⧫ Chapitre 6. — Dénombrement

I. — Vocabulaire et notations : rappels et compléments

1) Définitions

Définition 1

Un ensemble E est une collection d'objets. Ces objets sont appelés les éléments de E. Si x est un élément de E, on dit que x appartient à E et on note $x \in E$.

Exemple 2.

1. L'ensemble $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels. Ainsi, $3 \in \mathbb{N}$.
2. L'ensemble vide, noté $\varnothing$, est l'unique ensemble ne contenant aucun élément.
3. L'alphabet français $\mathcal{A}$ est un ensemble dont les éléments sont les lettres. Ainsi, $\mathrm{r} \in \mathcal{A}$.

Remarque 3. Un ensemble n'est pas ordonné et ne contient chaque élément qu'une seule fois. Ainsi, $\{2,3,4\} = \{4,3,2\} = \{2,4,2,3,4,2,3,3,2,4,4,2\}$.

Définition 4

Soit E un ensemble. Une partie de E (ou un sous-ensemble de E) est un ensemble F tel que tout élément de F est aussi un élément de E. On note alors $F \subset E$ (« F est inclus dans E »). De plus, si un élément x de E n'appartient pas à F, on note $x \notin F$.

Exemple 5.

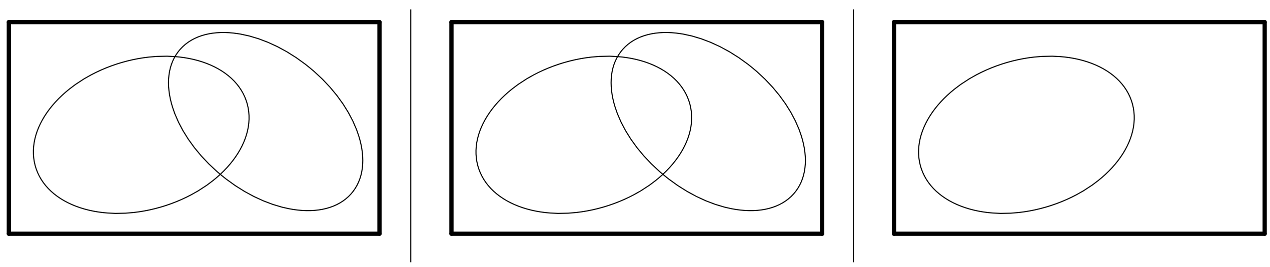
1. $F = \{1,3,5\}$ est une partie de $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. On a $3 \in F$ et $6 \notin F$.
2. L'ensemble des entiers impairs est une partie de l'ensemble des entiers.
3. On a les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2) Opérations ensemblistes

Définition 6

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. On définit :

1. l'intersection de A et B, notée $A \cap B$ (« A inter B »), comme l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à la fois à A et à B ;
2. l'union (ou la réunion) de A et B, notée $A \cup B$ (« A union B »), comme l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à au moins un des deux ensembles A ou B ;
3. le complémentaire de A (dans E), noté $\overline{A}$ (« A barre »), comme l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.



Exemple 7. Si $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A = \{2,3,5,7\}$ et $B = \{1,3,5,7,9\}$ alors $A \cap B = \{3,5,7\}$, $A \cup B = \{1,2,3,5,7,9\}$, $\overline{A} = \{1,4,6,8,9,10\}$ et $\overline{B} = \{2,4,6,8,10\}$.

Remarque 8. De manière plus générale, si A_1, A_2, ..., A_p sont des parties d'un ensemble E, on peut définir $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_p$ comme l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à tous les A_i et $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p$ comme l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à au moins l'un des A_i.

Propriété 9. — Lois de de Morgan

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Alors $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

II. — Dénombrement

1) Ensemble fini et cardinal

Définition 10

On dit qu'un ensemble est fini s'il possède un nombre fini d'éléments. Dans le cas contraire, on dit qu'un ensemble est infini.

Exemple 11. Les ensembles $\{a\}$, $\{1,2,3,4,5,6\}$, $\{0,1\}$, $\varnothing$ sont des ensembles finis. En revanche, les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ sont infinis.

Définition 12

Soit E un ensemble fini. Le nombre d'éléments de E s'appelle le cardinal de E et se note $\mathrm{Card}(E)$.

Exemple 13. $\mathrm{Card}(\{a\}) = 1$, $\mathrm{Card}(\{1,2,3,4,5,6\}) = 6$, $\mathrm{Card}(\{0{,}1\}) = 2$, $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$.

Définition 14

Dénombrer un ensemble fini, c'est déterminer son cardinal.

2) Exemples de dénombrement

a) À l'aide d'un arbre

Exemple 15. On dispose d'un sac contenant 3 cartons portant respectivement le chiffre 1, le chiffre 2 et le chiffre 3.

On tire successivement et sans remise les trois cartons du sac. On obtient ainsi un nombre à 3 chiffres : par exemple, si on a tiré le carton portant le chiffre 3 puis le carton portant le chiffre 1 puis le carton portant le chiffre 2, on obtient le nombre 312.

Combien de nombres à 3 chiffres peut-on former ainsi ?

Exemple 16. On considère le même sac que dans l'exemple précédent mais cette fois-ci on tire successivement et avec remise deux cartons dans le sac.

Combien de nombres à 2 chiffres peut-on former ainsi ?

Exemple 17. Déterminer le nombre de parties de l'ensemble $E = \{a,b,c\}$.

b) À l'aide d'un tableau

Exemple 18. À leur entrée en L1, les étudiants choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie et 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand.

Déterminer le nombre d'étudiants par discipline ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

c) À l'aide d'un diagramme de Venn

Exemple 19. Dans un club de sport, il y a 80 membres. Ceux-ci peuvent pratiquer plusieurs sports dont le tennis et la natation. On sait que 20 membres pratiquent le tennis, 15 membres pratiquent la natation et, parmi les membres précédents, 5 membres pratiquent les deux sports.

Combien de membres pratiquent au moins l'un des deux sports (tennis ou natation) ?

3) Opérations sur les cardinaux

Définition 20

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. On dit que A et B sont disjoints si $A \cap B = \varnothing$.

Exemple 21. Si $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ alors $A = \{a, d\}$ et $B = \{c, e, f\}$ sont disjoints.

Propriété 22. — Principe additif

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. Si A et B sont disjoints alors

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

Propriété 23

Soit A et B deux parties d'un ensemble fini E. Alors,

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) \qquad \text{et} \qquad \text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A).$$

Exemple 24. En utilisant la propriété ci-dessus, retrouver le résultat de l'exemple 19.

En déduire le nombre de membres du club ne pratiquant ni le tennis ni la natation.

Propriété 25. — Principe multiplicatif

Soit E et F deux ensembles de cardinaux finis. On considère l'ensemble G des résultats possibles en prenant un élément dans E et un élément dans F. Alors,

$$\text{Card}(G) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F).$$

Exemple 26. Combien y a-t-il de codes formés de 4 chiffres suivis d'une des deux lettres A ou B ?

Propriété 27

Soit E un ensemble fini de cardinal n et k un entier naturel inférieur ou égal à n. Alors, le nombre de listes ordonnées de p éléments de E est n^p.

Exemple 28. Avec les lettres de l'alphabet français, combien peut-on constituer de mots de 3 lettres ? (On considère tous les mots possibles, qu'ils aient un sens ou non.)

Propriété 29

Soit E un ensemble de cardinal fini n. Le nombre de parties de E est 2^n.

4) Arrangements et permutations

Dans toute la suite, n est un entier naturel et E est un ensemble à n éléments.

Définition 30

Soit k un entier naturel inférieur ou égal à n. Un arrangement de k éléments de E est une liste ordonnée de k éléments distincts de E.

Exemple 31. Si $E = \{a, b, c, d\}$ alors (b, c, a), (a, c, b) et (c, a, b) sont trois arrangements de 3 éléments de E. En revanche, (a, a, b) n'est pas un arrangement car a est répété 2 fois.

Propriété 32

Soit k un entier naturel inférieur ou égal à n. Le nombre d'arrangements de k de E est égal à $n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

Exemple 33. Au départ d'une course, il y a 12 chevaux. En supposant que tous les chevaux franchissent la ligne d'arrivée et qu'il n'y a pas d'ex æquo, combien y a-t-il de tiercés possibles ? de quintés possibles ?

Définition 34

La factorielle de n, notée $n!$, est le nombre défini par $0! = 1$ et, si $n > 0$, $n! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n$.

Exemple 35. On a donc $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ et $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

Remarque 36. Le nombre d'arrangements de k éléments de E est $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Définition 37

Une permutation de E est un arrangement de n éléments de E. Autrement dit, une permutation de E est une liste ordonnée contenant tous les éléments de E une fois et une seule.

Propriété 38

Le nombre de permutations de E est $n!$.

Exemple 39. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « FRAISE ».

5) Combinaisons

Définition 40

Soit k un entier naturel inférieur ou égal à n. Une combinaison de k éléments de E est une partie de E à k éléments.

Exemple 41. Si $E = \{a\,;b\,;c\,;d\}$ alors $F = \{c\}$ est une combinaison de 1 élément de E et $G = \{a\,;c\,;d\}$ est une combinaison de 3 éléments de E.

Exemple 42. Déterminer le nombre de combinaisons à 3 éléments de l'ensemble $\{a, b, c, d\}$.

Notation 43. Soit k un entier compris entre 0 et n. Le nombre de combinaisons de k éléments de E se note $\binom{n}{k}$, ce qui se lit « k parmi n ». Les nombres $\binom{n}{k}$ s'appellent les coefficients binomiaux.

Théorème 44

Soit k un entier compris entre 0 et n. Alors, $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Remarque 45. En particulier, on a, $\displaystyle\binom{n}{0} = 1$, $\displaystyle\binom{n}{1} = n$ et $\displaystyle\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exemple 46.

1. Dans une classe de 30 élèves, on choisit deux délégués provisoires. Combien a-t-il de choix possibles ?
2. On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie. On représente à l'aide d'un arbre toutes les possibilités. Combien y a-t-il de chemins dans cet arbre qui contiennent exactement 3 « *pile* » ?
3. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « ANANAS ».

Propriété 47. — Symétrie

Soit k un entier compris entre 0 et n. Alors, $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Exemple 48. On a donc $\displaystyle\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ et $\displaystyle\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$.

Théorème 49. — Formule de Pascal

On suppose ici que $n \geqslant 2$. Soit k un entier strictement compris entre 0 et n. Alors,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Application 50. Le théorème précédent permet de calculer de proche en proche les coefficients binomiaux à l'aide d'un tableau triangulaire appelé « triangle de Pascal ».

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0							
1					$\binom{n-1}{k-1}$	$\binom{n-1}{k}$	
2						$\binom{n}{k}$	
3							
4							
5							
6							

III. — Exercices

1) Vocabulaire et notations

Exercice 1. On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ et les parties $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{a, c, d, f, g\}$ de E.

Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A \cap B}$.

Exercice 2. Compléter avec le symbole $\in$ ou le symbole $\notin$.

$$3 \dots \mathbb{N} \cap \mathbb{Z} \qquad -2 \dots \mathbb{N} \cap \mathbb{Q} \qquad \sqrt{2} \dots \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \qquad \frac{2}{10} \dots \mathbb{D} \cup \mathbb{N} \qquad \frac{10}{2} \dots \mathbb{D} \cap \mathbb{N}$$

$$0{,}23 \dots \mathbb{N} \cap \mathbb{Q} \qquad 0{,}23 \dots \mathbb{D} \cap \mathbb{Q} \qquad \pi \dots \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \qquad \pi \dots \mathbb{N} \cup \mathbb{R} \qquad \sqrt{25} \dots \mathbb{D} \cap \mathbb{N}$$

Exercice 3. On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4\}$ et les ensembles $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ et $C = \{a, 3, e, 1\}$.

1. Écrire les ensembles $A \cup B$ et $A \cap B$.
2. Compléter avec le symbole $\in$ ou le symbole $\notin$.

$$a \dots A \cap B \qquad a \dots A \cap C \qquad a \dots B \cup C \qquad 1 \dots A \cup C \qquad 1 \dots A \cap C$$

$$a \dots \overline{A} \qquad a \dots \overline{B} \qquad b \dots B \cap \overline{C} \qquad e \dots \overline{B} \cup \overline{C} \qquad e \dots \overline{B} \cap \overline{C}$$

Exercice 4. On considère deux parties A et B d'un ensemble E. Simplifier les écritures suivantes.

1. $\overline{\overline{A}}$;
2. $\overline{A \cap \overline{B}}$;
3. $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$.

Exercice 5. Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Est-il vrai ou faux que $A \cap B \subset A \cup B$?
2. Est-il possible que $A \cap B = A \cup B$?

2) Cardinal et dénombrement élémentaire

Exercice 6. On se place dans l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f\}$. Déterminer les cardinaux des ensembles suivants.

1. $A = \{a, b, c, d, e\}$;

2. $B = \{a, b, f, d\}$;

3. $A \cup B$;

4. $A \cap B$;

5. $\overline{A} \cap B$;

6. $C = \{a, b, c, d, a, e, d, f\}$;

7. $\overline{A \cap \overline{C}}$.

Exercice 7. Dans un sac, on place 4 cartons portant respectivement les lettres R, I, R et E.

1. On tire successivement et sans remise les 4 cartons du sac.

- **a.** À l'aide d'un arbre, dénombrer les tirages possibles.
- **b.** Les 4 cartons, dans l'ordre du tirage, forment un mot de 4 lettres. Combien de mots différents peut-on ainsi former ?

2. On tire successivement et avec remise 2 cartons du sac.

- **a.** À l'aide d'un arbre, dénombrer les tirages possibles.
- **b.** Combien de tirages donnent un mot qui contient au moins une voyelle ?

Exercice 8. Le virus de l'immmunodéficience humaine (VIH) est responsable du SIDA. Il existe aujourd'hui des tests rapides appelés « Tests rapides d'orientation diagnostique » (TROD) qui ont l'avantage de pouvoir être réalisés à partir d'un échantillon de salive ou d'une goutte de sang prélevée sur le bout du doigt.

On a testé avec les deux types de TROD (salivaire et sanguin) deux populations : une première composée de 10 000 personnes infectées par le VIH et une seconde composée de 100 000 personnes non infectées. On a obtenu les résultats suivants.

	Personnes infectées	Personnes non infectées
Tests salivaires positifs	9 803	260
Tests sanguins positifs	9 968	90

À l'aide d'un tableau, déterminer, pour chaque test, le nombre total de personnes infectées parmi les personnes ayant un test positif et le nombre total de personnes non infectées parmi les personnes ayant un test négatif.

Exercice 9. Un club de jeux de société compte 120 adhérents. Parmi ceux-ci, 34 jouent uniquement au Scrabble, 21 uniquement au bridge et 26 uniquement au tarot. De plus, 10 membres jouent au bridge et au tarot mais pas au Scrabble, 9 jouent au tarot et au Scrabble mais pas bridge, 12 jouent au bridge et au Scrabble mais pas au tarot et 4 personnes jouent aux 3 jeux.

1. Représenter la situation par un diagramme de Venn.

2. Déterminer le nombre de membres ne jouant ni au Scrabble, ni au bridge ni au tarot.

3. Déterminer le nombre de personnes qui jouent, entre autres, au Scrabble.

Exercice 10. Dans une entreprise, il y a 800 employés. On sait que 300 employés sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y a-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

3) Opérations sur les cardinaux

Exercice 11. Soit E un ensemble et A et B deux parties de E tels que $\text{Card}(A) = 5$, $\text{Card}(B) = 7$ et $\text{Card}(A \cap B) = 3$. Déterminer le cardinal de $A \cup B$.

Exercice 12. Soit E un ensemble et A et B deux parties de E tels que $\text{Card}(A) = 5$, $\text{Card}(B) = 7$ et $\text{Card}(A \cup B) = 8$. Déterminer le cardinal de $A \cap B$.

Exercice 13. Dans une association de 50 personnes, 27 sont inscrites aux activités culturelles, 22 sont inscrites aux activités sportives et 10 ne sont inscrites ni aux activités sportives ni aux activités culturelles.

Combien de personnes sont inscrites à la fois aux activités culturelles et aux activités culturelles ?

Exercice 14. Combien de menus peut-on composer dans un restaurant qui propose à sa carte 5 entrées, 4 plats et 5 desserts ?

Exercice 15. Une personne a dans sa garde robe 6 chemises, 3 pantalons et 4 vestes. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

Exercice 16. Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles.

De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

Exercice 17. Raymond Queneau a écrit un ouvrage intitulé *Cent mille milliards de poèmes*. Il est composé de 10 pages contenant chacune 14 vers. Le lecteur peut composer son propre poème de 14 vers en prenant le premier vers de l'une des 10 pages puis le deuxième vers de l'une des 10 pages et ainsi de suite jusqu'au quatorzième vers. Justifier le titre de l'ouvrage.

Exercice 18. En informatique, un octet est une suite de 8 chiffres 0 ou 1. Par exemple, 01000110, 00000000, 10101010 ou 11110000 sont des octets.

1. Déterminer le nombre d'octets différents.
2. Combien y a-t-il d'octets commençant par 0 ?
3. Combien y a-t-il d'octets contenant au moins un 0 ?

Exercice 19. On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

1. Quel est le cardinal de E ?
2. Quel est le nombre de parties de E ?
3. Combien de mots de 5 lettres peut-on former avec les éléments de E ? (On ne demande pas que les mots formés aient un sens en français.)

Exercice 20. Sachant qu'un numéro de téléphone portable est un numéro à 10 chiffres commençant par 06 ou 07, combien y a-t-il de numéros de téléphone portable différents contenant au moins un fois le chiffre 9 ?

Exercice 21 (CRPE – 2009 – Groupement 5)**.** Au cours de l'année 2009, de nouvelles plaques d'immatriculation doivent être mises en circulation.

Chaque véhicule immatriculé possédera désormais un numéro « à vie ».

Ce numéro est constitué de sept caractères, répartis en trois blocs :

- deux lettres ;
- trois chiffres ;
- deux lettres.

La numérotation des véhicules se fera de manière chronologique et au niveau national (de AA-001-AA à ZZ-999-ZZ), les numéros se succédant de la manière suivante :

- de AA-001-AA à AA-999-AA ;
- puis de AA-001-AB à AA-999-AB et ainsi de suite jusqu ?à AA-999-AZ ;
- puis de AA-001-BA à AA-999-ZZ ;
- puis de AB-001-AA à AZ-999-ZZ ;
- puis de BA-001-AA à ZZ-999-ZZ.

Dans cet exercice, les lettres utilisées dans la numérotation des véhicules sont les 26 lettres de l'alphabet.

1. Combien de véhicules devront être immatriculés pour atteindre le numéro AA-999-AZ ?
2. Montrer qu'il faut immatriculer 28 982 véhicules pour atteindre le numéro AA-011-BD.
3. Montrer que le nombre de véhicules immatriculés avant d'arriver au numéro AB-001-AA est de 675 324.
4. Au bout de combien d'années pourrait être épuisé ce système de numérotation si 7 millions de véhicules sont immatriculés chaque année ?

4) Arrangements et permutations

Exercice 22. Dans une association de 10 personnes, on doit désigner le bureau composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier.

Sachant qu'une personne ne peut pas cumuler plusieurs fonctions, combien y a-t-il de bureaux possibles ?

Exercice 23. Lors de la finale du 100 mètres aux jeux olympiques, il y a 8 coureurs au départ qui sont tous classés à l'arrivée.

Combien y a-t-il de classement possibles ?

Exercice 24. Une course oppose 20 concurrents, dont Émile.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y-a-t-il de podiums possibles où Émile est premier ?
3. Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Émile fait partie ?

Exercice 25. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot CHOSE ?

Exercice 26. Lors d'une réunion, dix personnes doivent se répartir sur 10 chaises. Combien y a-t-il de répartitions différentes ?

Exercice 27. On considère un damier de jeu de dames composé de 8×8 cases. On dispose de 3 jetons différents. De combien de façons peut-on disposer ces jetons sur le damier :

1. en supposant que deux jetons ne peuvent pas être disposés sur la même case ?
2. en supposons qu'on peut empiler plusieurs jetons sur la même case ?

Exercice 28. Le clavier d'un digicode à l'entrée d'un immeuble est composé des 10 chiffres de 0 à 9 et des deux lettres A et B. Le code de l'immeuble est composé d'une succession de 4 chiffres et d'une lettre (par exemple, 1945B, 0122B ou 3323A).

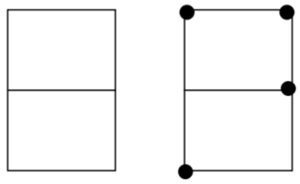
1. Combien y a-t-il de codes différents possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes comportant 4 chiffres différents ?

Exercice 29. Trois villages doivent être reliés à une des quatre antennes-relais du secteur.

1. Combien y a-t-il de liaisons possibles si plusieurs villages peuvent être reliés à la même antenne ?
2. Même question si les villages doivent tous être reliés à des antennes différentes.

5) Combinaisons

Exercice 30 (CRPE – Corse – 1997)**.** Un caractère d'écriture Braille destiné aux aveugles est formé de points obtenus en piquant la feuille de papier à travers au moins un des six nœuds de la grille ci-dessous.



Par exemple : écriture de la lettre M

1. Combien de caractères de 2 points peut-on concevoir ?
   Les écrire tous.
2. Combien de caractères de 4 points peut-on concevoir ?

Exercice 31. Une entreprise comporte 18 employés, dont 8 femmes. Pour un sondage, on choisit 3 personnes au hasard. Quel est le nombre d'échantillons comportant au moins 2 hommes ?

Exercice 32. Dans mon armoire, il y a 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures marrons et 2 paires de chaussures blanches. Je peux distinguer toutes ces chaussures les unes des autres. Un matin, mal réveillé, je choisis deux chaussures au hasard.

1. Combien y a-t-il de choix possibles ?
2. Combien y a-t-il de choix où j'obtiens deux chaussures de même couleur ?
3. Combien de choix amènent un pied gauche et un pied droit ?
4. Combien de choix amènent une chaussure droite et une chaussure gauche de même couleur ?
5. Combien de choix amènent à deux chaussures qui ne sont pas de la même paire ?

Exercice 33. On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir ;

1. sans imposer de contraintes sur les cartes ;
2. contenant 5 carreaux ou 5 piques ;
3. contenant 2 carreaux et 3 piques ;
4. contenant au moins un roi ;
5. contenant au plus un roi ;
6. contenant exactement 2 rois et exactement 3 piques.

Exercice 34. Une urne contient 5 boules blanches, 3 boules rouges et 2 boules noires. On tire simultanément 3 boules dans l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages différents ?
2. Combien y a-t-il de tirages qui donnent 3 boules de couleurs différentes ?
3. Combien y a-t-il de tirages qui donnent 3 boules de la même couleur ?
4. Combien y a-t-il de tirages qui donnent exactement 2 boules de la même couleur ?
5. Combien y a-t-il de tirages qui ne contiennent pas de boules rouges ?

Exercice 35. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ANAGRAMME ?

Exercice 36. Lors d'un rencontre internationale, des sportifs français et japonais s'affrontent. La délégation française compte a personnes et la délégation japonaise b personnes. Tous les sportifs logent dans le même hôtel et le matin tous se saluent les uns les autres. Si deux athlètes de la même nationalité se saluent, il le font dans leur langue et si deux athlètes de nationalité différentes se saluent, ils le font en anglais.

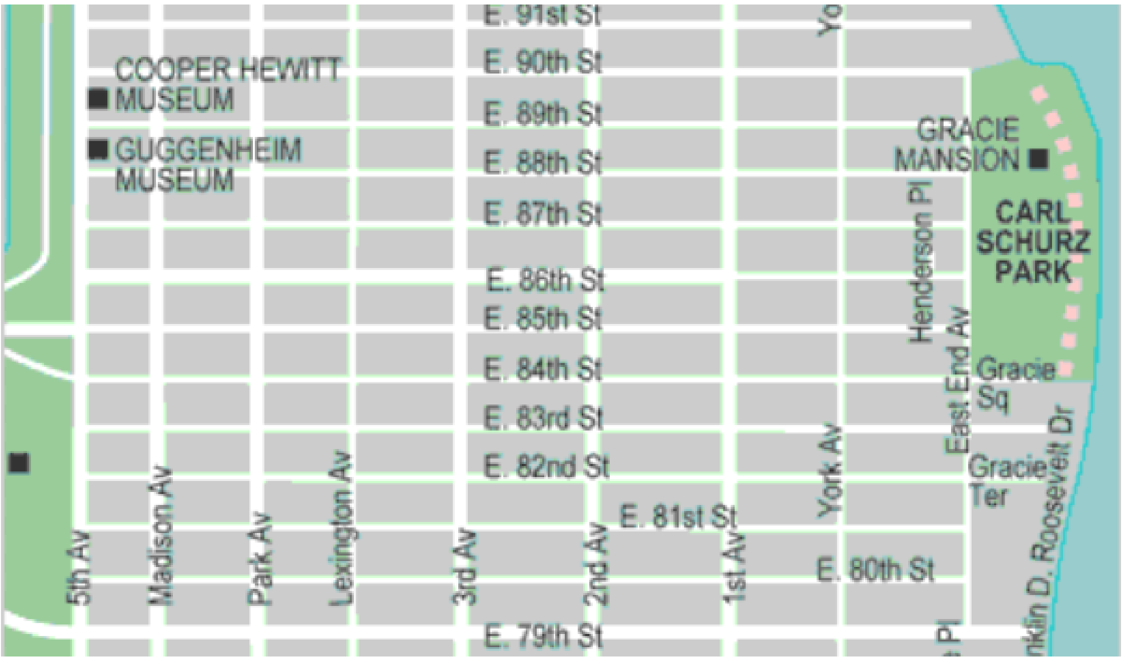
1. Combien y a-t-il de salutations en français ? (Jusitifer.)

2. Combien y a-t-il de salutations en japonais ? (Jusitifer.)

3. Combien y a-t-il de salutations en anglais ? (Jusitifer.)

4. Déduire des questions précédentes que $\binom{a+b}{2} = \binom{a}{2} + ab + \binom{b}{2}$.

Exercice 37. L'image ci-dessous est un plan des rues d'une partie de l'Upper East Side, un quartier de Manhattan à New-York.



Un touriste se trouve à l'angle de la 5e Avenue (5th Av.) et de la 79e Rue (E. 79th St) et souhaite se rendre à l'angle de la 1ère Avenue (1st Av.) et de la 86e Rue (E. 86 St.). Pour cela, il se déplace de façon aléatoire mais en allant toujours de l'ouest vers l'est ou du sud vers le nord.

Combien a-t-il de trajets possibles différents ? (On détaillera sa réponse.)

6) Exercices de synthèse

Exercice 38. Le clavier d'un digicode comprend 13 touches : A, B, C, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Un code est composé d'une lettre suivie de 4 chiffres (pas nécessairement distincts).

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?

2. Combien y a-t-il de codes ne contenant pas le chiffre 1 ?

3. Combien y a-t-il de codes contenant 4 chiffres distincts ?

4. Une personne est née en 1987. Elle a oublié le code mais elle sait que celui-ci commence par A et contient les 4 chiffres de son année de naissance. Combien d'essais au maximum devra-t-elle faire avant de retrouver le code ?

Exercice 39. Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. **a.** Combien y a-t-il de codes possibles ?
   b. Combien y a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?
   c. Combien y a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?
   d. Combien y a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?
2. Dans cette question, on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.
   a. Combien y a-t-il de codes possibles ?
   b. Combien y a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?
   c. Combien y a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?

Exercice 40. Soit A l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun 1. Déterminer le nombre d'éléments des ensembles suivants :

1. l'ensemble A ;
2. l'ensemble B des nombres appartenant à A et ayant 7 chiffres différents ;
3. l'ensemble C des nombres pairs appartenant à A ;
4. l'ensemble D des nombres de A dont les chiffres sont ordonnés du plus petit au plus grand dans l'ordre dans lequel ils sont écrits.

Exercice 41. Un motif est composé de 5 cases alignées côte à côte.

1. Combien y a-t-il de façons de colorier le motif à l'aide de quatre couleurs, chaque couleur étant utilisée au moins une fois ?
2. Combien y a-t-il de façons de colorier le motif à l'aide de six couleurs, une couleur n'étant jamais utilisée deux fois ?
3. Combien y a-t-il de façons de colorier ce motif en noir et blanc avec exactement trois cases blanches ?
4. Combien y a-t-il de façons de colorier ce motif à l'aide de trois couleurs, chaque couleur étant utilisée au moins une fois, de telle sorte que deux cases adjacentes ne soit pas de la même couleur ?

Exercice 42. Pour jouer au loto, on constitue une grille en cochant 5 premiers numéros différents choisis entre 1 et 49 puis en choisissant un numéro « chance » compris entre 1 et 10.

1. Combien y a-t-il de grilles différentes ?
2. Pour un tirage du loto donné,
   a. combien y a-t-il de grilles qui ont le bon numéro « chance » ?
   b. combien y a-t-il de grilles qui ont les 5 bons premiers numéros ?
   c. combien y a-t-il de grilles qui ont exactement 4 bons numéros parmi les 5 premiers ?

Exercice 43. Un domino est une pièce de bois séparée en deux parties. Chacune des deux parties porte un « numéro » entre 0 et 6 représenté par des points noirs (0 étant représenté par une partie sans point noir). Lorsque les deux « numéros » du domino sont identiques, on dit que ce domino est un « double ».

1. Déterminer le nombre de dominos différents.
2. Déterminer le nombre de dominos « double ».
3. On choisit deux dominos.
   a. Combien y a-t-il de choix possibles ?
   b. Combien de choix donnent deux dominos ayant un « numéro » en commun ?