noir) = \frac{3}{5}$. Dans ce cas, P' n'est pas l'équiprobabilité sur Ω'.

Propriété 26

On considère une expérience aléatoire et $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ son univers. Si P est l'équiprobabilité sur Ω alors :

1. pour tout entier i compris entre 1 et n, $P(x_i) = \frac{1}{n}$;

2. si A est un évènement réalisé par exactement m issues différentes alors $P(\mathrm{A}) = \frac{m}{n}$.

Exemple 27. — On tire simultanément une main de 3 cartes au hasard dans un jeu de 32. On considère les évènements A : « La main contient le roi de trèfle », B : « La main contient un as » et C : « La main contient exactement deux cœur ».

Déterminer la probabilité des évènements A, B et C.

3) Union, intersection et complémentaire

Propriété 28

On considère une expérience aléatoire modélisée par une probabilité P sur son univers Ω. Soit A et B deux évènements de Ω. Alors,

1. $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

2. $P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - P(\mathrm{A})$.

Exemple 29. — Dans un club de sport, il y a 80 membres. Ceux-ci peuvent pratiquer plusieurs sports dont le tennis et la natation. On sait que 20 membres pratiquent le tennis, 15 membres pratiquent la natation et, parmi les membres précédents, 5 membres pratiquent les deux sports. On sélectionne un adhérent de ce club au hasard.

On considère les évènements suivants :

A : « L'adhérent pratique le tennis » ;

B : « L'adhérent pratique la natation » ;

C : « L'adhérent pratique le tennis et la natation » ;

D : « L'adhérent pratique le tennis ou la natation » ;

E : « L'adhérent ne pratique pas la natation » ;

F : « L'adhérent ne pratique ni la natation ni le tennis ».

Déterminer les probabilités des évènements A, B, C, D, E, et F.

Remarque 30.

1. Si deux évènements A et B sont incompatibles alors $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ donc $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0$ et ainsi $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})$.

2. L'égalité $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ peut aussi se réécrire

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$$

ou encore

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) + P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})$$

III. — Exercices

1) Expériences aléatoires et évènements

Exercice 1. Une urne contient cinq boules rouges numérotées 1, 1, 2, 4 et 4, quatre boules bleues numérotées 1, 1, 2 et 4 et six boules vertes numérotées 1, 1, 1, 2, 2 et 4.

On tire une boule au hasard dans l'urne. Déterminer l'univers de l'expérience

1. si on s'intéresse à la couleur de la boule tirée ;

2. si on s'intéresse au numéro de la boule tirée.

Exercice 2. On lance deux dés cubiques équilibrés et on calcule le produit des deux nombres obtenus.

Déterminer l'univers de cette expérience aléatoire.

Exercice 3. On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Dans chacun des cas suivants, déterminer le cardinal de l'univers :

1. on s'intéresse aux deux nombres obtenus en distinguant les deux dés ;

2. on s'intérese aux deux nombres obtenus sans distinguer les deux dés.

Exercice 4. On lance un dé cubique. Pour chacun des évènements suivants, dire s'il est élémentaire, impossible, certain ou aucun des trois.

1. A : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 » ;

2. B : « Obtenir un multiple de 3 » ;

3. C : « Obtenir un multiple de 7 » ;

4. D : « Obtenir un diviseur de 7 » ;

5. E : « Obtenir un diviseur de 12 ».

2) Loi de probabilité

Exercice 5. On reprend la situation de l'exercice 1.

1. Déterminer la probabilité de tirer une boule rouge.

2. Déterminer la probabilité de tirer une boule portant le numéro 1.

3. On tire à présent deux boules dans l'urne.

  a. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?

  b. Quelle est la probabilité de tirer deux boules portant le numéro 1 ?

Exercice 6. Un cadenas possède un code à 3 chiffres. On tente un code au hasard. Quelle est la probabilité de trouver le bon code ?

Exercice 7. On lance deux fois de suite une pièce équilibrée.

1. Représenter la situation par un arbre.

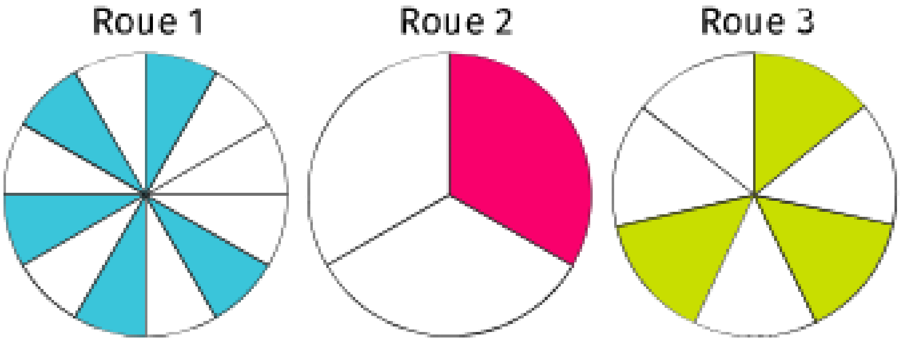
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois *pile* ?

Exercice 8. On dispose d'un dé truqué tel que la probabilité d'obtenir une face soit proportionnelle au chiffre porté par cette face. On lance ce dé.

1. Déterminer la probabilité de chaque face.

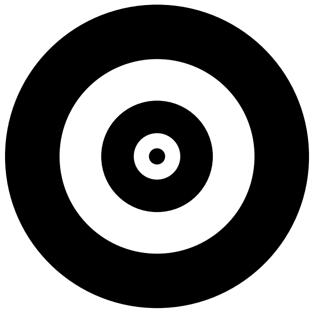
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?

Exercice 9. Lors d'une kermesse, dans un stand, sont disposées les trois roues ci-dessous.

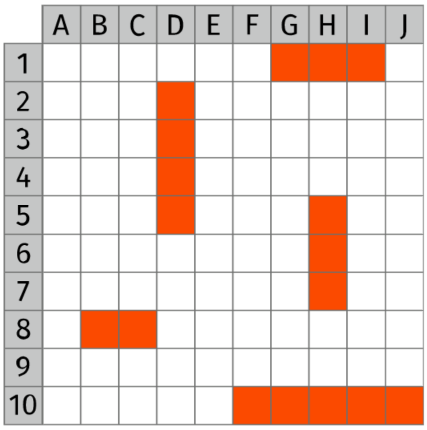


Tous les secteurs angulaires d'une même roue ont la même aire. Le joueur doit choisir une des trois roues et la lancer. Il remporte un lot s'il tombe sur un secteur coloré. Quelle roue le joueur a-t-il intérêt à choisir ?

Exercice 10. Un joueur lance une fléchette sur une cible de rayon 20 cm partagée en 5 secteurs délimités par les cercles de rayons 1 cm, 3 cm, 7 cm et 13 cm. En supposant que la fléchette atteint un point « au hasard » sur la cible, quelle est la probabilité qu'elle atteigne chacun des 5 secteurs ?



Exercice 11. À la bataille navale, chaque joueur a une flotte composée de cinq bateaux : un porte-avions (5 cases), un croiseur (4 cases), un contre-torpilleur (3 cases), un sous-marin (3 cases) et un torpilleur (2 cases). Un joueur a disposé ses bateaux comme représentés ci-contre. Les bateaux sont obligatoirement disposés horizontalement ou verticalement. L'autre joueur choisit de tirer sur une case au hasard.



1. Quelle est la probabilité qu'il touche un bateau ?
2. Quelle est la probabilité qu'il touche un bateau s'il décide de ne tirer que dans les colonnes D et H ?
3. Au tour précédent, il a touché la case D4. Quelle est la probabilité de toucher à nouveau le croiseur en jouant intelligemment ?

Exercice 12. Un loto est organisé. On tire au hasard, successivement et sans remise, des jetons dans une urne qui contient 100 jetons numérotés de 0 à 99.

Pour jouer, on utilise une grille composée de 3 lignes. Sur chaque ligne, il y a 5 numéro et tous les numéros de la grille sont différents.

1. Quelle est la probabilité que le premier numéro tiré figure sur la grille ?
2. On suppose que le premier numéro tiré n'est pas sur la grille. Quelle est la probabilité que le second numéro tiré figure sur la grille ?
3. On suppose que le premier numéro tiré est sur la grille. Quelle est la probabilité que le second numéro tiré figure également sur la grille ?

Exercice 13. On dispose de deux dés cubiques parfaitement équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer simultanément ces deux dés et à soustraire le plus petit des deux nombres au plus grand. Par exemple, si on obtient 3 et 5, l'issue est $5 - 3 = 2$. Si on obtient le même nombre sur les deux dés, l'issue est 0.

1. Compléter directement sur l'énoncé le tableau ci-dessous et en déduire l'univers de cette expérience.

dé 2 / dé 1	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

2. Les issues de l'expérience sont-elles équiprobables ?
3. Déterminer les probabilités des évènements suivants :
   A : « Obtenir 5 »
   B : « Obtenir un nombre pair »
   C : « Obtenir une nombre inférieur ou égal à 2 »
4. Un jeu consiste à deviner quel va être le résultat de cette expérience. Sur quelle valeur doit-on parier pour avoir la plus grande probabilité de gagner ?

Exercice 14. Une urne contient trois boules bleues, deux boules rouges et une boule verte. On tire successivement et sans remise deux boules dans l'urne.

1. Traduire la situation par un arbre de dénombrement.
2. Quelle est la probabilité :
   a. de tirer deux boules de la même couleur ?
   b. de ne pas tirer de boule bleue ?
   c. de tirer au moins une boule verte ?

Exercice 15. On tire simultanément trois cartes au hasard dans un paquet de 32 cartes. Quelle est la probabilité

1. de n'obtenir que des coeurs ?
2. de n'obtenir que des as ?
3. d'obtenir deux coeurs et un pique ?

3) Union, intersection et complémentaire

Exercice 16. On donne $P(\mathrm{A}) = 0{,}4$, $P(\mathrm{B}) = 0{,}7$ et $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}2$. Calculer $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$.

Exercice 17. On donne $P(\mathrm{R}) = 0{,}6$, $P(\mathrm{S}) = 0{,}8$ et $P(\mathrm{R} \cup \mathrm{S}) = 0{,}9$. Calculer $P(\mathrm{R} \cap \mathrm{S})$.

Exercice 18. On donne $P(\mathrm{E}) = 0{,}6$, $P(\mathrm{E} \cap \mathrm{F}) = 0{,}5$ et $P(\mathrm{E} \cup \mathrm{F}) = 0{,}7$. Calculer $P(\mathrm{F})$.

Exercice 19. On pioche au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On considère les évènements F : « On obtient une figure » et T : « On obtient un trèfle ».

1. Déterminer $P(\mathrm{F})$ et $P(\mathrm{T})$.
2. Déterminer $P(\mathrm{F} \cap \mathrm{T})$ et $P(\mathrm{F} \cup \mathrm{T})$.
3. Déterminer la probabilité de ne pas obtenir une figure.

Exercice 20. On écrit chacune des lettres du mot ETRE sur un carton et on place ces quatre cartons dans un sac.

On tire un carton au hasard dans le sac puis on en tire un second sans remettre le premier dans le sac. On obtient ainsi un « mot » de deux lettres (qui n'a pas forcément un sens).

1. Utiliser un arbre pour déterminer le nombre d'issues possibles.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement A : « le mot formé commence par un T ».
3. Déterminer la probabilité de l'évènement B : « le mot formé contient une voyelle ».
4. Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap B$.
5. En déduire la probabilité de l'évènement $A \cup B$.

Exercice 21. On choisit au hasard un nombre entier entre 1 et 100. On considère les évènements :

A : « le nombre choisi est le carré d'un entier » ;

B : « le nombre choisi est le cube d'un entier ».

1. Les évènements A et B sont-ils incompatibles ?
2. Déterminer $P(\mathrm{A})$, $P(\mathrm{B})$ et $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.
3. En déduire $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$.

Exercice 22. Un jeu de tarot comporte 78 cartes : 56 cartes « classiques », (14 de chaque couleur : roi ; dame ; cavalier ; valet ; 10 ; 9 ; 8 ; 7 ; 6 ; 5 ; 4 ; 3 ; 2 ; as), 21 atouts (numérotés de 1 à 21) et un joker appelé « excuse ». On tire au hasard une carte dans le jeu de tarot et on considère les évènements :

C : « la carte tirée est un carreau » ;

F : « la carte tirée est une figure » ;

A : « la carte tirée est un atout ».

1. Déterminer $P(\mathrm{C})$, $P(\mathrm{F})$ et $P(\mathrm{A})$.
2. Définir par une phrase l'évènement $\mathrm{C} \cap \mathrm{F}$ et donner sa probabilité.
3. Définir par une phrase l'évènement $\mathrm{C} \cup \mathrm{F}$ et donner sa probabilité.
4. Que dire des évènements $\mathrm{C} \cap \mathrm{A}$ et $\mathrm{F} \cap \mathrm{A}$?
5. En déduire $P(\mathrm{C} \cup \mathrm{A})$ et $P(\mathrm{F} \cup \mathrm{A})$?

Exercice 23. Un octet est une suite de 8 chiffres 0 ou 1. Par exemple, 01000110 est un octet.

On choisit un octet au hasard.

Quelle est la probabilité qu'il contienne au moins un 0 et un 1 ?

Exercice 24. On considère une classe de 30 élèves qui sont tous nés en 2003. Le professeur de mathématiques propose de parier avec vous 10 euros que deux personnes dans cette classe ont la même date d'anniversaire.

Avez-vous intérêt à accepter le pari ?

Exercice 25. On interroge au hasard 200 personnes à la sortie d'une salle de cinéma à propos du roman dont le film qu'ils ont vu est une adaptation. 95 personnes avaient lu le roman avant de venir voir le film et 140 personnes ont aimé le film. De plus, parmi les personnes qui ont lu le roman, 55 ont apprécié l'adaptation.

On considère les évènements :

F : « la personne a aimé le film » et R : « la personne a lu le roman ».

1. Représenter la situation par un diagramme de Venn.
2. Quelle est la probabilité qu'une personne n'ait pas aimé le film et n'ait pas lu le livre ?
3. Définir par une phrase l'évènement $R \cap \overline{F}$ et donner sa probabilité.
4. Définir par une phrase l'évènement $\overline{R} \cap F$ et donner sa probabilité.

Exercice 26. Dans une population, les individus peuvent posséder (ou non) un caractère génétique a ou un caractère génétique b (ou les deux caractères). La probabilité, pour un individu choisi au hasard, de posséder le caractère a est 0,8, la probabilité de posséder le caractère b est 0,6 et la probabilité de posséder les deux caractères est 0,45.

On choisit un individu au hasard dans la population et on note

A : « l'individu possède la caractère a » B : « l'individu possède le caractère b »

1. Donner la probabilité des évènements A, B et $A \cap B$ et en déduire la probabilité $A \cup B$.
2. On considère l'évènement C : « l'individu ne possède aucun des deux caractères ».
   Exprimer C à l'aide de A et B et en déduire la probabilité de C.

4) Exercices de synthèse

Exercice 27. Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher : deux rouges, une verte et une jaune. On tire au hasard une boule de cette urne. Après avoir noté la couleur de cette boule, on la replace dans l'urne et on procède à un second tirage. On note alors à nouveau la couleur obtenue.

1. Représenter l'expérience par un arbre en notant R_1 et R_2 les deux boules rouges, V la boule verte et J la boule jaune.
2. Soit E l'évènement « les deux boules tirées sont rouges » et F l'évènement « une seule des deux boules tirées est rouge ».
   A l'aide de l'arbre, déterminer les probabilités des évènements E et F.
3. Définir par une phrase l'évènement $G = E \cup F$.
   Calculer la probabilité de G.
4. On considère l'évènement H : « aucune des boules tirées n'est rouge ». Exprimer H à l'aide de G et en déduire la probabilité de H.
5. Les boules de l'urne portent un numéro : les rouges portent toutes les deux le numéro 1, la verte le numéro 2 et la jaune le numéro 4.
   On appelle S la somme des numéros obtenus après le tirage des deux boules.
   Déterminer, en justifiant sa réponse, la probabilité que S soit supérieure ou égale à 4. (On pourra s'aider de l'arbre construit à la question 1).

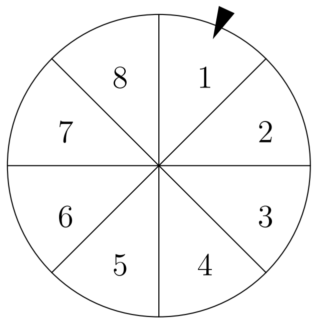
Exercice 28. Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.). Pour chacune des questions, une seule réponse est exacte.

1. Lors d'une tombola, on fait tourner une roue parfaitement équilibrée représentée ci-dessous. Les 8 secteurs sont identiques. On lit le numéro en face du repère lorsque la roue s'arrête.

On considère les évènements A : « Le numéro est strictement supérieur à 4 » et B : « Le numéro est pair »

a. La probabilité de l'évènement $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ est :

a) $\dfrac{1}{8}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{1}{2}$.



b. La probabilité de l'évènement $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est :

a) $\dfrac{3}{4}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1.

c. La probabilité de l'évènement $\overline{\mathrm{A}}$ est :

a) 0 b $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{1}{4}$.

2. On désigne par A et B des évènements définis sur un univers Ω et par P une probabilité sur Ω.

a. Si A et B sont incompatibles, si $P(\mathrm{A}) = 0{,}43$ et $P(\mathrm{B}) = 0{,}15$ alors la probabilité de $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est :

a) 0,0645 b) 0,58 c) 0,28.

b. Si $P(\mathrm{A}) = 0{,}6$ et $P(\overline{\mathrm{B}}) = 0{,}7$ et $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}8$ alors :

a) $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}1$ b) $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}5$ c) ces valeurs ne sont pas possibles.

c. On lance deux pièces de monnaie parfaitement équilibrées. La probabilité d'obtenir au moins une fois pile est :

a) 0,33 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{3}{4}$.

Exercice 29. On dispose d'un dé cubique dont les six faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Ce dé est déséquilibré de la façon suivante : la probabilité d'obtenir la face numérotée 1 est égale à 0,5 et les 5 autres faces ont la même probabilité d'être obtenue.

On lance une fois le dé et on note le numéro obtenu.

1. Démontrer que la probabilité d'obtenir 2 est 0,1.

2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 3 »

B : « Obtenir un nombre impair »

C : « Obtenir un nombre pair »

D : « Obtenir un nombre autre que 1 »

3. Décrire chacun des évènements suivants à l'aide d'une phrase claire et précise puis calculer sa probabilité :

$$\overline{\mathrm{B}}\ ; \qquad \mathrm{A} \cup \mathrm{B}\ ; \qquad \mathrm{A} \cap \mathrm{B}\ ; \qquad \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}.$$

Exercice 30. Dans une station balnéaire, on a interrogé 600 touristes, français ou étrangers, sur leur séjour. Tous ont répondu être soit au camping, soit à l'hôtel.

1. Sachant qu'un total de 240 touristes étrangers ont été interrogés et qu'un quart des français interrogés ont séjourné dans un hôtel, compléter le tableau suivant :

	Camping	Hôtel	Total
Français			
Etrangers		48	
Total			600

2. Dans cette question, les résultats seront donnés sous forme décimale arrondie à 10^{-2} près.
On choisit au hasard une personne parmi les 600 interrogées et on suppose que toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies.
On considère les évènements E : « La personne interrogée est un touriste étranger » et C : « La personne interrogée séjourne dans un camping ».

a. Calculer les probabilités $P(\mathrm{E})$ et $P(\mathrm{C})$ des évènements E et C.

b. On considère l'évènement A : « La personne interrogée est un touriste étranger et séjourne dans un camping ».
Exprimer l'évènement A à l'aide de E et C puis calculer la probabilité $P(\mathrm{A})$ de cet évènement.

c. Calculer la probabilité $P(\mathrm{E} \cup \mathrm{C})$ de l'évènement $\mathrm{E} \cup \mathrm{C}$.

d. On sait que la personne interrogée est dans un camping. Calculer la probabilité qu'elle soit un touriste français.

Exercice 31. Une urne contient 20 boules blanches, 10 boules noires et un certain nombre n de boules rouges.
On tire au hasard une boule dans l'urne.
On considère les évènements :
B : « la boule tirée est blanche »
N : « la boule tirée est noire »
R : « la boule tirée est rouge »

1. Dans cette question, on suppose que l'urne contient en tout 50 boules.

a. Déterminer la valeur de n.

b. Déterminer les probabilités des évènements B, N et R.

2. Dans cette question, on suppose que le nombre total de boules dans l'urne est inconnu (et donc n est également inconnu).

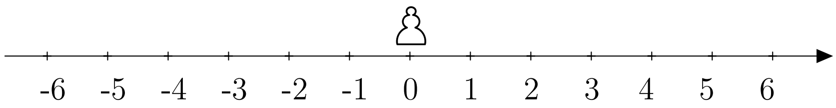
a. Exprimer, en fonction de n, la probabilité de l'évènement R.

b. Déterminer n de telle façon que $P(R) = 0{,}75$.

c. Déterminer le plus petit entier n tel que $P(R) \geqslant 0{,}99$.

d. Déterminer la plus grande valeur de n telle la probabilité que la boule tirée ne soit pas rouge soit au moins égale à $\frac{3}{4}$.

Exercice 32. On dispose un pion sur un axe gradué. Initialement, le pion se trouve à l'abscisse 0.



On lance plusieurs fois de suite une pièce équilibrée. À chaque fois qu'on obtient *pile*, on déplace le pion d'une unité vers la droite et à chaque fois qu'on obtient *face*, on déplace le pion d'une unité vers la gauche.

Par exemple, si on lance la pièce 3 fois et qu'on obtient *face*, *pile* et *face* alors le pion se trouve successivement à l'abscisse -1 puis 0 puis -1.

1. Dans cette question, on suppose qu'on lance la pièce 3 fois.

a. Déterminer la probabilité que le pion soit à l'abscisse 1 à l'issue des 3 lancers.

b. Déterminer la probabilité que le pion soit à l'abscisse 2 à l'issue des 3 lancers.

2. Dans cette question, on suppose qu'on lance la pièce 2020 fois.

a. Déterminer la probabilité que le pion soit à l'abscisse 1 à l'issue des 2020 lancers.

b. Déterminer la probabilité que le pion soit à l'abscisse 2020 à l'issue des 2020 lancers.

Exercice 33. On lance un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. La loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

face	1	2	3	4	5	6
probabilité	$\frac{1}{12}$	a	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

1. Déterminer la valeur de a.

2. Écrire chacun des évènements suivants sous forme d'un ensemble puis déterminer sa probabilité.

a. A : « Obtenir un chiffre pair »

b. B : « Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 5 »

c. $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.

Exercice 34. Une urne contient 2 boules vertes, 1 boule rouge et 1 boule noire. On effectue successivement et avec remise deux tirages au hasard d'une boule dans l'urne. On note la couleur de chaque boule tirée. Une issue de cette expérience est un couple de deux couleurs dans l'ordre d'apparition.

1. À l'aide d'un arbre, déterminer le nombre de tirages possibles puis le nombre d'issues de l'expérience. (Dans l'arbre, on notera V_1 et V_2 les 2 boules vertes, R la boule rouge et N la boule noire.)

2. Quel est l'univers de cette expérience ?

3. Déterminer la probabilité de l'évènement A : « les deux boules sont de la même couleur ».

4. On considère l'évènement B : « Au moins une des boules tirées est noire ».

a. Décrire par une phrase l'évènement $\overline{\mathrm{B}}$.

b. Déterminer la probabilité de $\overline{\mathrm{B}}$ et en déduire celle de B.

Exercice 35. Une agence de voyage a effectué un sondage auprès de ses clients pendant la saison estivale. Les résultats de ce sondage sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	Le client a voyagé à l'étranger	Le client a voyagé en France	Total
Le client est satisfait		305	
Le client n'est pas satisfait	155		220
Total		370	1 000

1. Compléter le tableau ci-dessus directement sur l'énoncé.

2. On choisit au hasard un client de cette agence.

- **a.** Quel est univers de l'expérience ?
  Par quelle probabilité va-t-on modéliser l'expérience ?
- **b.** Quelle est la probabilité de l'évènement A : « le client est satisfait » ?
- **c.** Quelle est la probabilité de l'évènement B : « le client a voyagé en France » ?
- **d.** Quelle est la probabilité de l'évènement C : « le client est satisfait et il a voyagé en France » ?
- **e.** Définir par une phrase l'évènement $\overline{A \cup B}$ puis calculer sa probabilité.

3. On choisit au hasard un client ayant voyagé à l'étranger.
Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas satisfait ?

Exercice 36. Dans un lycée, une classe de 32 élèves (20 filles et 12 garçons) doit être répartie en deux groupes A et B pour les TP de sciences. Chaque groupe contient 16 élèves pris au hasard.

Y a-t-il une chance sur deux pour que le groupe A contiennent autant de filles que de garçons ?

Exercice 37. Un enfant joue avec des cubes alphabétiques en bois. Il dispose d'un cube pour chaque lettre de l'alphabet et il en prend 5 au hasard qu'il empile.

1. Quelle est la probabilité que ces cubes, de haut en bas, forment le mot PRIME.

2. Quelle est la probabilité qu'il choisisse les lettres du mot CIBLE ?

3. Quelle est la probabilité qu'il choisissent 5 lettres appartenant au mot ABDOMEN ?

Exercice 38. Une urne contient six boules numérotée de 1 à 6. On tire successivement et sans remise les 6 boules de l'urne.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir des boules numérotées dans l'ordre croissant.

2. Déterminer la probabilité que la seconde boule tirée porte le numéro 3.

3. Déterminer la probabilité que le numéro de la dernière boule tirée soit supérieur à tous les numéros des boules précédemment tirées.

4. On considère 6 compartiments numérotés de 1 à 6 et chaque boule est placé dans le compartiment correspondant à son tirage (la première boule tirée dans le compartiment 1, la deuxième boule tirée dans le compartiment deux, etc). On dit qu'une boule est bien placée si le numéro de la boule correspond au numéro du compartiment.

- **a.** Quelle est la probabilité pour qu'exactement 4 boules soient bien placées ?
- **b.** Quelle est la probabilité qu'aucune boule ne soit bien placée ?