⧫ Chapitre 7. Polygones et cercles du plan

I. — Généralités sur les polygones

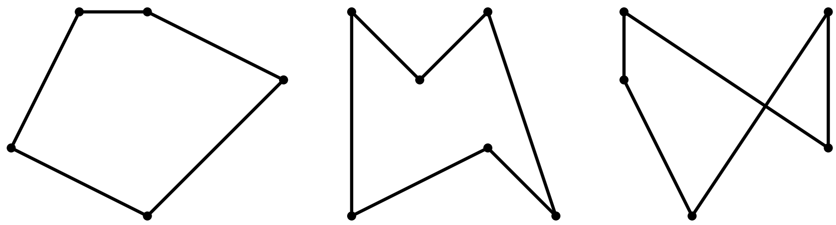
1) Définitions et propriétés

Définition 1

Un polygone est une ligne brisée fermée c'est-à-dire une figure composée de n segments ($n \geqslant 3$) tels que chaque segment partage chacune de ses extrémités avec exactement un autre segment.

Les segments qui composent le polygone sont appelés les côtés et les extrémités de ces segments sont appelés les sommets du polygone.

Exemple 2. Voici trois exemples de polygones :



$\mathcal{P}_1$ $\mathcal{P}_2$ $\mathcal{P}_3$

Les polygones $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ possèdent 5 côtés et 5 sommets alors que le polygone $\mathcal{P}_2$ possèdent 6 côtés et 6 sommets.

Propriété 3

Un polygone a autant de côtés que des sommets.

Propriété 4

Soit $\mathcal{P}$ un polygone. Si A et B sont deux sommets non consécutifs de $\mathcal{P}$ alors le segment [AB] s'appelle une diagonale de $\mathcal{P}$.

Exemple 5. Tracer un polygone ayant 7 côtés puis tracer toutes ses diagonales. Combien en possède-t-il ?

Définition 6

Un polygone est dit croisé si deux de ses côtés non consécutifs se coupent. Sinon, il est dit non croisé.

Exemple 7. Sur le figure de l'exemple 2, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont non croisés et $\mathcal{P}_3$ est croisé.

Définition 8

Un polygone non croisé est dit convexe si, pour tous points A et B du polygone, le segment [AB] ne contient pas de point extérieur au polygone. Dans le cas contraire, un polygone est dit non convexe (ou concave).

Exemple 9. Sur le figure de l'exemple 2, $\mathcal{P}_1$ est convexe et $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont non convexes.

Propriété 10

Un polygone non croisé $\mathcal{P}$ est convexe si et seulement si l'une des proposition suivantes est vérifiée :

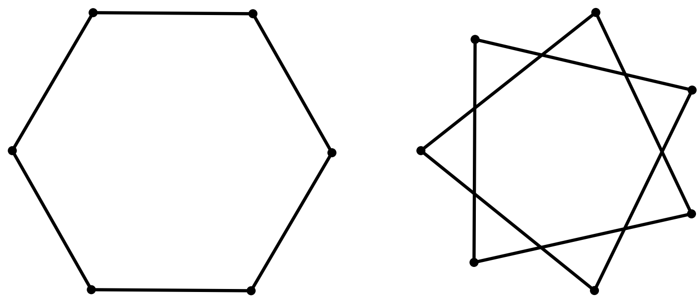
1. toutes les diagonales de $\mathcal{P}$ sont entièrement situées à l'intérieur de $\mathcal{P}$;
2. pour tous sommets A et B consécutifs de $\mathcal{P}$, tous les sommets de $\mathcal{P}$ se trouvent du même côté de la droite (AB) ;
3. les angles intérieurs de $\mathcal{P}$ sont tous inférieurs à 180°.

Définition 11

Un polygone est dit régulier si tous ses côtés ont la même longueur et tous ses angles ont la même mesure.

Remarque 12. On peut montrer qu'un polygone est régulier si et seulement s'il existe une rotation r telle que, pour tout sommet A du polygone, l'image de A par r est le sommet suivant du polygone. Le centre de la rotation est alors appelé le centre du polygone régulier.

Un polygone régulier peut être ou non croisé. Lorsqu'il est croisé, on parle de polygone étoilé.



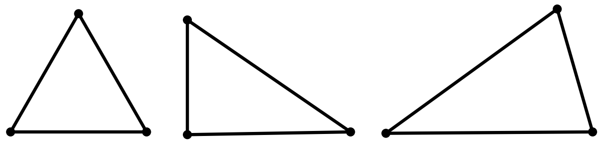
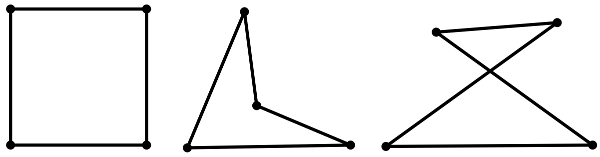
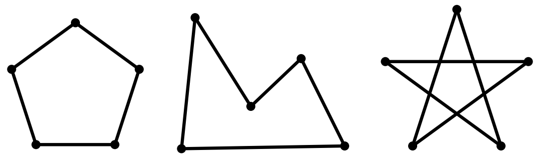
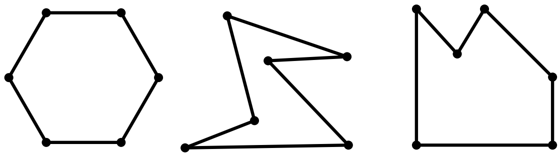
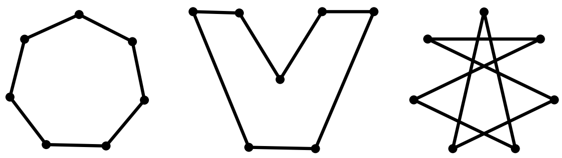
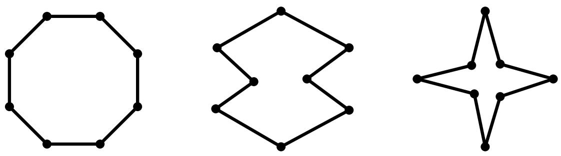
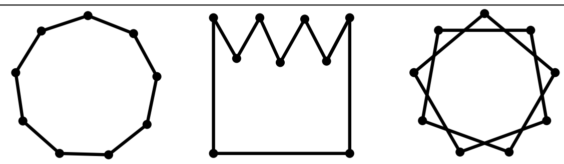
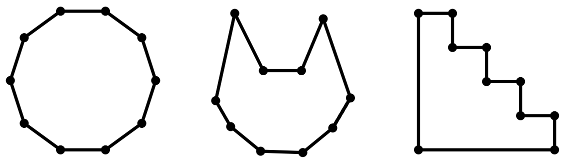
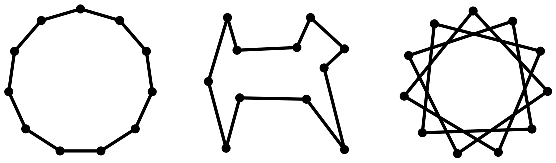
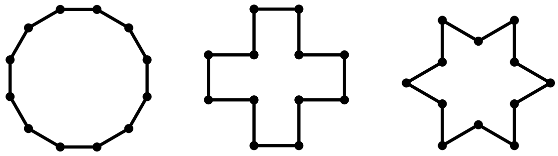
polygone convexe régulier à 6 côtés   polygone étoilé à 7 côtés

Propriété 13

La somme des angles d'un polygone non croisé ayant n côtés est $180(n-2)$ degrés.

Remarque 14. En particulier, on en déduit que les angles intérieurs d'un polygone convexe régulier à n côtés mesurent $\dfrac{180(n-2)}{n}$ degrés. Pour $n = 3$, on retrouve que la somme des angles d'un triangle est $180(3-2) = 180$ degrés.

Exemple 15. Cas particuliers à connaître

nom	nombre de côtés	Exemples
triangle	3	
quadrilatère	4	
pentagone	5	
hexagone	6	
heptagone	7	
octogone	8	
ennéagone (ou nonagone)	9	
décagone	10	
hendécagone	11	
dodécagone	12	

II. — Quadrilatères usuels

1) Parallélogrammes

Définition 16

On dit qu'un quadrilatère est un parallélogramme si ses deux diagonales se coupent en leur milieu I. Le point I est alors appelé le centre du parallélogramme.

Remarque 17.

1. Un parallélogramme est un polygone convexe.
2. La définition précédente n'exclut pas que les 4 sommets du quadrilatère soient alignés. Dans ce cas, on parle de parallélogramme aplati.

Méthode 18 : Comment tracer un parallélogramme ?

Pour tracer un parallélogramme ABCD de côtés a et b, on commence par tracer un segment [AB] de longueur a puis un segment [AD] de longueur b. Ensuite, on pique la pointe du compas en B et on trace un arc de cercle de rayon b, on pique la pointe du compas en D et on trace un arc de cercle de rayon a et le point d'intersection des deux arcs de cercle est le point C.

Exemple 19. Tracer deux parallélogrammes différents dont les côtés mesurent 5 cm et 8 cm.

Propriété 20

Soit A, B, C et D quatre points non alignés du plan. Alors, ABCD est un parallélogramme non aplati si et seulement si l'un des propositions suivantes est vérifiée :

1. (AB) est parallèle à (CD) et (AD) est parallèle à (BC) ;
2. ABCD n'est pas croisé, AB = CD et AD = BC ;
3. AB = CD et (AB) est parallèle à (CD) ;
4. ABCD est convexe et ses angles opposés ont mêmes mesures ;
5. les angles consécutifs de ABCD sont supplémentaires deux à deux (c'est-à-dire la somme de deux angles consécutifs de ABCD vaut toujours 180°).

Exemple 21. On considère dans le plan 6 points distincts A, B, C, D, E et F tels que ABCD et BEFC soient des parallélogrammes.

Montrer que (AE) et (DF) sont parallèles.

Propriété 22

L'aire d'un parallélogramme de côté b et de hauteur associée h est $b \times h$.

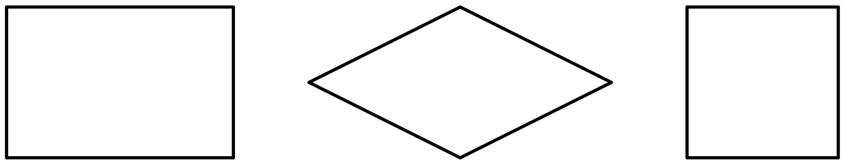
Exemple 23. On considère un parallélogramme ABCD tel que AB = 8 cm et AC = 5 cm. On note H le point d'intersection de la perpendiculaire (AB) passant par D avec (AB). Sachant que HB = 5 cm, déterminer l'aire, en cm^2, du parallélogramme ABCD.

2) Rectangles, losanges et carrés

Définition 24

On dit qu'un quadrilatère ABCD est

- un rectangle si ABCD est un parallélogramme possédant un angle droit.
- un losange si ABCD est un parallélogramme possédant deux côtés consécutifs de même longueur.
- un carré si ABCD est à la fois un rectangle et un losange.



un rectangle — un losange — un carré

Propriété 25

Un quadrilatère est un rectangle si et seulement si ses diagonales ont même longueur et se coupent en leur milieu.

Exemple 26. Soit ABC un triangle rectangle en A. On note I le milieu de [BC] et D le symétrique de A par rapport à I.

1. Montrer que ABDC est un rectangle.
2. En déduire que AI = IB = IC.

Propriété 27

Un quadrilatère est un losange si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.

Exemple 28. Soit ABCD un parallélogramme tel que $\widehat{\mathrm{CAB}} = 71°$ et $\widehat{\mathrm{ABD}} = 19°$.

Montrer que ABCD est un losange.

Corollaire 29

Un quadrilatère est un carré si et seulement si ses diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu en formant un angle droit.

Exemple 30. On considère un triangle ABC isocèle rectangle en A. On note D et E les symétriques respectifs de B et C par rapport à A.

Montrer que BCDE est un carré.

Propriété 31

L'aire d'un rectangle de côtés a et b est $a \times b$ et l'aire d'un losange de diagonales d et D et $\dfrac{d \times D}{2}$.

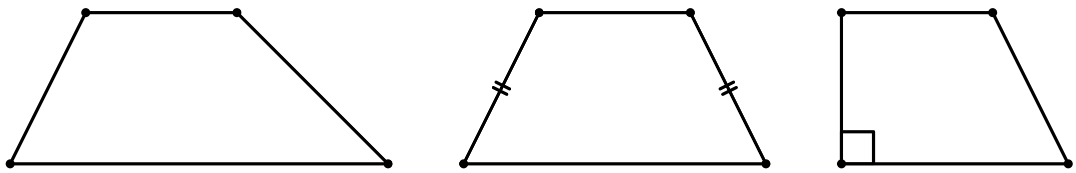
Exemple 32. En utilisant seulement la règle graduée et le compas, construire un carré dont l'aire est 8 cm^2.

3) Trapèzes

Définition 33

On dit que ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD] si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Si, de plus, AD = BC, on dit que ABCD est un trapèze isocèle et si (AD) est perpendiculaire à (AB), on dit que ABCD est un trapèze rectangle.

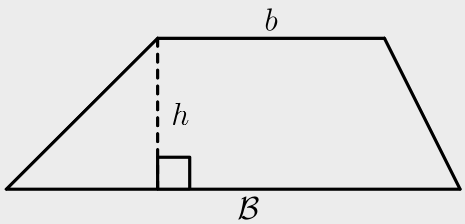


trapèze quelconque trapèze isocèle trapèze rectangle

Remarque 34. Un trapèze à la fois isocèle et rectangle est un rectangle.

Propriété 35

L'aire d'un trapèze de petite base b, de grande base $\mathcal{B}$ et de hauteur h est $\dfrac{(b+\mathcal{B}) \times h}{2}$.



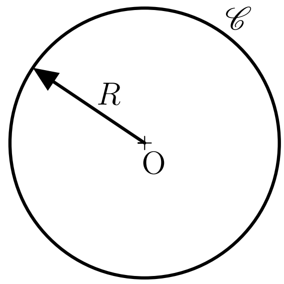
Exemple 36. On considère un trapèze ABCD de petite base AB = 2 cm et de grande base CD = 7 cm. On note H le point d'intersection de la perpendiculaire à (CD) passant par A avec (CD). Sachant que AH = CH = 4 cm,

1. déterminer l'aire de ABCD ;
2. déterminer le périmètre de ABCD ;
3. déterminer les longueurs des deux diagonales de ABCD.

III. — Cercles et disques

Définition 37

Soit O un point du plan et R un réel strictement positif.
Le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que $\mathrm{O}M = R$.
Le disque $\mathcal{D}$ de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que $\mathrm{O}M \leqslant R$. Il s'agit donc de la surface délimitée par $\mathscr{C}$ et contenant O.



Définition 38

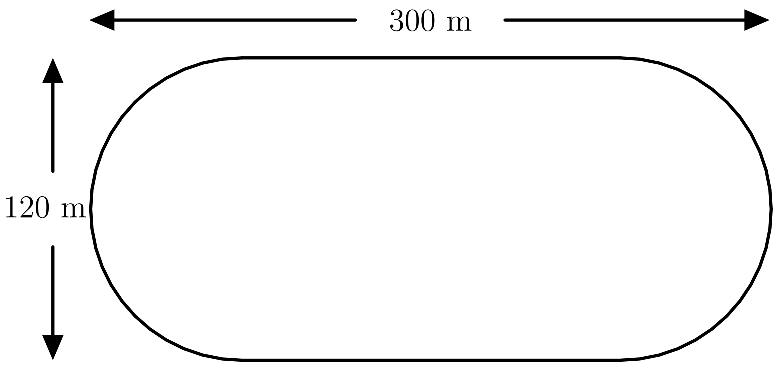
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R. Soit A et B deux points du cercle.

1. Le segment [AB] s'appelle une corde du cercle $\mathscr{C}$.
2. Le segment [OA] s'appelle un rayon du cercle.
3. Si O est le milieu de [AB] alors [AB] s'appelle un diamètre de $\mathscr{C}$ et on dit que A et B sont diamétralement opposés.

Propriété 39

Le périmètre (ou circonférence ou encore longueur) d'un cercle de rayon R est $2\pi R$ et l'aire d'un disque de rayon R est πR^2.

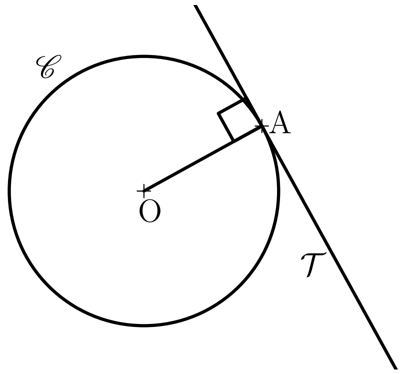
Exemple 40. Un stade d'athlétisme est modélisé par le schéma ci-dessous.



Sachant que les arcs sont des demi-cercles et que les bords rectilignes sont deux côtés opposés d'un rectangle, déterminer le périmètre et l'aire de ce stade.

Définition 41

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O. Soit A $\in \mathscr{C}$. La droite $\mathcal{T}$ passant par A et perpendiculaire à (OA) est appelée la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.



Propriété 42

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R. Soit A $\in \mathscr{C}$ et $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathscr{C}$ en A. Alors, la droite $\mathcal{T}$ coupe le cercle $\mathscr{C}$ en une unique point (qui est le point A).

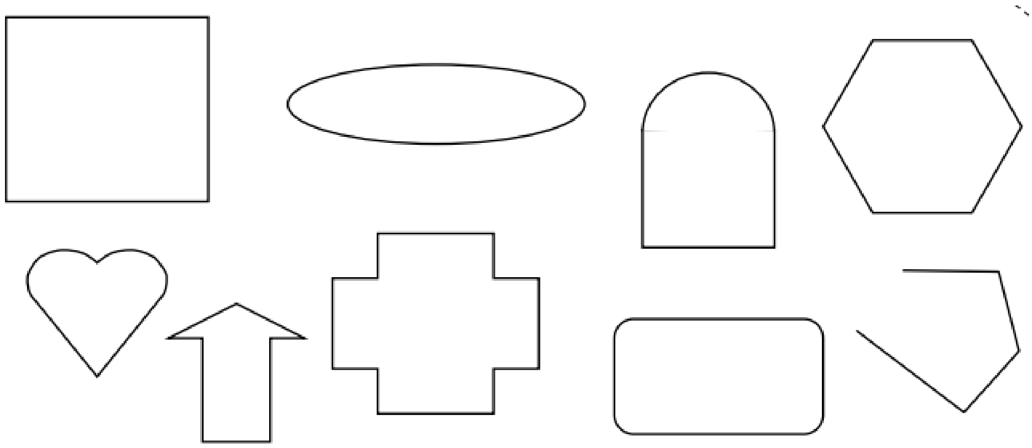
Exemple 43. On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 5 cm. On considère sur $\mathscr{C}$ deux points A et B diamétralement opposés. La perpendiculaire à (AB) passant par O coupe le cercle en deux points : le point C et le point D.

1. Déterminer la nature précise du quadrilatère ACBD. Déterminer son aire et son périmètre.
2. On note $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathscr{C}$ en D. On considère sur $\mathcal{T}$ deux points E et F tels que EF = 3 cm. Démontrer que AEFB est un trapèze et déterminer son aire.

IV. — Exercices

1) Généralités sur les polygones

Exercice 1. Parmi les figures ci-dessous, déterminer celles qui sont des polygones et, pour celles-ci, donner leurs noms.



Exercice 2. Tracer une heptagone convexe dont les tous côtés mesurent 4 cm. On ne demande pas que ce heptagone soit régulier.

Exercice 3 (D'après CRPE – Reims – 1992)**.**

1. Construire, à la règle non graduée et au compas, un pentagone ABCDE satisfaisant les conditions suivantes :

   a. tous les côtés du pentagone ont la même longueur ;

   b. si on note I le milieu de [AB] alors les angles $\widehat{\mathrm{AIE}}$ et $\widehat{\mathrm{BIC}}$ mesurent 45° ;

   c. les angles $\widehat{\mathrm{AED}}$ et $\widehat{\mathrm{BCD}}$ sont droits.

2. Ce pentagone est-il régulier ?

Exercice 4. Soit $\mathcal{P}$ un polygone à n côtés. Combien $\mathcal{P}$ possède-t-il de diagonales ?

Exercice 5. Soit $\mathcal{P}$ une polygone régulier convexe à n côtés. On note O le centre de $\mathcal{P}$ et A et B deux points consécutifs de $\mathcal{P}$.

Déterminer la mesure en degrés de $\widehat{\mathrm{AOB}}$.

Exercice 6 (D'après CRPE – Groupement 2 – 2011)**.** Soit ABCDEF un hexagone régulier convexe. On note O son centre et r la distance OA. Montrer que l'aire de ABCDEF est égale à $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.

2) Quadrilatères usuels

Exercice 7. Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.

1. Un carré est un losange.

2. Un rectangle est un trapèze.

3. Un parallélogramme est un rectangle.

4. Un losange est un rectangle.

5. Un carré est un quadrilatère.

6. Un carré est un trapèze.

Exercice 8. Construire un parallélogramme ABCD tel que AB = 6 cm, BC = 4 cm et AC = 7 cm.

Exercice 9. Construire un parallélogramme ABCD tel que AB = 6 cm, AC = 8,6 cm et BD = 6 cm.

Exercice 10 (D'après CRPE – Bordeaux – 1993)**.** Construire, en utilisant seulement la règle graduée et le compas, un parallélogramme dont les diagonales mesurent respectivement 8 cm et 12 cm et qui forment un angle de 60°.

Exercice 11. On considère un parallélogramme ABCD tel que AB = 4 cm, AD = 2,5 cm et $\widehat{\mathrm{BAC}} = 110°$.

1. Déterminer le périmètre de ABCD.

2. Déterminer les mesures des angles $\widehat{\mathrm{ABC}}$ et $\widehat{\mathrm{BCD}}$.

Exercice 12. Soit ABCD un parallélogramme. La perpendiculaire à (BD) passant par A coupe [CD] en J et la perpendiculaire à (BD) passant par C coupe [AB] en I.

Montrer que AICJ est un parallélogramme.

Exercice 13. Soit ABCD un parallélogramme de centre I. Soit M un point du plan différent de I et N le symétrique de M par rapport à I.

1. Faire une figure.
2. Montrer que AMCN est un parallélogramme.

Exercice 14 (D'après CRPE – Groupement 2 – 2008)**.** Pour l'ensemble des questions de cet exercice, les traits de construction doivent rester apparents.

1. Placer deux points A et C non situés sur les lignes de la copie. Ces deux points sont les sommets opposés d'un carré ABCD. Construire ce carré à la règle et au compas et justifier la construction en citant la ou les propriétés géométriques utilisées.
2. **a.** Construire un rectangle EFGH tel que la longueur du côté EF soit 7 cm et celle de la diagonale EG soit 9 cm. Justifier la construction en citant la ou les propriétés géométriques utilisées.

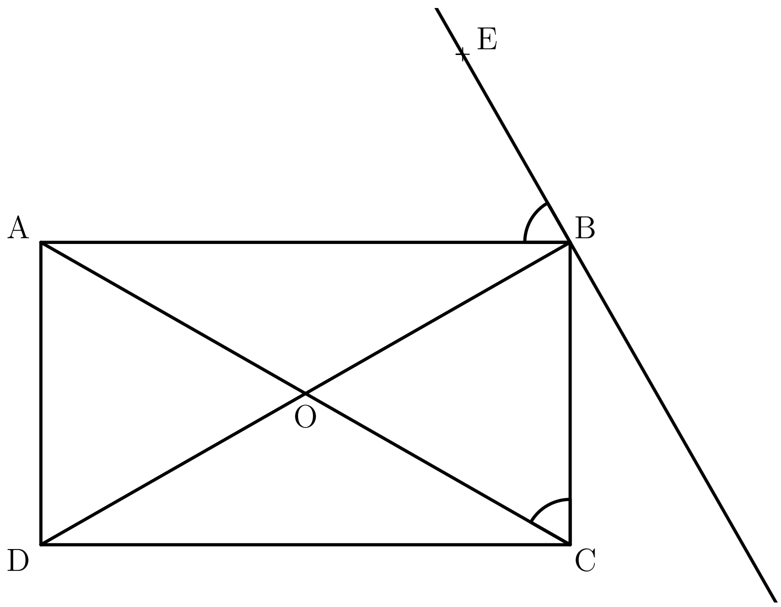
   b. La construction d'un rectangle dont on impose la longueur d'un côté et celle de la diagonale est-elle toujours réalisable ? Justifier.
3. Construire deux rectangles IJKL et IMKN. Quelle est la nature du quadrilatère MJNL ? Justifier la réponse.

Exercice 15. Construire un losange dont les diagonales mesurent 7 cm et 8 cm puis déterminer le périmètre et l'aire de celui-ci.

Exercice 16. Soit ABCD un rectangle de centre I. On note J le milieu de [AB] et E le symétrique de I par rapport à J.

Déterminer la nature précise du quadrilatère AEBI.

Exercice 17. Sur la figure ci-dessous, ABCD est un rectangle de centre O et (EB) est perpendiculaire à (BD).



Montrer que $\widehat{ABE} = \widehat{ACB}$.

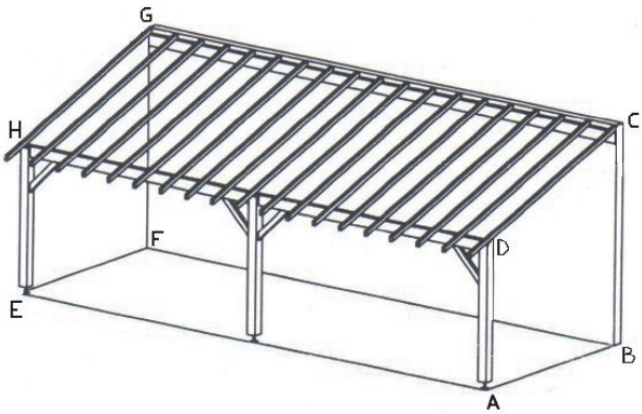
Exercice 18. Soit un carré ABCD. On considère les points M, N, P et Q tels que $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $P \in [CD]$, $Q \in [DA]$ et $AM = BN = CP = DQ$.

Déterminer la nature précise du quadrilatère MNPQ.

Exercice 19. Dans cet exercice, on s'intéresse à un quadrilatère, le « cerf-volant ». Un cerf-volant est un quadrilatère non croisé dont une des diagonales est la médiatrice de l'autre. Dans tout l'exercice, on appelle ABCD un tel cerf-volant et on suppose que (AC) est la médiatrice de [BD].

1. Démontrer que AB = AD et que CB = CD.
2. Tout losange est-il un cerf-volant ?
3. Que peut-on dire d'un cerf-volant qui est un parallélogramme ?
4. Si un cerf-volant a deux angles droits, est-ce nécessairement un carré ?
5. Représenter un cerf-volant concave (c'est-à-dire non convexe).
6. Dans cette question, on suppose que ABCD est convexe, que AB = AD = 4 et que BC = CD = 7.
   a. Démontrer que BD < 8.
   b. Construire ABCD en supposant de plus que BD = 6.
   c. Déterminer AC.

Exercice 20 (d'après CRPE – Groupement 2 – 2019)**.** Le propriétaire d'une maison décide de créer un appentis pour stocker du bois de chauffage. Un schéma de ce qu'il souhaite réaliser est donné ci-dessous :



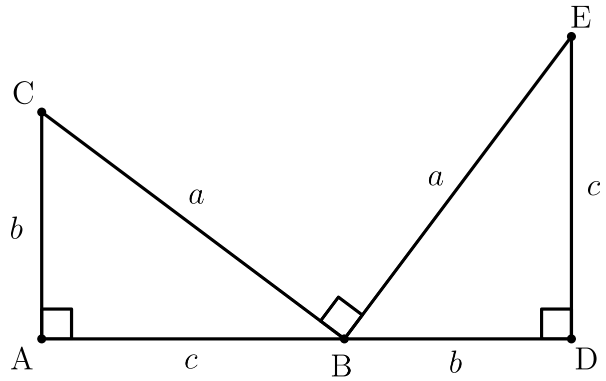
Le rectangle ABFE représente une dalle de béton. Le quadrilatère ABCD est un trapèze rectangle.

Les contraintes de sa maison et de son terrain lui imposent les dimensions suivantes : AE = 4,8 m, AB = 1,5 m, AD = 2,4 m et BC = 3,2 m.

Le volume utile de cet appentis est la partie dans laquelle il pourra stocker son bois sachant que, pour rester au sec, il devra se trouver sur la dalle de béton et sous le toit. Le volume utile représente donc un prisme droit dont la base est le trapèze rectangle ABCD.

1. Dans le cadre de sa déclaration préalable de travaux le propriétaire doit déterminer la surface au sol de l'appentis. Calculer l'aire du rectangle ABFE.
2. a. On appelle I le point du segment [BC] tel que ABID est un rectangle. Calculer la longueur CD.
   b. En déduire la surface du toit CDHG.
3. a. Construire A′B′C′D′ une représentation du quadrilatère ABCD à l'échelle 1/50 en précisant les calculs qui ont permis cette construction.
   b. Calculer l'aire du trapèze ABCD.
   c. Pour être sûr de passer l'hiver au chaud, le propriétaire doit disposer de 15 stères de bois. Le stère est une unité de mesure, utilisée pour le bois de chauffage, valant 1 m^3. Aura-t-il assez de place pour stocker ces 15 stères de bois ?

Exercice 21 (D'après CRPE – Sujet 0 – 2015)**.** Sur la figure ci-dessous, les triangles ABC, BDE et CBE sont rectangles respectivement en A, D et B. De plus, AB = DE = c, AC = BD = b et BC = BE = a.



1. Démontrer que les points A, B et D sont alignés.

2. Démontrer que ADEC est un trapèze.

3. Calculer de deux façons différentes l'aire de ADEC.

4. En déduire que $a^2 = b^2 + c^2$.
Quel théorème a-t-on ainsi démontré ?

3) Cercles et Disques

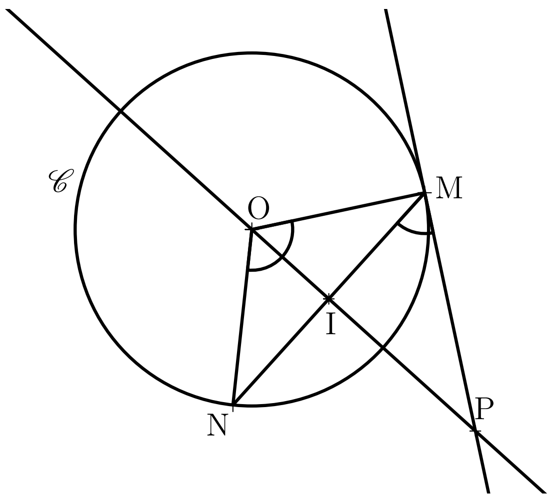
Exercice 22. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et A un point extérieur au cercle. Construire, en utilisant seulement la règle non graduée et le compas, une droite tangente à $\mathscr{C}$ et passant par A.

Exercice 23. On considère deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de même centre O. Soit A un point de $\mathscr{C}_1$ et B le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}_1$. La perpendiculaire à (AB) en O coupe $\mathcal{C}_2$ en deux points M et N.

1. Faire une figure.

2. Montrer que AMBN est un losange.

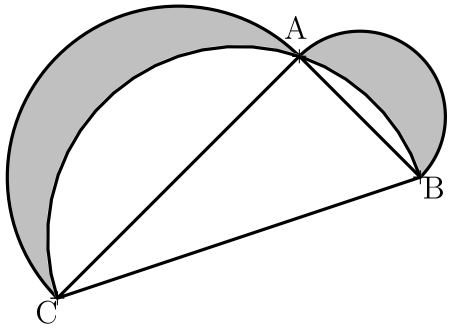
Exercice 24. Sur la figure ci-dessous, $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et M et N sont deux points de $\mathscr{C}$. On note I le milieu de [MN] et P le point d'intersection de (OI) et de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}$ en M.



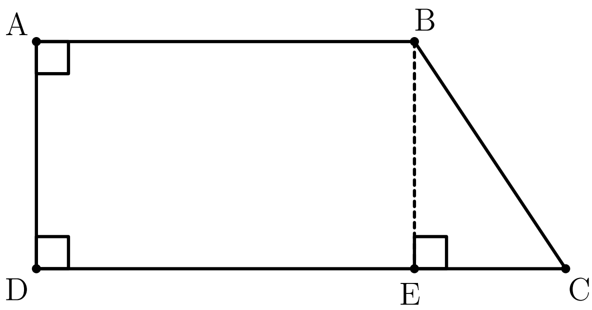
Montrer que $\widehat{\text{NOM}} = 2\widehat{\text{NMP}}$.

Exercice 25. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre A. On considère trois distincts M, N et P de $\mathscr{C}$ tels que A soit à l'intérieur du triangle MNP. Montrer que $\widehat{\text{MAN}} = 2\widehat{\text{MPN}}$.

Exercice 26. Sur la figure ci-dessous, tous les arcs sont des demi-cercles et A appartient au demi-cercle de diamètre [BC]. Montrer que l'aire de la surface grisée est égale à l'aire du triangle ABC.



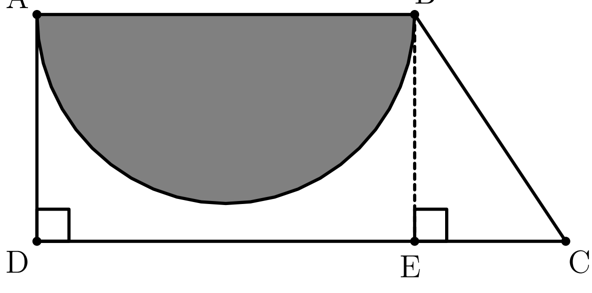
Exercice 27 (d'après CRPE – Groupement 2 – 2017)**.** Les figures données ne sont pas à l'échelle. La figure ci-dessous modélise un jardin dont l'aménagement doit être repensé.



Le trapèze ABCD est tel que : les droites (AB) et (DC) sont parallèles ; les droites (AD) et (DC) sont perpendiculaires ; AB = 50 m, AD = 30 m et DC = 70 m.

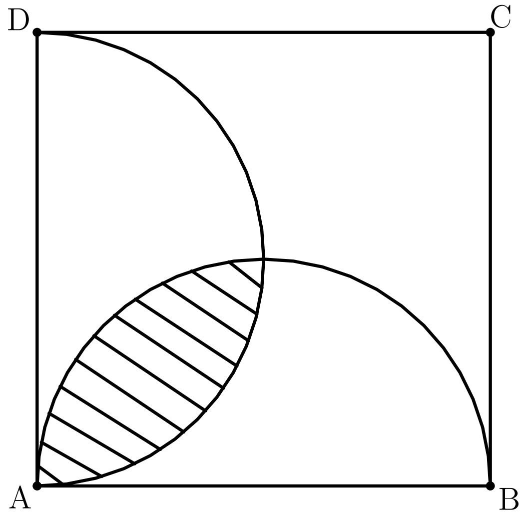
E est le point du segment [DC] tel que ABED est un rectangle.

1. Dans un premier temps, le propriétaire désire clôturer le jardin. Calculer la longueur de clôture nécessaire sachant qu'il prévoit l'installation d'un portail de 3,10 m de large. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au mètre.
2. Dans un deuxième temps, il partage son jardin en trois parties :
   - un espace réservé au potager représenté par le triangle rectangle BCE ;
   - un espace de plantations florales représenté par le demi-disque grisé de diamètre [AB] ;
   - un espace engazonné sur le reste du jardin.



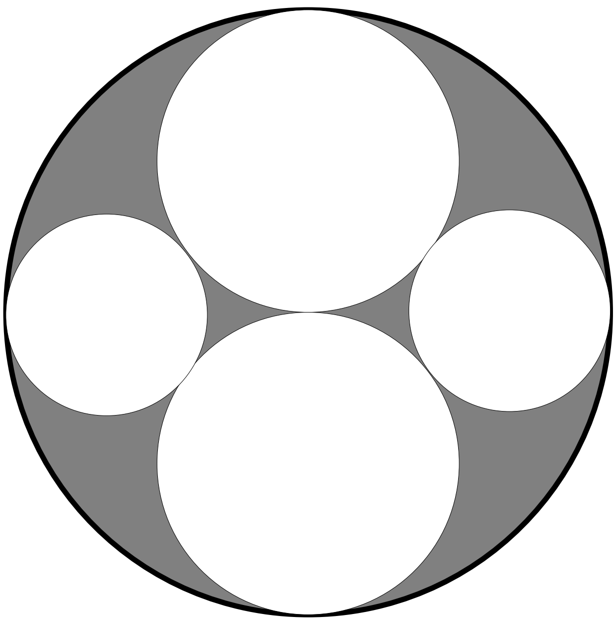
Calculer l'aire arrondie au mètre carré de chacune des trois parties du jardin

Exercice 28. Sur la figure ci-dessous, on a tracé un carré ABCD de côté a ainsi que des demi-cercles de diamètres respectifs [AB] et [AD].



Déterminer l'aire de la surface hachurée.

Exercice 29. Sur la figure ci-dessous, le grand cercle a pour rayon 4 et tous les cercles, sauf les deux plus petits, sont tangents deux à deux c'est-à-dire qu'ils admettent un et un seul point commun en lequel ils ont la même droite tangente. De plus, le point de tangence des deux cercles de taille intermédiaire est le centre du grand cercle.



Déterminer l'aire de la surface grisée.

Exercice 30. Soit $\mathcal{P}$ un polygone convexe.

1. Montrer que si $\mathcal{P}$ est régulier alors tous ses sommets appartiennent à un même cercle.
2. La réciproque est-elle vraie ?