# ⧫ Chapitre 3. Fractions, décimaux et réels

## I. — Nombres entiers

**Définition 1 : Rappels**

L'ensemble des entiers naturels est l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls : 0, 1, 2, 3, etc.

**Notation 2.**

1. L'ensemble des entiers naturels se note $\mathbb{N}$. Ainsi, $\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;3\,;...\}$.
2. Pour signifier qu'un élément appartient à un ensemble, on utilise le symbole $\in$ (« appartient »). Dans le cas contraire, on utilise le symbole $\notin$ (« n'appartient pas »).

**Exemple 3.** $17 \in \mathbb{N}$ mais $-3 \notin \mathbb{N}$.

**Définition 4**

L'ensemble des entiers relatifs est l'ensemble de tous les nombres entiers (positifs, négatifs ou nuls) : 0, 1, $-1$, 2, $-2$, 3, $-3$ etc.

**Notation 5.** L'ensemble des entiers relatifs se note $\mathbb{Z}$. Ainsi, $\mathbb{Z} = \{..., -3\,;-2\,;-1\,,0\,;1\,;2\,;3\,;...\}$.

**Exemple 6.** $17 \in \mathbb{Z}$ et $-3 \in \mathbb{Z}$ mais $1{,}6 \notin \mathbb{Z}$.

*Remarque* 7. Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs : si $a \in \mathbb{N}$ alors $a \in \mathbb{Z}$. Du point de vue des ensembles, on dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ ce qu'on note symboliquement : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Cela signifie que $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{Z}$.

## II. — Notion de fractions

### 1) Fractions positives

**Définition 8**

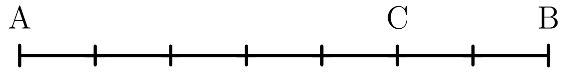
Étant donné deux nombres entiers naturels $a$ et $b$ avec $b \neq 0$, la fraction « $a$ sur $b$ », notée $\frac{a}{b}$, désigne la proportion du nombre $b$ dans le nombre $a$.

Autrement dit, la fraction $\frac{a}{b}$ est l'unique nombre tel que $\frac{a}{b} \times b = a$.

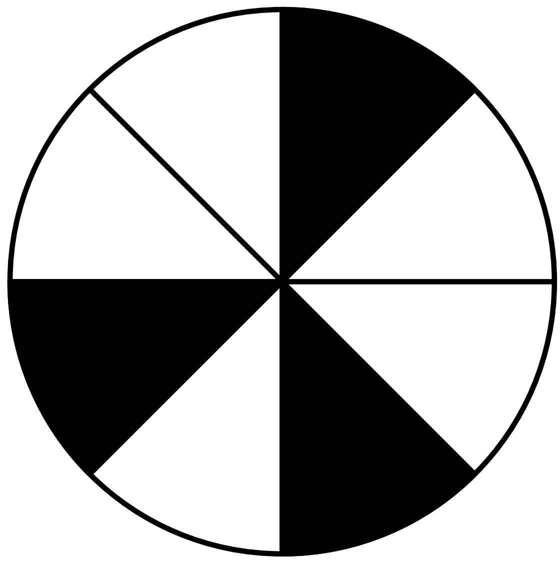
**Interprétation 9.** Dans le cas où l'entier $a$ est inférieur ou égal à l'entier $b$, la fraction $\frac{a}{b}$ peut s'interpréter de la manière suivante. On considère un ensemble $E$ (un segment, une surface, une population, ...) partagé en $b$ parts <u>égales</u>. Une partie de cet ensemble composée de $a$ parts représente une proportion $\frac{a}{b}$ de $E$.

**Exemple 10.**

1. On considère un segment [AB] de longueur 7 cm et on place sur [AB] le point C tel que AC = 5 cm. Alors, Le segment [AC] représente $\frac{5}{7}$ du segment [AB].



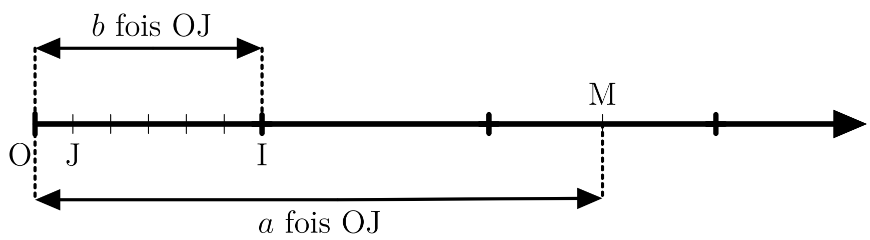

2. Sur la roue représentée ci-dessous et qui est partagée en 8 secteurs identiques, la partie noire représente $\frac{3}{8}$ de la roue.



*Remarque* 11. Étant donné deux quantités, par exemple deux segments, pour pouvoir dire que l'une est une fraction de l'autre, il faut trouver une unité commune dans laquelle chaque quantité s'exprime comme un nombre entier. Dans l'exemple précédent, les longueurs de segments [AB] et [AC] s'expriment en nombres entiers d'une unité qui est le centimètre. Si on considère le point D milieu de [AC], on ne pourra pas écrire la longueur AD comme un nombre entier de centimètres. Cependant, on peut changer d'unité et remplacer le centimètre par le demi-centimètre. La longueur AD correspond alors à 5 demi-centimètres et la longueur AB à 14 demi-centimètres donc [AD] représente $\frac{5}{14}$ de [AB].

Lorsqu'on peut trouver une unité commune dans laquelle deux grandeurs s'expriment en nombre entier, on dit que ces grandeurs sont commensurables (c'est-à-dire « qui admettent une mesure commune »). Dans le cas contraire, on dit qu'elles sont incommensurables.

**Interprétation 12.** De manière générale, si $a$ et $b$ sont des entiers naturels tels que $b \neq 0$, on peut interpréter la fraction $\frac{a}{b}$ de la manière suivante. On considère une demi-droite graduée d'origine O, le segment [OI] correspondant à une unité. On partage [OI] en $b$ parties égales et on note J le point de la demi-droite tel que OJ soit égale à la longueur d'une des $b$ parties égales. Alors $\frac{a}{b}$ représente la longueur du segment [OM] où M est le point de la demi-droite tel que OM soit égale à $a$ fois OJ.



## 2) Fractions quelconques

**Définition 13**

Si $a$ est un entier relatif et $b$ est un entier naturel non nul, la fraction $a$ sur $b$, notée $\frac{a}{b}$, est l'unique nombre tel que $\frac{a}{b} \times b = a$. Ainsi, $\frac{a}{b}$ est un nombre qui correspond au quotient exact dans la division de $a$ par $b$.

On dit alors que $a$ est le numérateur de $\frac{a}{b}$ et que $b$ est le dénominateur de $\frac{a}{b}$.

*Remarque* 14.

1. Dans le cas où $a$ est positif, on retrouve la notion de fraction introduite en **1)**. Ici, on généralise en acceptant que le numérateur soit négatif.
2. Par définition, pour tout entier $a$ non nul, $\frac{a}{a} = 1$.

**Propriété 15**

Deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales (ou équivalentes) si et seulement si les produits en croix $a \times d$ et $b \times c$ sont égaux.

**Exemple 16.**

1. Les fractions $\frac{15}{20}$ et $\frac{3}{4}$ sont-elles égales ?
2. Soit $a$ un entier. Les fractions $\frac{a}{a+1}$ et $\frac{a-1}{a}$ sont-elles égales ?

**Corollaire 17**

Si $\frac{a}{b}$ est une fraction et si $k$ est un entier naturel non nul alors $\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}$.

Ainsi, si les entiers $a$ et $b$ ont un diviseur commun, on peut simplifier la fraction par ce diviseur sans changer la valeur de la fraction.

**Définition 18**

On dit qu'une fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si on ne peut pas la simplifier c'est-à-dire si $a$ et $b$ n'ont pas d'autre diviseur positif commun que 1.

**Exemple 19.** La fraction $\frac{54}{45}$ n'est pas irréductible car on peut la simplifier par 9 : $\frac{54}{45} = \frac{9\times6}{9\times5} = \frac{6}{5}$. En revanche, la fraction $\frac{6}{5}$ est irréductible.

# III. — Nombres rationnels

## 1) Définition

**Définition 20**

On dit qu'un nombre $x$ est rationnel s'il peut s'écrire comme une fraction c'est-à-dire s'il existe un entier relatif $a$ et un entier naturel non nul $b$ tel que $x = \frac{a}{b}$.

On dit alors que $\frac{a}{b}$ est une écriture fractionnaire de $x$.

**Notation 21.** L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$.

**Exemple 22.**

**1.** $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$.

**2.** $0{,}17 \in \mathbb{Q}$ car $0{,}17 = \frac{17}{100}$.

**3.** $-1{,}25 \in \mathbb{Q}$ car $-1{,}25 = -\frac{5}{4}$.

**4.** $12 \in \mathbb{Q}$ car $12 = \frac{12}{1}$.

*Remarque* 23.

**1.** Un nombre $x$ est rationnel si et seulement s'il existe un entier $b$ tel que $b \times x$ est un entier.

**2.** Tout nombre entier relatif est un nombre rationnel puisque si $x$ est un entier alors $x = \frac{x}{1}$ avec $x \in \mathbb{Z}$ et $1 \in \mathbb{N}$. D'un point de vue ensembliste, $\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$ : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

**3.** Un rationnel $x$ admet une infinité d'écritures fractionnaires. En effet, si $x = \frac{a}{b}$ alors, pour tout entier naturel non nul $k$, $\frac{k \times a}{k \times b}$ est une écriture fractionnaire de $x$. Ainsi,

$$0{,}2 = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{4}{20} = \frac{6}{30} = ...$$

Parmi toutes les écritures fractionnaires, on privilégie en général l'écriture sous forme d'une fraction irréductible.

## 2) Opérations sur les écritures fractionnaires

### a) Addition et soustraction

Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$ sont deux fractions ayant le même dénominateur alors

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$

Pour additionner ou soustraire deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ avec $b \neq d$, il faut commencer par les mettre au même dénominateur. Pour cela, on cherche un multiple commun de $b$ et $d$ (aussi petit que possible).

**Exemple 24.** Effectuer les calculs suivants et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$$\frac{1}{5} - \frac{4}{5} \qquad \frac{2}{15} + \frac{8}{15} \qquad \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \qquad \frac{15}{8} - \frac{13}{10}.$$

### b) Multiplication

Pour multiplier deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

En particulier, il n'y pas besoin que les fractions aient le même dénominateur.

En revanche, on a intérêt à simplifier les fractions avant de faire les produits.

**Exemple 25.** Effectuer les calculs suivants et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$$\frac{1}{5} \times \frac{3}{2} \qquad \frac{14}{9} \times \frac{3}{7} \qquad \frac{2022}{1000} \times \frac{100}{1011}.$$

### c) Division

Pour diviser une fraction $\frac{a}{b}$ par une fraction non nulle $\frac{c}{d}$, on multiplie $\frac{a}{b}$ par l'inverse $\frac{c}{d}$, c'est-à-dire par $\frac{d}{c}$ :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Comme pour la multiplication, il n'est pas nécessaire que les fractions aient le même dénominateur et on a intérêt à simplifier avant de faire les multiplications.

**Exemple 26.** Effectuer les calculs suivants et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{2}} \qquad \frac{\frac{46}{9}}{\frac{23}{3}} \qquad \frac{\frac{100}{99}}{\frac{20}{11}}.$$

### d) Puissances

Soit $n$ un entier naturel. Pour élever une fraction à la puissance $n$, on élève le numérateur et le dénominateur à la puissance $n$ :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

**Exemple 27.** Effectuer les calculs suivants et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \qquad \left(\frac{8}{16}\right)^3 \qquad \left(\frac{2023}{2022}\right)^{2000} \times \left(\frac{2022}{2023}\right)^{2000}.$$

# IV. — Nombres décimaux

**Définition 28**

Une fraction décimale est une fraction $\frac{a}{b}$ telle que $b$ est une puissance de 10.

**Exemple 29.** $\frac{1363}{100} = \frac{1363}{10^2}$, $\frac{3}{1} = \frac{3}{10^0}$ (Rappel : $10^0 = 1$) et $-\frac{999}{1000} = -\frac{999}{10^3}$ sont des fractions décimales.

**Définition 30**

On dit qu'un nombre $x$ est décimal s'il peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale c'est-à-dire s'il existe un entier relatif $a$ et un entier naturel $n$ tels que $x = \frac{a}{10^n}$.

**Notation 31.** L'ensemble des nombres décimaux se note $\mathbb{D}$.

**Exemple 32.** $\frac{3}{100} \in \mathbb{D}$ car $\frac{3}{100} = \frac{3}{10^2}$ ; $-0{,}4738 \in \mathbb{D}$ car $-0{,}4738 = \frac{-4738}{10^4}$ ; $\frac{7}{4} \in \mathbb{D}$ car $\frac{7}{4} = \frac{175}{10^2}$ ; $7 \in \mathbb{D}$ car $7 = \frac{7}{10^0}$.

*Remarque* 33.

1. Tout entier relatif est un décimal. En effet, si $a \in \mathbb{Z}$ alors on peut écrire $a = \frac{a}{10^0}$ donc $a \in \mathbb{D}$. D'un point de vue des ensembles, $\mathbb{Z}$ est donc inclus dans $\mathbb{D}$ : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
2. Tout nombre décimal est un nombre rationnel puisqu'il peut s'écrire sous la forme d'une fraction. D'un point de vue des ensembles, $\mathbb{D}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$ : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
3. L'écriture d'un décimal sous la forme $\frac{a}{10^n}$ n'est pas unique. Par exemple, $1{,}7 = \frac{17}{10^1} = \frac{170}{10^2} = \frac{1700}{10^3} = \dots$.

**Propriété 34**

Une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ est une fraction décimale si et seulement si les diviseurs positifs de $b$ autre que 1 sont tous des multiples de 2 ou de 5.

**Exemple 35.** Les nombres suivants sont-ils décimaux ?

$$\frac{17}{8} \qquad \frac{8}{17} \qquad \frac{117}{40} \qquad \frac{44}{55} \qquad \frac{49}{140}.$$

**Définition 36**

Soit $x$ un nombre décimal écrit sous forme $x = \frac{a}{10^n}$. Notons $q$ le quotient et $r$ le reste dans la division euclidienne de $a$ par $10^n$. Alors, $q$ s'appelle la partie entière de $x$ et $\frac{r}{10^n}$ s'appelle la partie décimale (ou fractionnaire) de $x$.

De plus, si l'écriture en base 10 de $q$ est $\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_0}$ et celle de $r$ est $\overline{b_m b_{m-1} \cdots b_0}$ alors l'écriture décimale de $x$ est

$$x = a_k a_{k-1} \cdots a_0{,}b_m b_{m-1} \cdots b_0.$$

**Exemple 37.**

1. Déterminer les parties entières et décimales de $\frac{1743}{100}$, $\frac{17}{5}$ et 145,1773.
2. Déterminer l'écriture décimale de $\frac{143}{40}$.

*Remarque* 38. Lorsqu'un nombre décimal est écrit sous forme $\frac{a}{10^n}$, on peut plus simplement obtenir son écriture décimale « en déplaçant la virgule de $n$ rangs vers la gauche » à partir du chiffre des unités. Ainsi, par exemple, $\frac{17}{8} = \frac{17 \times 125}{8 \times 125} = \frac{2125}{1000} = \frac{2125}{10^3} = 2{,}125$. Ici, $a = 2125$ et $n = 3$ donc on a déplacé la virgule de 3 rangs vers la gauche.

**Exemple 39** (À connaître)**.**

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad \frac{1}{4} = 0{,}25 \qquad \frac{3}{4} = 0{,}75 \qquad \frac{1}{5} = 0{,}2 \qquad \frac{2}{5} = 0{,}4 \qquad \frac{3}{5} = 0{,}2 \qquad \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

*Remarque* 40. Il existe des nombres rationnels qui ne sont pas des décimaux. En effet, $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal puisque $\frac{1}{3}$ est irréductible et 3 n'est pas un multiple de 2 ou de 5. Une autre façon de voir les choses consiste à remarquer que lorsqu'on effectue la division de 1 par 3, elle ne s'arrête jamais. Ainsi, l'écriture décimale de $\frac{1}{3}$ contient une infinité de chiffres après la virgule : $\frac{1}{3} = 0{,}333333...$ et la suite de 3 continue indéfiniment. On écrit alors $\frac{1}{3} = 0{,}\underline{3}$ pour signifier qu'il y a une infinité de 3 après la virgule.

Ainsi, les nombres décimaux sont les nombres dont l'écriture décimale comporte un nombre fini de chiffres après la virgule. On peut montrer que les rationnels qui ne sont pas décimaux sont les nombres dont l'écriture décimale comporte une infinité de chiffres après la virgule et tels que ces chiffres sont périodiques, c'est-à-dire que les chiffres après la virgule sont composés d'une suite de chiffres qui se répète indéfiniment. Pour $\frac{1}{3}$, c'est simplement le chiffre 3 qui se répète indéfiniment. On peut vérifier que $\frac{5}{11} = 0{,}\underline{45}$ et que $\frac{100}{13} = 7{,}\underline{692307}$. Ainsi, dans l'écriture décimale, la partie fractionnaire de $\frac{1}{3}$ est périodique de période 1, la partie fractionnaire de $\frac{5}{11}$ est périodique de période 2 et la partie fractionnaire de $\frac{100}{13}$ est périodique de période 6.

*Exemple* 41. Déterminer l'écriture sous forme de fraction irréductible de :

$$a = 0{,}\underline{6} \qquad b = 2{,}\underline{4} \qquad c = 4{,}\underline{12} \qquad d = 7{,}\underline{123}.$$

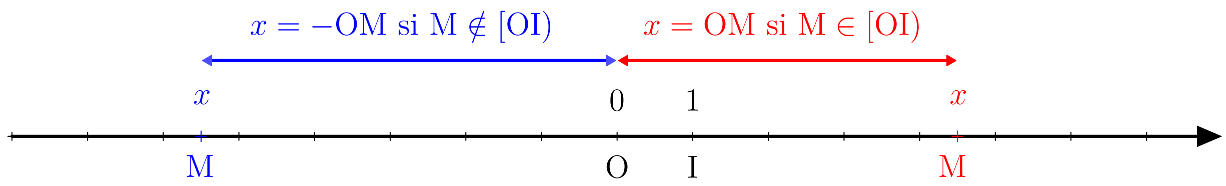
# V. — Nombres réels

**Définition 42**

L'ensemble de tous les nombres que nous utilisons est appelé l'ensemble des nombres réels.

**Notation 43.** L'ensemble des nombres réels se note $\mathbb{R}$.

**Représentation graphique**. — Graphiquement, on peut représenter l'ensemble des nombres réels par une droite graduée appelée « droite réelle » (ou « axe réel »).

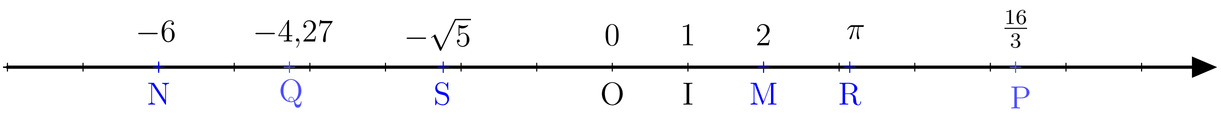



À chaque point M de cette droite, on peut associer un et un seul nombre réel qui correspond à la distance OM si M appartient à la demi-droite [OI) et à l'opposé de la distance OM sinon.

**Définition 44**

Dans la correspondance décrite ci-dessus, on dit que le nombre $x$ est l'abscisse du point M sur la droite réelle. On le note alors $x_{\mathrm{M}}$ ce qui se lit « $x$ indice M ».

**Exemple 45.** Sur la figure ci-dessous, les points M, N, P, Q, R et S ont respectivement pour abscisses 2, $-6$, $\frac{16}{3}$, $-4{,}27$, $\pi$, $-\sqrt{5}$.




Autrement dit, $x_{\mathrm{M}} = 2$, $x_{\mathrm{N}} = -6$, $x_{\mathrm{P}} = \frac{16}{3}$, $x_{\mathrm{Q}} = -4{,}27$, $x_{\mathrm{R}} = \pi$ et $x_{\mathrm{S}} = -\sqrt{5}$.
Notons, de plus, que, par définition, $x_{\mathrm{O}} = 0$ et $x_{\mathrm{I}} = 1$.

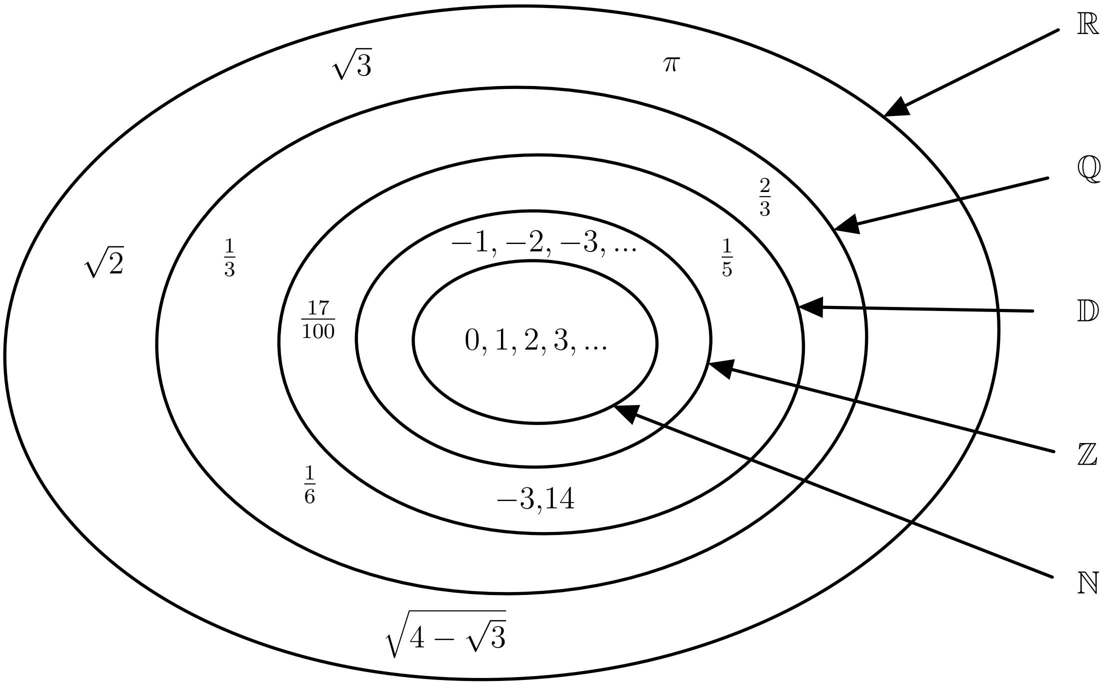
Il existe des réels qui ne sont pas rationnels. En particulier,

**Propriété 46**

Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Il existe beaucoup d'autres nombres réels qui ne sont pas rationnels comme $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{4-\sqrt{3}}$, $\pi$... Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont appelés les nombres irrationnels.

**BILAN**. — On a les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.




# VI. — Exercices

## 1) Nombres entiers

**Exercice 1.** Les nombres suivants sont-ils entiers ?

$$A = \frac{2023}{2} \qquad B = \frac{91}{7} \qquad C = \sqrt{16} - \sqrt{25} \qquad D = 1 + \sqrt{2}.$$

**Exercice 2.** Dans chacun des cas suivants, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant sa réponse.

**1.** Le produit de deux entiers relatifs est un entier naturel.

**2.** La différence de deux entiers naturels est un entier naturel

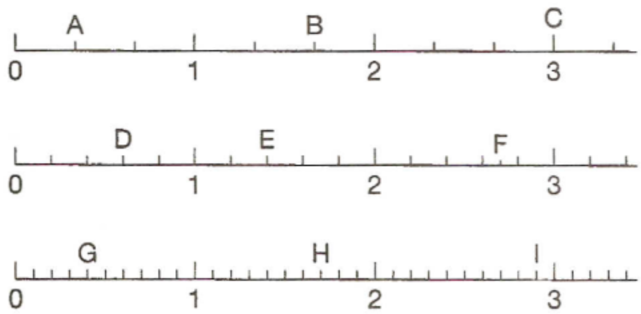
**3.** Le quotient de deux entiers relatifs non nuls est un entier relatif.

**4.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-n \in \mathbb{N}$.

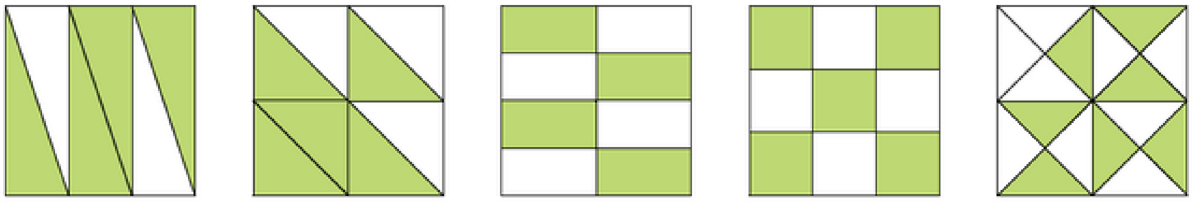
**5.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$.

## 2) Fractions et nombres rationnels

**Exercice 3.** Sur la figure ci-contre, on considère des demi-droites graduées de façon régulière.
Déterminer les fractions associées aux points A, B, C, D, E, F, G, H et I.



**Exercice 4.** Dans chaque cas, quelle fraction du carré représente la surface colorée ?



**Exercice 5.** Sans utiliser la calculatrice, montrer que les fractions $\frac{203242}{23535}$ et $\frac{65311}{7432}$ ne sont pas égales.

**Exercice 6.** Sans utiliser la calculatrice, écrire sous forme de fractions irréductibles

$$A = \frac{5+3}{5+7} \quad B = \frac{3}{4} - \frac{2}{7} \quad C = \frac{9}{4} \times \frac{10}{21} \quad D = \frac{\frac{15}{14}}{\frac{3}{4}} \quad E = \frac{2}{3} - \frac{7}{3} \times \frac{9}{21} \quad F = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{2}.$$

**Exercice 7.** Effectuer les calculs suivants sans utiliser la calculatrice et vérifier ensuite les résultats à l'aide de celle-ci.

$$1)\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \qquad 2)\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \qquad 3)\ \frac{4}{3} + \frac{3}{4} - 1 \qquad 4)\ \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \qquad 5)\ \frac{4}{3} \times \frac{3}{3} - 1$$

$$6)\ \frac{4 \times 91}{18 \times 2} - \frac{91}{18} \times 2 \qquad 7)\ \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{5} \qquad 8)\ \frac{\frac{1}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} \qquad 9)\ \frac{4}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}$$

$$10)\ 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{3}}} \qquad 11)\ \frac{\frac{2}{7} + \frac{5}{21}}{\frac{5}{9} - \frac{1}{3}} \qquad 12)\ \frac{2 + \frac{1}{5}}{7 - \frac{3}{5}} \qquad 13)\ \frac{\frac{1}{3} - \frac{5}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} \times \frac{\frac{5}{6} + \frac{7}{3}}{1 - \frac{5}{6}}$$

$$14)\ \left(\frac{1}{2}\right)^5 \qquad 15)\ 7^5 \times \left(\frac{2}{7}\right)^6 \qquad 16)\ \left(\frac{3}{4}\right)^4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 \qquad 17)\ \frac{\left(\frac{7}{5}\right)^2}{\left(\frac{7}{10}\right)^3}.$$

**Exercice 8.** Dans chacun des cas suivants, déterminer si le triangle ABC est rectangle ou non.
**1.** $AB = \frac{3}{4}$, $AC = 1$, $BC = \frac{5}{4}$ **2.** $AB = \frac{4}{3}$, $AC = \frac{5}{2}$ et $BC = \frac{17}{6}$ **3.** $AB = \frac{1}{2}$, $AC = \frac{2}{3}$, $BC = \frac{7}{6}$.

**Exercice 9.** La jauge de mon réservoir indique $\frac{1}{5}$. Je mets 33 litres d'essence dans le réservoir et la jauge indique ensuite $\frac{3}{4}$. Quelle est, en litres, la capacité du réservoir ?

## 3) Nombres décimaux

**Exercice 10.** Cet exercice est à traiter sans calculatrice.

1. Dans chacun des cas suivants, trouver une écriture fractionnaire du nombre qui montre que celui-ci est décimal.

$$-3{,}256 \qquad 5 \qquad -\frac{3}{5} \qquad \frac{101}{125} \qquad -\frac{1}{16}$$

2. Déterminer la partie entière et la partie décimale des nombres suivants.

$$17{,}324 \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{178}{100} \qquad \frac{27}{25} \qquad \frac{2300}{125}.$$

3. Déterminer l'écriture décimale des nombres suivants.

$$\frac{37}{100} \qquad \frac{1789}{10^4} \qquad \frac{36}{25} \qquad \frac{17}{8} \qquad \frac{250}{125}.$$

**Exercice 11.** (CRPE – Montpellier – 1996)

1. On a demandé à un élève de donner huit nombres décimaux. Il a proposé :

$$5 \qquad \frac{1}{6} \qquad 0 \qquad \frac{2}{5} \qquad 0{,}25 \qquad \frac{7}{21} \qquad \frac{1}{10} \qquad \frac{3}{12}.$$

   Qu'en pensez-vous ? Justifiez votre réponse.

2. $a$ et $b$ sont des nombres entiers compris entre 1 et 5. Parmi tous les fractions $\frac{a}{b}$ possibles, trouver tous les nombres décimaux.

**Exercice 12** (CRPE – Sujet 0 – 2022)**.** Un nombre décimal est souvent défini de la façon suivante : « un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où $a$ est un nombre entier et $n$ est un nombre entier positif. »

1. On s'appuiera sur la définition précédente pour répondre aux deux questions suivantes.
   **a.** Montrer que 0,127 est un nombre décimal.
   **b.** Montrer que 14 est un nombre décimal.
2. Dans une classe de CM2, un enseignant demande aux élèves de dire ce qu'est un nombre décimal, voici trois réponses proposées par des élèves :

   Élève A : « Un nombre décimal est un nombre avec une virgule. »

   Élève B : « Un nombre décimal est un nombre qui s'écrit avec une fraction qui a 10 ou 100 au dénominateur. »

   Élève C : « Un nombre décimal est un nombre qui n'est pas entier. »

   Expliquer pourquoi chacune des définitions proposées ne convient pas d'un point de vue mathématique. On pourra notamment s'appuyer sur des contre-exemples.
3. Parmi les nombres suivants dire, en justifiant, lesquels sont décimaux et lesquels ne le sont pas : 2,48 ; $\frac{7}{25}$ ; 12 ; $\frac{7}{9}$ ; $\frac{49}{14}$.
4. Le produit de deux nombres décimaux est-il toujours un nombre décimal ? Justifier.
5. Le quotient de deux nombres décimaux est-il toujours un nombre décimal ? Justifier.

**Exercice 13** (D'après CRPE – Amiens – 1998)**.** On considère les deux nombres $\frac{29}{55}$ et $\frac{39}{75}$.

1. Sont-ils des nombres décimaux ?
2. Comparer ces deux nombres.
3. Trouver un nombre décimal strictement compris entre ces deux nombres.
4. Trouver une fraction qui ne soit pas un nombre décimal, strictement comprise entre ces deux nombres.

**Exercice 14** (CRPE – Nice – 1998)**.** Écrire un entier à la place du point pour que l'écriture fractionnaire désigne

| un entier naturel | un décimal non entier naturel | un rationnel non décimal |
|---|---|---|
| $\frac{\cdot}{85}$ | $\frac{\cdot}{85}$ | $\frac{\cdot}{85}$ |
| $\frac{85}{\cdot}$ | $\frac{85}{\cdot}$ | $\frac{85}{\cdot}$ |

**Exercice 15** (CRPE – Groupement 6 – 2008)**.**

1. Parmi les nombres rationnels suivants, quels sont ceux qui sont des décimaux ? Justifier la réponse.

$$\frac{1}{7} \qquad \frac{27}{8} \qquad \frac{91}{7} \qquad \frac{42}{17}$$

2. Le but de cette question est d'étudier l'écriture décimale de $\frac{1}{7}$.
   **a.** Poser la division de 1 par 7. En déduire l'écriture décimale périodique de $\frac{1}{7}$.
   **b.** Donner, en justifiant succinctement, la 32$^{e}$ décimale de $\frac{1}{7}$.

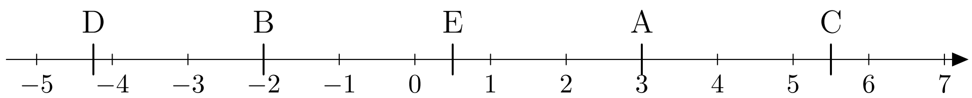
3. Le but de cette question est de produire l'écriture décimale périodique de $\frac{42}{17}$. En utilisant un tableur pour effectuer la division de 42 par 17, on obtient le tableau suivant. À partir de la cellule A2, la colonne A donne les restes successifs de la division de 42 par 17. À partir de la cellule B2, la colonne B donne les quotients successifs.
   **a.** Donner sans justification la 20$^{e}$ décimale de l'écriture décimale de $\frac{42}{17}$.
   **b.** À partir du tableau ci-contre, donner l'écriture décimale périodique de $\frac{42}{17}$.
   **c.** Expliquer pourquoi on est sûr de retrouver dans la cellule A18 un reste déjà obtenu.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 42 | 17 |
| 2 | 8 | 2 |
| 3 | 12 | 4 |
| 4 | 1 | 7 |
| 5 | 10 | 0 |
| 6 | 15 | 5 |
| 7 | 14 | 8 |
| 8 | 4 | 8 |
| 9 | 6 | 2 |
| 10 | 9 | 3 |
| 11 | 5 | 5 |
| 12 | 16 | 2 |
| 13 | 7 | 9 |
| 14 | 2 | 4 |
| 15 | 3 | 1 |
| 16 | 13 | 1 |
| 17 | 11 | 7 |
| 18 | 8 | 6 |
| 19 | 12 | 4 |
| 20 | 1 | 7 |
| 21 | 10 | 0 |
| 22 | 15 | 5 |
| 23 | 14 | 8 |
| 24 | 4 | 8 |

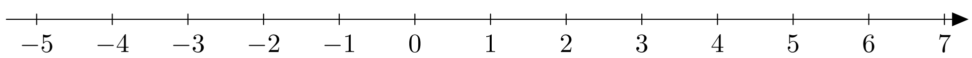
4. On se propose maintenant de retrouver l'écriture fractionnaire du rationnel $a = 1{,}\underline{23}$ (c'est-à-dire le nombre dont l'écriture décimale périodique est 1,232323232323...). Pour cela, calculer $100a - a$ et en déduire l'écriture de $a$ sous forme fractionnaire.

## 4) Nombres réels

**Exercice 16.** Sur la droite réelle ci-dessous, on a placé des points A, B, C, D et E. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, les abscisses de ces points.




**Exercice 17.** Sur la droite réelle ci-dessous, placer (avec la précision permise par le graphique) le point A d'abscisse 2, le point B d'abscisse $-\dfrac{17}{4}$, le point C d'abscisse $-\pi$, le point D d'abscisse $\dfrac{9}{2}$ et le point E d'abscisse $\sqrt{10}$.




**Exercice 18.** Compléter en utilisant $\in$ ou $\notin$. On ne demande pas de justification.

$$5 \ldots \mathbb{Z}\,; \quad \pi \ldots \mathbb{R}\,; \quad \frac{1}{3} \ldots \mathbb{D}\,; \quad \frac{1}{10} \ldots \mathbb{D}\,; \quad -3 \ldots \mathbb{Z}\,; \quad \sqrt{2} \ldots \mathbb{Q}\,; \quad 0{,}75 \ldots \mathbb{Q}\,; \quad \frac{10}{2} \ldots \mathbb{N}.$$

**Exercice 19.** Pour chacune des phrases suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant sa réponse.

1. Il existe un nombre décimal qui est un entier naturel.
2. Il n'existe pas de nombre rationnel qui soit décimal.
3. Il existe un nombre décimal compris entre 1,3 et 1,4.
4. Il existe un nombre rationnel non décimal compris entre 1,3 et 1,4.
5. Le produit de deux nombres décimaux est un nombre décimal.
6. Le produit de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.

**Exercice 20.** Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera sa réponse.

1. Pour tout réel $x$, si $x$ est décimal alors $3x$ est décimal.
2. Pour tout réel $x$, si $3x$ est décimal alors $x$ est décimal.
3. Pour tout réel $x$, si $x^2$ est rationnel alors $x$ est rationnel.
4. Pour tout réel $x$, si $x$ est rationnel alors $x^2$ est rationnel.

**Exercice 21.**

1. Soit $x$ un réel non nul. Montrer que $x$ est rationnel si et seulement si $\dfrac{1}{x}$ est rationnel.
2. Déterminer deux irrationnels $x$ et $y$ différents tels que $x \times y$ soit un entier.

**Exercice 22.** On propose une autre démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ en utilisant un raisonnement géométrique. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il existe donc deux entiers naturels non nuls $p$ et $q$ tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.

1. On considère un triangle PQR rectangle et isocèle en P tel que PQ = PR = $q$.
   Démontrer que QR = $p$.
2. Ainsi, il existe au moins un triangle rectangle isocèle dont tous les côtés ont des longueurs qui sont des nombres entiers. Parmi tous les triangles rectangles isocèles à côtés entiers, on note ABC celui qui a les plus petits côtés. On suppose qu'il est rectangle en A et on pose $a$ = BC et $b$ = AB = AC. Enfin, on note D le point de [BC] tel que CA = CD et E le point d'intersection de [AB] avec la perpendiculaire à [BC] passant par D.
   - **a.** Faire une figure.
   - **b.** Montrer que le triangle BDE est rectangle isocèle en D.
   - **c.** Montrer que la longueur BD est un entier.
   - **d.** Montrer que AE = $a - b$ et en déduire que la longueur BE est un entier.
   - **e.** Conclure.

**Exercice 23.** On rappelle que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\pi$ sont irrationnels.

1. Démontrer que $2 - \sqrt{2}$ est irrationnel.
2. Démontrer que $\sqrt{\pi}$ est irrationnel.
3. Démontrer que $\sqrt{\sqrt{3} - 1}$ est irrationnel.