⧫ Chapitre 5. — Calcul littéral

I. — Calcul algébrique

1) Développement

Définition 1

Développer une expression signifie transformer un produit en somme.

Méthode 2

Pour développer une expression, on utilise la distributivité si l'expression contient deux facteurs. Si elle contient plus de deux facteurs, on répète autant de fois que nécessaire la distributivité en prenant les facteurs deux par deux.

Exemple 3.

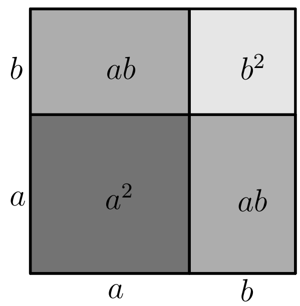
1. Développer $A(x) = 5x(3x - 2)$.
2. Développer $B(x) = (2x - 3)(-x + 4)$.
3. Développer $C(t) = (t + 1)(2t - 3)(-t + 5)$.

Propriété 4. — Identités remarquables

Pour tous réels a et b,

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
3. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

L'égalité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ peut s'interpréter graphiquement de la manière suivante :



Le grand carré a une aire égale à $(a + b)^2$ et il est composé d'un carré d'aire a^2, d'un carré d'aire b^2 et de deux rectangles d'aire ab. Ainsi, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Exemple 5.

1. Développer $A(x) = (3x + 2)^2$.
2. Développer $B(x) = (5 - x)^2$.
3. Développer $C(x) = (x - 0{,}5)(x + 0{,}5)$.

2) Factorisation

Définition 6

Factoriser une expression signifie transformer une somme en produit.

Méthode 7

Pour factoriser une expression, on peut utiliser

- un facteur commun ;
- les identités remarquables ;
- combiner les deux méthodes précédentes.

Exemple 8.

1. Factoriser $A(x) = (x+1)(2x+3) + (x+1)(-5x-2)$.
2. Factoriser $B(x) = x^2 + 6x + 9$.
3. Factoriser $C(x) = 16 - 9x^2$.
4. Factoriser $D(x) = x^2 - 1 - (x-1)(2-7x)$.

3) Réduction au même dénominateur

Méthode 9

Pour additionner deux expressions de la forme $\frac{A(x)}{B(x)}$ et $\frac{C(x)}{D(x)}$, il faut les réduire au même dénominateur.

Exemple 10.

1. Calculer $A(x) = \frac{3x+1}{x-1} - \frac{x+3}{x-5}$.
2. Calculer $B(x) = \frac{7x-3}{x} + \frac{2x-1}{x^3}$.

II. — Puissances entières et racines carrées

1) Puissances entières

Définition 11

Soit a un réel et n un entier relatif.

1. Si $n > 0$ alors $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$.
2. $a^0 = 1$.
3. Si $n < 0$ et $a \neq 0$ alors $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

Exemple 12.

1. $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.
2. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

Propriété 13

Pour tout réel a non nul et tous entiers relatifs n et m :

$$1)\ a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad 2)\ \frac{1}{a^n} = a^{-n} \qquad 3)\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad 4)\ (a^m)^n = a^{m\times n}.$$

Propriété 14

Pour tous réels a et b non nuls et pour tout entier relatif n,

$$1)\ a^n \times b^n = (a\times b)^n \qquad 2)\ \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad 3)\ 1^n = 1.$$

Exemple 15. Écrire chacun des nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

$$a = \frac{5^2 \times 10^2}{5^3 \times 2^4} \qquad b = 10^{-3} \times 10^5 \times 0,0001 \qquad c = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 4^{-2} \qquad d = (0{,}2)^2 \times (0{,}4)^3 \times 10^4.$$

Exemple 16. On considère deux réels a et b non nuls. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme $a^m b^n$ où m et n sont des entiers relatifs.

$$(a^2b)^{-3} \times (ab)^2 \qquad (ab^2)^{-1} \times (a^2b)^2 \qquad \frac{a^{-1}b^2}{a^{-2}b}.$$

2) Racines carrées

Définition 17

Soit a un réel positif ou nul. L'unique réel positif ou nul r tel que $r^2 = a$ est appelé la racine carrée de a et on le note $\sqrt{a}$.

Exemple 18.

1. $\sqrt{9} = 3$ car 3 est positif et $3^2 = 9$.
2. $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ car 0,5 est positif et $0{,}5^2 = 0{,}25$.
3. $\sqrt{0} = 0$ car 0 est positif ou nul et $0^2 = 0$.

Propriété 19

Soit a et b deux réels.

1. Si a et b sont positifs, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
2. Si $a \geqslant 0$ et $b > 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemple 20. Calculer, sans utiliser la calculatrice,

$$A = \sqrt{2500} \qquad B = \sqrt{\frac{81}{36}} \qquad C = \sqrt{50} \times \sqrt{18} \qquad D = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$$

⚠ En général $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Par exemple, $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

III. — Résolution d'équation

Définition 21

Une équation est une égalité dans laquelle figure une (ou plusieurs) quantité(s) inconnue(s) traditionnellement notées x (y, z, t, X,...).

Dans la suite, on ne considère que des équations ayant une seule inconnue.

Définition 22

On dit qu'un nombre réel est solution d'une équation si, lorsqu'on remplace l'inconnue par ce nombre dans l'équation, on obtient une égalité vraie.

Exemple 23. Par exemple, -1 est solution de $x^2+3x=-2$ car l'égalité $(-1)^2+3\times(-1)=-2$ est vraie. En revanche, 1 n'est pas solution de cette équation car l'égalité $1^2+3\times 1=-2$ est fausse puisque $1^2+3\times 1=4$.

Définition 24

Résoudre une équation dans $\mathbb{R}$, c'est déterminer l'ensemble de toutes ses solutions.

Remarque 25. Il se peut qu'une équation n'ait pas de solution dans $\mathbb{R}$. C'est le cas par exemple de l'équation $x^2=-1$ car, pour tout réel x, $x^2\geqslant 0$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est vide. On note cet ensemble $\varnothing$.

Définition 26

On dit que deux équations sont équivalentes si elles ont le même ensemble de solutions. Lorsque deux équations (E) et (F) sont équivalentes, on note :

$$(E)\Leftrightarrow(F)$$

Propriété 27. — (admise)

Étant donné une équation (E), on obtient une équation équivalente à (E) si :

1. on ajoute ou on soustrait un même nombre réel aux deux membres de l'équation ;
2. on multiplie ou on divise les deux membres de l'équation par une même nombre non nul.

Méthode 28

Pour résoudre une équation, on utilise les deux propriétés précédentes pour « isoler » progressivement l'inconnue tout en ne considérant que des équations équivalentes.

Exemple 29. Résoudre l'équation (E) : $\dfrac{x+3}{5}=2-x$ d'inconnue x.

IV. — Exercices

1) Développement

Exercice 1. Développer, réduire et ordonner selon les puissances décroissantes les expressions suivantes.

$$A(x) = 4(3-5x) \qquad B(y) = 1-2(y+2)+3(3-2y)$$

$$C(x) = (1-4x)(5+x) \qquad D(x) = 3\left(3x-\frac{1}{2}\right)\left(2x+\frac{1}{3}\right)$$

$$E(q) = (3q+1)(3-q)(2q+1) \qquad F(x) = \left(\frac{1}{4}x-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{2}{7}+\frac{1}{3}x\right)$$

Exercice 2. Développer, réduire et éventuellement ordonner selon les puissances décroissantes les expressions suivantes.

$$f(x) = (x+2)^2 \qquad g(n) = (2-7n)^2$$
$$h(x) = (7-4x)(7+4x) \qquad i(x) = (5-2x)^2-(1+3x)^2$$
$$j(u) = 2u+4u^2-(2u+1)^2 \qquad E(a,b) = (a+b)^2-(a-b)^2$$

Exercice 3. Développer, réduire et ordonner selon les puissances décroissantes les expressions suivantes.

$A(x) = (1+x^2)^2+3(2-3x)$ $B(x) = (1-x)(1+x+x^2+x^3)$ $C(a) = (a+1)(3-2a)(2-5a)$

Exercice 4. Calculer de tête 999^2 et 1001^2.

Exercice 5. Soit a, b, c et d des réels. Montrer que

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

Exercice 6 (CRPE – Groupement 6 – 2008)**.** On se propose de calculer

$$A = 50\,000\,006 \times 70\,000\,008.$$

1. En tapant ce produit sur une calculatrice scientifique, on peut voir apparaître sur l'écran :

$$3{,}50000082 \times 10^{15}.$$

Justifier, sans calculer A, que cette valeur affichée n'est pas la valeur exacte de A.

2. Toujours sans calculer A, démontrer que $35 \times 10^{14} < A < 48 \times 10^{14}$. En déduire le nombre de chiffres de A.

3. Le nombre A peut aussi s'écrire $(5 \times 10^7 + 6) \times (7 \times 10^7 + 8)$. En utilisant les produits 5×7 ; 5×8 ; 6×7 et 6×8, déterminer la valeur exacte de A.

4. Soit $B = 48\,506\,557 \times 505\,149$. Calculer en utilisant une calculatrice : $48\,506 \times 505$; 557×505 ; $48\,506 \times 149$; 557×149.

En déduire, sans nouvelle utilisation de la calculatrice, en écrivant les calculs, la valeur exacte de B.

Exercice 7 (CRPE – Groupement 1 - 2009)**.** Les deux questions sont indépendantes.

1. **a.** Développer et réduire l'expression suivante où x est un nombre réel :

$$(x+1)(x-1)-(x+2)(x-2).$$

b. Utiliser le résultat précédent pour trouver rapidement sans utiliser la calculatrice :

$$297\times 295-298\times 294.$$

2. Observer les résultats ci dessous :

$$\begin{aligned}1^2-0^2&=1\\2^2-1^2&=3\\3^2-2^2&=5\\4^2-3^2&=7\end{aligned}$$

Les égalités ci-dessus permettent de conjecturer une propriété. Deux sont proposées ici :

1. *Si a et b sont deux nombres consécutifs, alors leur somme est égale à la différence de leurs carrés.*
2. *Si a et b sont deux nombres consécutifs, alors leur somme est égale au carré de leur différence.*

Une seule de ces propriétés est exacte. Laquelle ? La démontrer.

2) Factorisation

Exercice 8. Factoriser les expressions suivantes en remarquant un facteur commun.

$$A(x,y)=3x+3y \qquad B(q)=-6(1+2q)+6(q+3) \qquad C(x)=x+x(2+5x)$$

$$D(x)=(4x-3)(x+1)+x(4x-3) \qquad E(x)=(2x-5)^2-3(1-x)(2x-5)$$

Exercice 9. Factoriser les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables.

$$A(x)=x^2+6x+9 \qquad B(y)=y^2-49 \qquad C(x)=36x^2-4$$

$$D(n)=4(5n+3)^2-9(n-1)^2 \qquad E(u)=\frac{1}{4}u^2+u+1 \qquad F(x)=(x+4)^2-2(x+4)+1$$

Exercice 10. Factoriser les expressions.

$$A(x)=3(x-4)^2+(4-x)(x+2) \qquad B(x)=(3x-2)^2+(2x+9)(4-6x)$$

$$C(y)=y^2-4y+4+3(y-2)^2 \qquad D(n)=25n^2-4+(5n+2)(4n-7)$$

Exercice 11. Factoriser les expressions suivantes.

$$A(x)=2x+1+(2x+1)(x+3) \qquad B(x)=x^2+4x$$

$$C(x)=x^2+6x+9+(2-5x)(x+3) \qquad D(x)=(2x+1)(7x-1)-1-2x$$

$$E(x)=(3x+6)(1-4x)+(x+2)^2 \qquad F(x,y)=x^2+2x-y^2+4y-3$$

Exercice 12. Déterminer les entiers naturels a et b tels que $a^2-b^2=99$

Exercice 13 (CRPE – Groupement 2 – 2018)**.** Pour calculer de tête le carré d'un nombre entier se terminant par 5 :

- on prend le nombre de dizaines et on le multiplie par l'entier qui suit ce nombre de dizaines, cela donne le nombre de centaines du résultat ;
- on écrit ensuite 25 à droite du nombre de centaines pour obtenir le résultat.

Par exemple, 105 est composé de 10 dizaines et 5 unités, son carré s'obtient :

étape 1 : en calculant $10 \times 11 = 110$, ce qui donne le nombre de centaines du résultat ;

étape 2 : on écrit ensuite 25 à droite de 110 pour obtenir le résultat. On a donc $105^2 = 11\,025$.

1. Montrer comment calculer mentalement 45^2.

2. Soit n un nombre entier se terminant par 5, n peut s'écrire : $10d + 5$ avec d le nombre de dizaines. Établir la relation :

$$n^2 = 100d(d+1) + 25.$$

3. Expliquer en quoi le résultat de la question 2 permet d'établir la technique de calcul mental présentée dans l'énoncé.

4. Comment, par extension de la technique de calcul mental présentée, calculer mentalement le carré de 3,5 ?

3) Réduction au même dénominateur

Exercice 14. Soit x un réel différent de 1 et 2. Simplifier $A(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x-2}$.

Exercice 15. Soit x un réel différent de 3 et -3. Simplifier $B(x) = \frac{x-2}{x-3} + \frac{x+2}{x+3}$.

Exercice 16. Soit n un entier naturel non nul. Simplifier $C(n) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$.

Exercice 17. Soit n un entier naturel non nul. Simplifier $D(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}$.

Exercice 18. Soit t un réel différent de 0 et -1. Simplifier $E(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t(t+1)}$

4) Puissances et racines carrées

Exercice 19. Sans calculatrice, déterminer les nombres égaux dans la liste ci-dessous.

$$A = 2^{100} \qquad B = \frac{(-2)^{60}}{4^{-20}} \qquad C = 100^2 \qquad D = 5^4 \times 2^4$$

$$E = (2^{20})^5 \qquad F = 200^2 \qquad G = 50^4 \qquad H = 10000$$

Exercice 20. Effectuer, sans calculatrice, les opérations suivantes.

$$1 + 3^2 \qquad 2 \times 5^3 \qquad (2 \times 5)^3 \qquad 2^{-1} + 5^{-2} \qquad 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}$$

Exercice 21. Soit a et b deux réels non nuls. Écrire les nombres suivants sous la forme $a^n b^m$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}$.

$$A = a^2 \times b^3 \times \frac{a}{b} \qquad B = \frac{1}{a^4 b^7} \qquad C = \frac{a^{-2}b}{a^{-6}b^3} \qquad D = a \times \frac{1}{b^3} \times \left(\frac{a^2 b}{a^{-1}b^3}\right)^2 \qquad E = \left[(ab^2)^{-2}\right]^3.$$

Exercice 22. Calculer les nombres suivants sans calculatrice.

$$A = \sqrt{4} \qquad B = \sqrt{(-6)^2} \qquad C = \sqrt{11}^2 \qquad D = \sqrt{5^4}$$

$$E = \sqrt{81 \times 49} \qquad F = \sqrt{16 \times 121} \qquad G = \sqrt{169 \times 64}$$

Exercice 23. Calculer les nombres suivants sans calculatrice.

$$A = \sqrt{\frac{81}{16}} \qquad B = \sqrt{\frac{25 \times 81}{64}} \qquad C = \sqrt{49} \times \sqrt{\frac{16}{25}}$$

Exercice 24. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers naturels.

$$A = \sqrt{50} \qquad B = \sqrt{200} \qquad C = \sqrt{147} \qquad D = \sqrt{54}$$

$$E = \sqrt{8} + \sqrt{18} \qquad F = \sqrt{75} + \sqrt{48} + \sqrt{12} \qquad G = \sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{300}$$

Exercice 25. Soit ABC un triangle tel que AB $= 4\sqrt{3}$, BC $= 2\sqrt{12}$ et CA $= 4\sqrt{6}$.
Déterminer la nature précise du triangle ABC.

Exercice 26. Soit $t \in \mathbb{R}$. Simplifier $\left(\sqrt{t^2+1} - 1\right)\left(\sqrt{t^2+1} + 1\right)$.

Exercice 27. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $\sqrt{(x^2-1)^2 + 4x^2}$

5) Résolution d'équation

Exercice 28. Vérifier que $2 + \sqrt{6}$ est solution de l'équation $x^2 - 4x = 2$.

Exercice 29. — On considère l'équation

$$(E) : \ \frac{3x+1}{5} - 2x + 1 = 3 + 4x.$$

Compléter le raisonnement suivant en indiquant entre parenthèses l'opération effectuée pour passer d'une équation à l'autre (par exemple : on a divisé par 3, on a additionné 2, etc...)

(E)	$\Leftrightarrow$	$\frac{3x+1}{5} - 2x + 1 - (3 + 4x) = 0$	(On a ....)
	$\Leftrightarrow$	$\frac{3x+1}{5} - 2x + 1 - 3 - 4x = 0$	
	$\Leftrightarrow$	$\frac{3x+1}{5} - 6x - 2 = 0$	
	$\Leftrightarrow$	$3x + 1 - 30x - 10 = 0$	(On a ....)
	$\Leftrightarrow$	$-27x - 9 = 0$	
	$\Leftrightarrow$	$-27x = 9$	(On a ....)
	$\Leftrightarrow$	$x = -\frac{9}{27}$	(On a ....)
	$\Leftrightarrow$	$x = -\frac{1}{3}$	

Conclusion : ....

Exercice 30. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$(E_1) : \ 3x = 0 \qquad (E_2) : \ 5x = 1 \qquad (E_3) : \ 3 - 2x = 5 \qquad (E_4) : \ 1 - x = 4x + 7$$

$$(E_5) : \ 0{,}3x + 0{,}01 = 2{,}7 - 3{,}1x \qquad (E_6) : \ \frac{2}{3}x = 5 \qquad (E_7) \ \frac{7}{5}x - \frac{1}{3} = \frac{3}{4}x + 1$$

Exercice 31. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$(E_1) : \ \frac{x-2}{2} + 2 = 2x \qquad (E_2) : \ \frac{2x+3}{4} + \frac{4-x}{3} = \frac{x+1}{2}$$

$$(E_3) : \ \frac{5-x}{7} + 0{,}3x = \frac{2}{5} \qquad (E_4) : \ \sqrt{3}x - 2 = x + 1$$

Exercice 32. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$(E_1) : \ x(x+1) = x^2 + 3 \qquad (E_2) : \ (2x+3)^2 - 4x^2 = 5x + 1$$

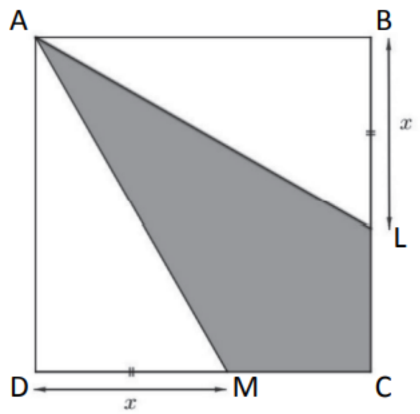
$$(E_3) : \ x(1-3x) + 3x^2 = \frac{3-7x}{5} \qquad (E_4) : \ (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 5x - 2$$

Exercice 33 (CRPE – Aix-Marseille – 1999)**.** Un nombre à trois chiffres a 4 pour chiffre des centaines. Ce nombre est 26 fois plus grand que le nombre à deux chiffres obtenu en enlevant le chiffre des centaines. Trouver ce nombre.

Exercice 34 (CRPE – Groupement 2 – 2017)**.** Un batelier descend une rivière de 120 km en un certain nombre de jours n, puis il la remonte. La distance parcourue quotidiennement lors de la remontée est inférieure de 6 km à celle parcourue quotidiennement lors de la descente. Le batelier met au total un jour de plus pour remonter que pour descendre. On considère qu'il descend à vitesse constante et qu'il remonte à vitesse constante.

1. Exprimer, en fonction de n, la distance, en kilomètre, parcourue quotidiennement pendant la descente et la distance, en kilomètre, parcourue quotidiennement pendant la remontée.
2. Montrer que $\frac{120}{n+1} = \frac{120}{n} - 6$.
3. Déduire de la question précédente que $n(n+1) = 20$.
4. En déduire la valeur de n et interpréter ce résultat.

Exercice 35 (d'après CRPE – Groupement 4 – 2021)**.** On souhaite partager un carré ABCD de 10 cm de côté en trois parties comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



L est un point du segment [BC] et M est le point du segment [CD] tel que DM = BL. On note x la longueur, en centimètre, du segment [BL].

1. Expliquer pourquoi $0 \leqslant x \leqslant 10$.
2. Vérifier que si $x = 2$ alors l'aire du quadrilatère grisé AMCL est égale à 80 cm^2.
3. Calculer l'aire du quadrilatère grisé AMCL si $x = \frac{3}{5}$.
4. Montrer que l'aire du quadrilatère grisé AMCL, exprimée en centimètre carré, en fonction de x, est égale à $100 - 10x$.
5. Déterminer x pour que les trois parties aient la même aire.