⧫ Chapitre 2. Géométrie du triangle

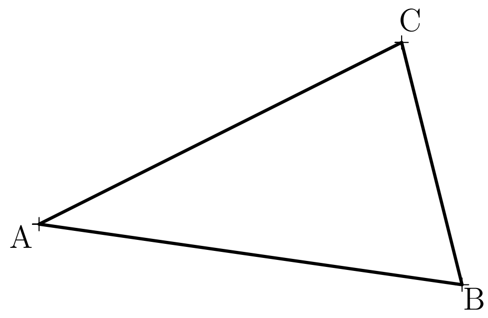
I. — Définition et premières propriétés

1) Définition et propriétés

Définition 1

Un triangle est une figure formée par trois points distincts, appelés **sommets du triangle**, et les trois segments qui relient ces points, appelés **côtés du triangle**.

Pour désigner un triangle, on utilise les lettres correspondant aux trois sommets qui le définissent. Ainsi, le triangle défini par les points A, B et C est noté ABC.



Si les points A, B et C sont alignés, on dit que le triangle ABC est aplati. Dans la suite, on considère des triangles qui ne sont pas aplatis.

Deux côtés du triangle définissent un angle à l'intérieur du triangle. Par exemple, les côtés [AB] et [AC] définissent un angle qu'on notera $\widehat{\mathrm{BAC}}$ ou simplement $\hat{\mathrm{A}}$.

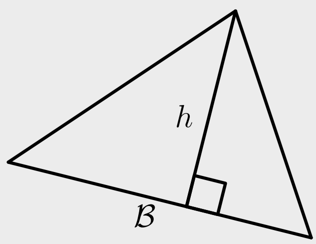
Propriété 2

La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.

Exemple 3. Un triangle possède un angle de 45° et un angle de 30°. Quelle est la mesure du troisième angle de ce triangle ?

Propriété 4

L'aire d'un triangle est $\frac{\mathcal{B}\times h}{2}$ où $\mathcal{B}$ est la longueur de n'importe quel côté du triangle, appelé base, et h est la hauteur associée, c'est-à-dire la distance séparant la base du sommet opposé dans le triangle.



Exemple 5. Un triangle a une base mesurant 5 cm et une hauteur associée mesurant 4 cm. Quelle est son aire en cm^2 ?

Propriété 6. — Inégalité triangulaire

Soit ABC un triangle. Alors,

$$\mathrm{AB} \leqslant \mathrm{AC} + \mathrm{BC}$$

et, de plus, il y a égalité si et seulement si le triangle est aplati.

Remarque 7.

1. L'inégalité triangulaire traduit le fait que le chemin le plus court entre deux points et la ligne droite.
2. L'inégalité triangulaire montre que les côtés d'un triangle ne peuvent pas avoir n'importe quelle longueur : il est nécessaire que la mesure du plus grand côté soit inférieure à la somme des mesures des deux autres côtés.

Exemple 8. Dans chacun des cas suivants, si cela est possible, construire à la règle graduée et au compas, un triangle ABC tel que :

1. $\mathrm{AB} = 6$ cm, $\mathrm{AC} = 4$ cm et $\mathrm{BC} = 3$ cm ;
2. $\mathrm{AB} = 4$ cm, $\mathrm{AC} = 5$ cm et $\mathrm{BC} = 10$ cm ;
3. $\mathrm{AB} = 3$ cm, $\mathrm{AC} = 7$ cm et $\mathrm{BC} = 5$ cm ;

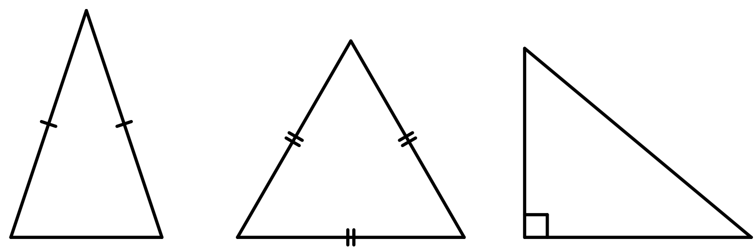
2) Triangles particuliers

Dans tout ce paragraphe, ABC est un triangle.

Définition 9

On dit que le triangle ABC est

- isocèle en A si on a $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$;
- équilatéral si on a $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \mathrm{BC}$;
- rectangle en A si on a $\hat{\mathrm{A}} = 90°$.



triangle isocèle — triangle équilatéral — triangle rectangle

Propriété 10

Le triangle ABC est isocèle en A si et seulement si $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{C}}$.

Propriété 11

Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

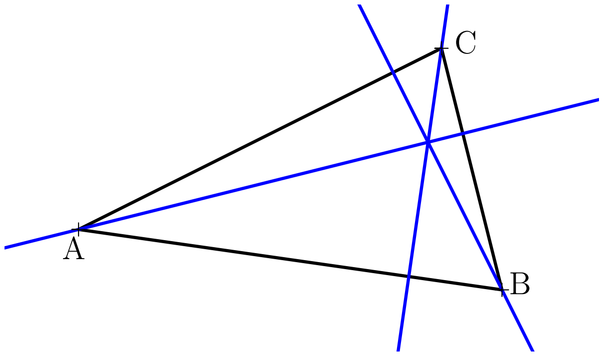
- les trois angles de ABC sont égaux ;
- ABC est isocèle et possède un angle de 60°.

II. — Hauteurs et médiatrices

1) Hauteurs

Définition 12

Les hauteurs d'un triangle sont les droites perpendiculaires à un côté et passant par le sommet opposé à ce côté. Dans un triangle ABC, la droite perpendiculaire à (BC) passant par A est la hauteur issue de A, la droite perpendiculaire à (AC) passant par B est la hauteur issue de B et la droite perpendiculaire à (AB) passant par C est la hauteur issue de C.



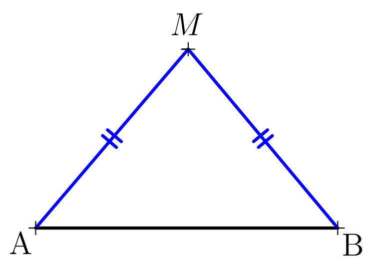
Propriété 13

Les hauteurs de ABC sont concourantes en un point H appelé l'orthocentre de ABC.

2) Médiatrices

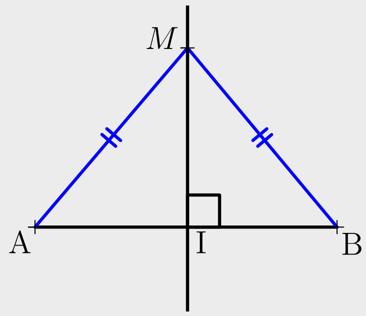
Définition 14

Soit A et B deux points distincts du plan. La médiatrice du segment [AB] est l'ensemble des points M du plan tels que $M\mathrm{A} = M\mathrm{B}$. Dans ce cas, on dit que M est équidistant de A et B.



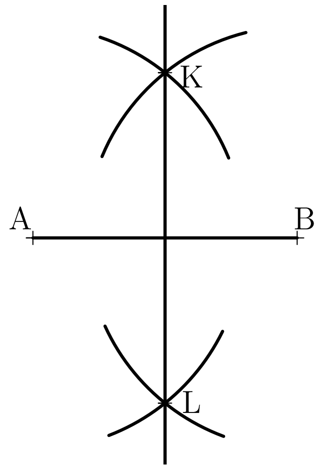
Propriété 15

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu de [AB]. La médiatrice du segment [AB] est la droite passant par I et perpendiculaire à (AB).



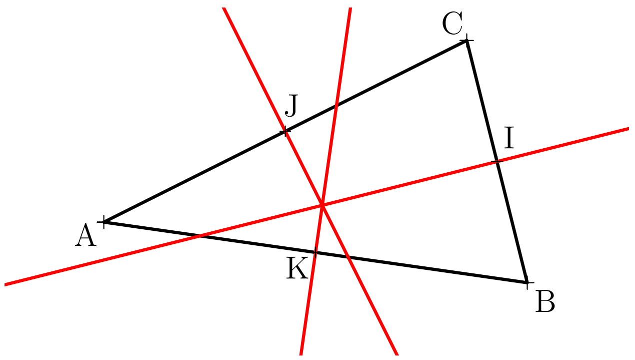
Méthode 16 : Comment construire la médiatrice d'un segment [AB] ?

Pour construire la médiatrice d'un segment [AB], on utilise un compas. On prend une ouverture de compas supérieur à la moitié de la longueur AB, on pique en A, on trace un arc de cercle au-dessus et un arc de cercle en dessous de [AB]. On refait le même chose en piquant en B. On construit ainsi deux points K et L qui sont équidistants de A et B et la médiatrice de [AB] est donc la droite (KL).



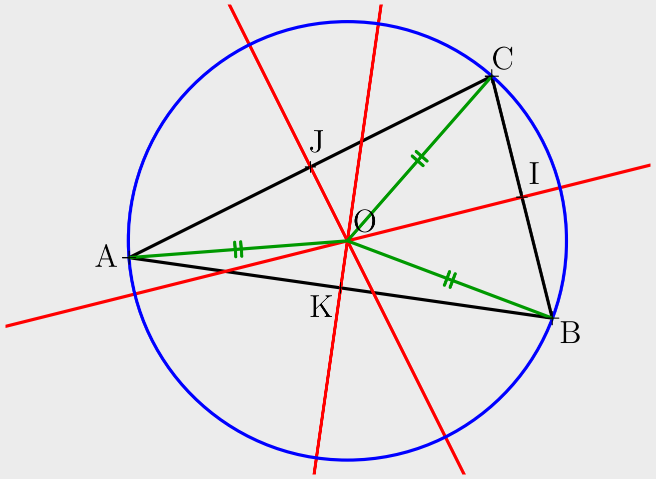
Définition 17

Les médiatrices du triangle ABC sont les médiatrices des segments [AB], [AC] et [BC].



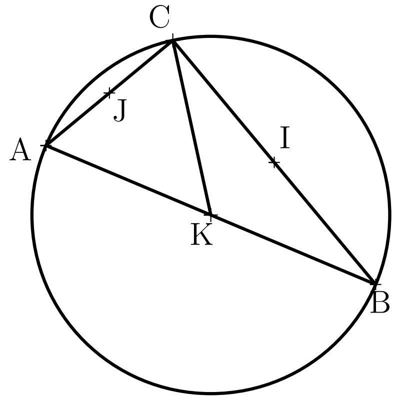
Propriété 18

Les médiatrices de ABC sont concourantes en un point O qui est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, c'est-à-dire le cercle passant par les trois points A, B et C.



Corollaire 19

Le triangle ABC est rectangle en C si et seulement si C appartient au cercle de diamètre [AB] et, dans ce cas, on a donc KA = KB = KC où K désigne le milieu de [AB].



Remarque 20. Dans un triangle ABC isocèle en A, la médiatrice de [BC] et le hauteur issue de A sont confondues.

III. — Théorème de Pythagore

Théorème 21. — Théorème de Pythagore

Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Exemple 22. On considère un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 3 cm et AC = 4 cm. Calculer la longueur de [BC] en cm.

Remarque 23. La version contraposée du sens direct du théorème de Pythagore permet d'affirmer que si, dans un triangle ABC, $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$ alors ABC n'est pas rectangle en B.

Exemple 24.

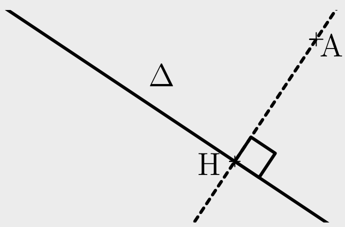
1. Un triangle ABC tel que AB = 6 cm, AC = 9 cm et BC = 11 cm est-il rectangle en A ?
2. Même question si AB = 6 cm, AC = 8 cm et BC = 10 cm.

Propriété 25

Soit ABC un triangle rectangle en A. Alors, BC > AB et BC > AC. Autrement dit, dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand des côtés.

Propriété 26

Étant donné une droite Δ et un point A, le point de Δ le plus proche de A est le point H, intersection de Δ et de la perpendiculaire à Δ passant par A.



IV. — Exercices

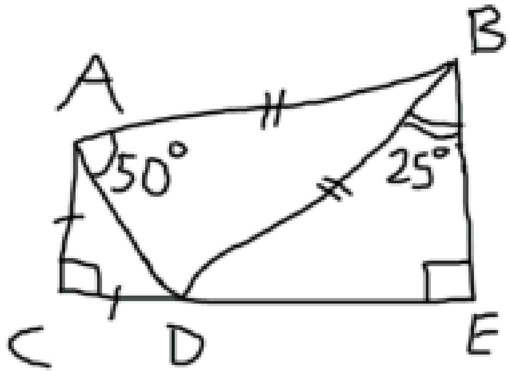
1) Généralités

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, si cela est possible, construire à la règle graduée et au compas, le triangle ABC.

1. AB = 7 cm, AC = 6 cm et BC = 3 cm ;
2. AB = 7 cm, AC = 5 cm et BC = 10 cm ;
3. AB = 3 cm, AC = 9 cm et BC = 5 cm ;

Exercice 2. Un triangle isocèle possède un angle de 100°. Déterminer la mesure en degré des deux autres angles.

Exercice 3 (CRPE – Groupement 1 – 2018)**.** On considère la figure ci-dessous.



Les points C, D et E sont-ils alignés ?

Exercice 4. Dans un triangle ABC, le côté AB mesure 10 cm, le côté AC mesure 17 cm et le côté BC mesure 21 cm. On sait, de plus, que la hauteur associée à [BC] mesure 8 cm.

1. Calculer, en cm^2, l'aire de ABC.
2. Déterminer les longueurs des hauteurs issues de B et de C.

Exercice 5 (CRPE – Groupement 1 – 2017)**.** On considère un triangle ABC dont l'aire est égale à 18 cm^2 et tel que AB mesure 7,3 cm, AC mesure 7,5 cm et BC mesure 5,2 cm. On note H le pied de la hauteur issue de B.

Déterminer la longueur, en mm, du segment BH.

Exercice 6. On considère un segment [AB] et un point C n'appartemant pas (AB). On appelle Δ la droite parallèle à (AB) passant par C. Étant donné un point D sur Δ, comparer les aires des triangles ABC et ABD.

2) Hauteurs et médiatrices

Exercice 7.

1. Construire à la règle graduée et au compas un triangle ABC tel que AB = 4 cm, AC = 6 cm et BC = 8 cm.
2. En utilisant le compas et la règle non graduée, construire le cercle circonscrit à ABC.

Exercice 8. On considère un segment [AB] tel que AB = 9 cm. On dispose d'un compas bloqué donc l'ouverture ne permet que de tracer des cercles de 3 cm de rayon.

Comment tracer la médiatrice de [AB] à l'aide de ce compas bloqué ?

Exercice 9. Dans chaque cas suivant, construire, à la règle graduée et au compas, le triangle ABC à l'aide des informations données.

1. AB = 10 cm, la hauteur issue de A mesure 3 cm, celle issue de B mesure 4 cm et [AB] est le plus grand côté du triangle.
2. ABC est isocèle en C, AB mesure 8 cm et la hauteur issue de A mesure 7 cm.
3. AB = 10 cm, la hauteur issue de A mesure 6 cm, celle issue de C mesure 3 cm et [AB] est le plus grand côté du triangle.

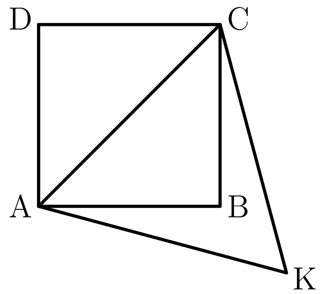
Exercice 10. Étant donné une droite Δ et un point A, construire à la règle et au compas la perpendiculaire à Δ passant par A.

Exercice 11 (CRPE – Antilles – 1993)**.**

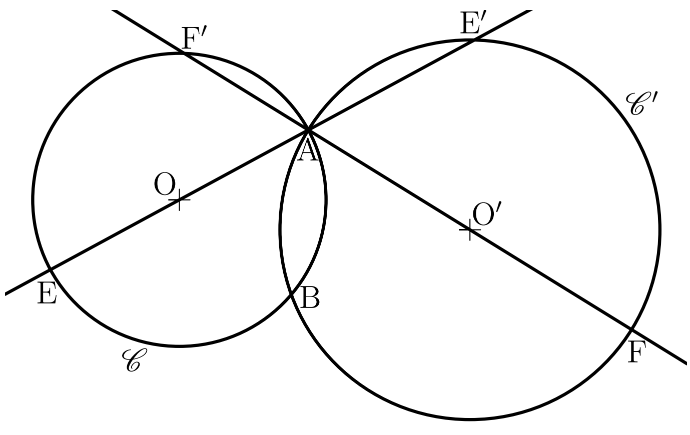
1. Construire à la règle graduée et au compas un triangle ABC tel que BC = 105 mm, AC = 75 mm et AB = 45 mm.
2. Construire à la règle non graduée et au compas le cercle de diamètre [AC].
3. Construire à la règle non graduée seule les trois hauteurs du triangle ABC.

Exercice 12. Soit ABC un triangle non aplati. On note J le pied de la hauteur issue de C et K le pied de la hauteur issue de A. Montrer qu'il existe un cercle $\mathscr{C}$ passant par les points A, B, J et K.

Exercice 13. Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré et AKC est un triangle équilatéral.
Montrer que les points K, B et D sont alignés.



Exercice 14. Sur la figure ci-dessous, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles de centres respectifs O et O′ qui sont sécants en deux points A et B. On note E le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à A, F le point de $\mathscr{C}'$ diamétralement opposé à A, E′ le point d'intersection de (AE) avec $\mathscr{C}'$ et F′ le point d'intersection de (AF) avec $\mathscr{C}$.



1. Montrer que le point E, B et F sont alignés.
2. Montrer que les droites (EF′), (AB) et (FE′) sont concourantes.

Exercice 15. On considère un carré ABCD. On note E le milieu de [CD] et F le point d'intersection de la (AE) avec la perpendiculaire à (AE) passant par B.

1. Faire une figure.
2. On note I le milieu de [AB]. Montrer que (CI) est la médiatrice de [BF]
3. Conclure que les triangles BCF et DCF sont isocèles.

3) Théorème de Pythagore

Exercice 16. Dans chacun des cas suivants, déterminer si le triangle ABC est rectangle.

1. $\mathrm{AB} = 3$, $\mathrm{BC} = 5$ et $\mathrm{AC} = 6$.

2. $\mathrm{AB} = 2\sqrt{3}$, $\mathrm{BC} = 2\sqrt{6}$ et $\mathrm{AC} = 6$.

Exercice 17. On considère un triangle ABC isocèle en A tel que AB mesure 17 cm et BC mesure 16 cm. Déterminer l'aire, en cm^2, de ABC.

Exercice 18.

1. Montrer que la diagonale d'un carré de coté a est $a\sqrt{2}$.

2. Montrer que la hauteur d'un triangle équilatéral est $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 19 (d'après CRPE – Groupement 1 – 2016)**.** On considère un triangle ABC tel que $\mathrm{AB} = 65$ cm, $\mathrm{AC} = 56$ cm et $\mathrm{BC} = 33$ cm. On note R un point de [AB] distinct de A et B. La perpendiculaire à [AC] passant par R coupe [AC] en S.

1. Faire une figure à l'échelle 1/10.

2. Montrer que les droites (BC) et (RS) sont parallèles.

Exercice 20. On considère un triangle ABC rectangle en A tel que AB mesure 3 cm et AC mesure 5 cm. On note H le pied de la hauteur issue de A.

Déterminer la longueur AH.

Exercice 21. En utilisant un compas et une règle graduée, comment construire de façon exacte un segment de longueur $\sqrt{5}$ cm ?

Exercice 22 (CRPE – Besançon – 2005)**.** Soit a, b et c trois entiers tels que $c \geqslant b \geqslant c > 0$. On suppose que a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle rectangle. Montrer que l'un au moins de ce ces trois nombres est pair.

Exercice 23 (d'après CRPE – Groupement 3 – 2016)**.** On considère trois points A, B et C tels que $\mathrm{AB} = 8$ cm, $\mathrm{AC} = 6$ cm et les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

On place un point D sur [AB] distinct de A et de B, on note E le point d'intersection de la perpendiculaire à [AB] passant par D avec [BC] et F le point d'intersection de la perpendiculaire à [AC] passant par E avec [AC].

Le but de l'exercice est de déterminer la distance DF est minimale lorsque D varie sur [AB].

1. Faire une figure.

2. Calculer la longueur BC.

3. Justifier que $\mathrm{AE} = \mathrm{DF}$.

4. Déterminer la position du point E tel que AE soit minimale.
On suppose désormais que E est dans cette position.

5. En calculant l'aire de ABC de deux façons différentes, déterminer la longueur AE et en déduire la longueur DF minimale.

Exercice 24 (d'après CRPE – Groupement 1 – 2017)**.** Une entreprise de BTP est mandatée pour étudier la faisabilité de la réalisation d ?une portion d'autoroute et d'un nouvel échangeur dans la région de Bordeaux/Brive-la-Gaillarde/Montauban.

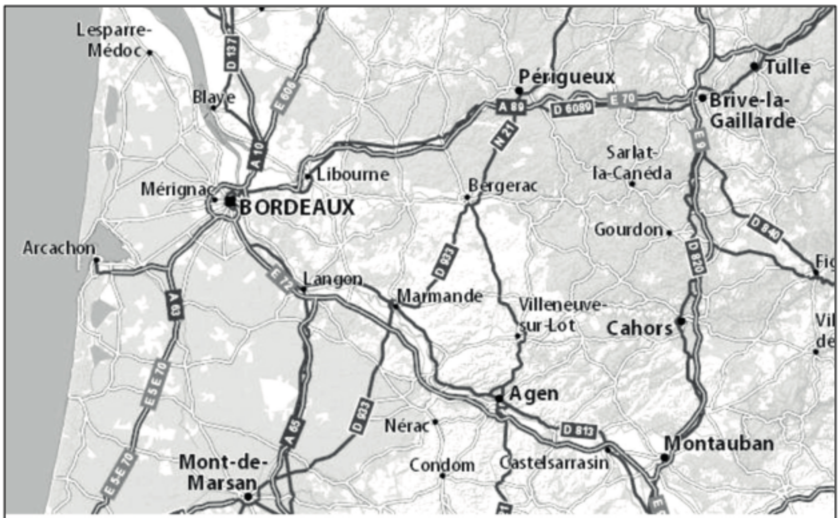


Figure 1 : Source = http://www.viamichelin.fr/

1. À vol d'oiseau, il y a 204,4 km entre Brive-la-Gaillarde et Bordeaux, 210 km entre Bordeaux et Montauban et 145,6 km entre Montauban et Brive-la-Gaillarde. On admet que cette situation géographique est modélisée par un triangle ABC, construit à une certaine échelle, dans lequel A représente Bordeaux, B représente Brive-la-Gaillarde et C représente Montauban.

   Dans ce triangle, la longueur AB est 7,3 cm.

   a. Montrer que la longueur AC est 7,5 cm et que la longueur BC est 5,2 cm.

   b. Construire le triangle ABC.

   c. Déterminer l'échelle utilisée pour modéliser la situation.

2. Dans le cadre d'un projet d'extension, la société d'exploitation mandate une entreprise de BTP pour étudier la construction d'une portion d'autoroute reliant Brive-la-Gaillarde et l'autoroute entre Bordeaux et Montauban. On cherche à construire la portion d'autoroute la plus courte possible.

   Sur la figure construite précédemment, on note D le point du segment [AC] tel que la distance BD soit la plus courte possible. Le point D représente l'emplacement de l'échangeur à construire.

   a. Placer le point D sur la figure et indiquer ce que représente la droite (BD) dans le triangle ABC.

   b. Un théorème, appelé théorème d'Al Kashi, permet d'établir l'égalité suivante, que l'on admettra :
   $$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AC \times AD.$$
   En utilisant cette égalité, montrer que AD = 5,5 cm.

   c. En déduire les longueurs CD et BD.