⧫ Chapitre 1. Numération et divisibilité

I. — Écriture des nombres entiers naturels

1) Différentes numérations

Il existe des méthodes de comptage très anciennes et probablement antérieures à l'invention de l'écriture. Ainsi, une façon de compter les moutons d'un troupeau pour savoir s'il n'en manque pas est de disposer d'un sac contenant autant de cailloux que de moutons et, lorsqu'on rentre le troupeau, enlever un caillou du sac à chaque fois qu'un mouton rentre. Si, à la fin, la sac est vide alors le troupeau est au complet. À ce propos, on remarquera que le mot français « calcul » vient du latin *calculus* qui signifie caillou.

Cependant, cette façon rudimentaire de compter (ou de dénombrer) est très limitée (un sac de cailloux ne pouvant dénombrer qu'un ensemble déterminé) et le besoin de communiquer va faire émerger des systèmes de représentation des nombres utilisés pour compter : c'est le concept de numération. Une **numération** est un code permettant de représenter un nombre. Ce code peut aussi bien être gestuel, oral ou écrit. Au cours des siècles, il a existé différents types de numération avant que ne s'impose le système que nous utilisons aujourd'hui. Une numération est composée de symboles et de règles permettant d'agencer ces symboles.

Les numérations les plus anciennes consistaient simplement à faire, par exemple sur un morceau de bois, une encoche pour *un*, deux encoches pour *deux*, trois encoches pour *trois*, et ainsi de suite. Dans cette numération, il n'y a qu'un symbole (l'encoche) et la seul règle et que le nombre d'encoches correspond au nombre désigné. Ce système est peu efficace car, d'une part, il devient vite difficile à utiliser (faire 100 encoches pour représenter le nombre *cent* est très long) et peu lisible (on ne peut pas, par un simple regard reconnaître un nombre supérieur à 8 ou 10).

L'idée est donc apparu de regrouper les nombres par « paquets » et d'utiliser de nouveaux symboles pour désigner ces « paquets » : c'est le notion de **base de numération**. Cette base, qui correspond à la « taille des paquets » est généralement liée au corps humain : la plus fréquente est la base 10 (comme les 10 doigts des mains) mais on trouve aussi la base 20 (comme les 20 doigts des pieds et des mains). D'autres raisons, calculatoires notamment, ont pu conduire à utiliser d'autres bases, comme la base 60 par les Babyloniens.

Concernant les règles d'agencement des symboles, on distingue deux grands familles

- les **numérations additionnelles** : dans ce type de numération, pour déterminer un nombre désigné par un agencement de symboles, on ajoute simplement la valeur de ces symboles, sans se soucier de la place de ceux-ci.

  Par exemple, dans la numération égyptienne, qui est une numération de base 10, on dispose du symbole | (bâton) qui représente le nombre 1 et du symbole ∩ (pont) qui représente le nombre 10 (donc un groupement de 10 bâtons). Dans cette numération, le nombre 32 peut aussi bien s'écrire ∩∩∩|| que ∩|∩|∩.

  Même s'il existe certaines subtilités, les numérations romaine et grecque sont également des numérations additionnelles de base 10.

  On remarquera que les numérations additionnelles ne nécessite pas d'utiliser un symbole représentant 0.

- les **numérations positionnelles** : dans ce type de numération, pour déterminer un nombre désigné par un agencement de symboles, il faut tenir compte de la valeur de ces symboles mais également de leur position. La numération moderne que nous utilisons est une numération positionnelle de base 10 (ou décimale). Cela signifie que lorsqu'on écrit 132 ou 321, le symbole 3 n'a pas la même valeur. Dans le premier cas,

$132 = 100 + 3 \times 10 + 2$ donc 3 représente trois dizaines c'est-à-dire 30 alors que, dans le second cas, $321 = 3 \times 100 + 2 \times 10 + 1$ donc 3 représente trois centaines c'est-à-dire 300.

Les Mayas utilisaient une numération positionnelle de base 20 et les Babyloniens une numération positionnelle de base 60 (avec cependant une part de notation additionnelle pour les nombres inférieurs à la base, ce qui en fait des numérations hybrides). Les Chinois utilisent également une numération décimale hybride avec des symboles pour les nombres de 1 à 9 et des symboles pour les puissances de 10.

On remarquera que les numérations positionnelles nécessitent d'utiliser un symbole représentant 0. D'ailleurs, les Babyloniens, qui ne disposaient pas d'un tel symbole, laissaient un espace vide en guise de 0.

2) Écriture d'un entier naturel dans une base quelconque

Les premiers nombres ont été utilisés pour compter. Il s'agit des **nombres entiers naturels** : 1, 2, 3,... Le nombre 0, dont l'introduction est bien plus tardive, fait également partie des entiers naturels.

Comme on l'a dit précédemment, dans notre écriture positionnelle décimale, 7 916 signifie $7 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 1 \times 10 + 6$. Ainsi, cette écriture revient à décomposer l'entier naturel 7 916 en fonction des puissances de 10. Comme on l'a vu précédemment, cette décomposition, qui nous semble naturelle, n'a pas était la seule dans l'histoire et certaines civilisations ont compté en base 20 ou en base 60 c'est-à-dire en décomposant les entiers selon les puissances de 20 ou de 60.

De manière générale, on a le résultat suivant.

Propriété 1

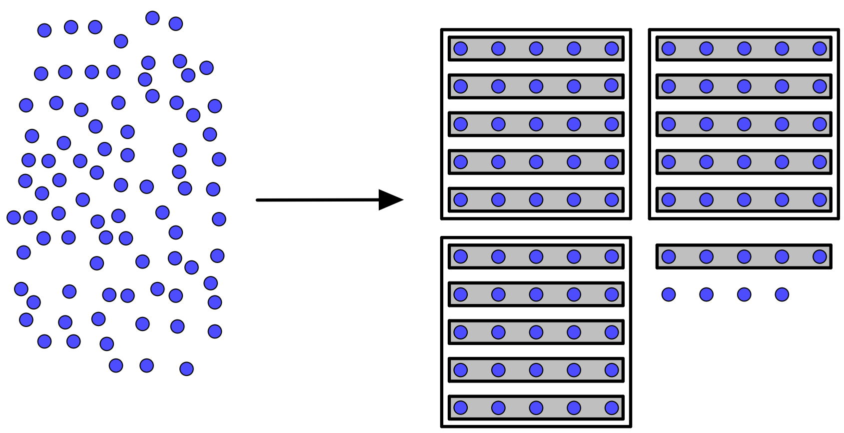
Soit b un entier naturel au moins égal à 2. Tout entier naturel non nul N s'écrit de manière unique sous la forme

$$N = c_k \times b^k + c_{k-1} \times b^{n-1} + \cdots + c_1 \times b + c_0$$

où k est un entier naturel et les nombres c_0, c_1, ..., c_k sont des entiers compris entre 0 et $b - 1$ avec $c_k \neq 0$.

Ainsi, par exemple, on peut écrire

$$84 = 3 \times 5^2 + 1 \times 5 + 4$$



Définition 2

L'écriture de l'entier N définie dans la propriété précédent s'appelle l'écriture en base b de N. En abrégé, on la notera

$$\overline{c_k c_{k-1} \cdots c_1 c_0}^b.$$

Les nombres c_0, c_1, ..., c_k s'appellent les chiffres de N en base b.

Exemple 3. Ainsi, l'écriture de 84 en base 5 est $\overline{314}^5$.

Remarque 4.

1. La barre au-dessus de l'écriture en base b sert à différencier le nombre à trois chiffres $\overline{xyz}^b$ du produit xyz.
2. Quand la base est 10, s'il n'y a pas d'ambiguité, on omet de préciser la valeur de b (voire de mettre la barre – tout le monde s'accorde sur le fait que 153 désigne le nombre *cent-cinquante-trois*).
3. Les chiffres d'un entier dans l'écriture en base b sont, par définition, compris entre 0 et $b-1$. Si $b \leqslant 10$, on utilise les chiffres habituels (0, 1, 2, ...) mais si $b > 10$, il faut de nouveaux chiffres. Dans ce cas, on utilise soit des lettres (A correspondant à 10, B à 11, C à 12 et ainsi de suite) soit des groupes des chiffres entre parenthèses. Par exemple,
$$\overline{\text{B7D1}}^{14} = 11 \times 14^3 + 7 \times 14^2 + 13 \times 14 + 1 = 31\,739$$
et
$$\overline{(17)(03)(55)}^{60} = 17 \times 60^2 + 3 \times 60 + 55 = 3\,672\,235.$$
4. L'écriture en base 10 s'appelle aussi l'écriture décimale et l'écriture en base 2 s'appelle aussi l'écriture binaire.

Exemple 5. Déterminer les écritures décimales des nombres suivants :

$$a = \overline{10001100}^2 \qquad b = \overline{\text{F3D}}^{17} \qquad c = \overline{(10)(16)(32)}^{40}.$$

Obtenir l'écriture décimale d'un entier à partir de son écriture en base b est relativement simple, il suffit d'appliquer la définition. Inversement, étant donné un nombre écrit en écriture décimale, comment obtenir son écriture en base b ? Pour cela, nous allons avoir besoin de la division euclidienne.

3) Division euclidienne

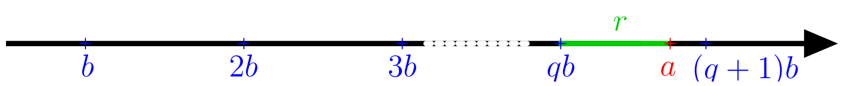
La division euclidienne est la division avec reste entier telle qu'on l'apprend à l'école primaire. Mathématiquement, elle s'appuie sur le théorème suivant.

Théorème 6

Soit a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$. Alors, il existe un unique entier naturel q et un unique entier naturel r tels que

$$a = bq + r \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant r < b.$$

Représentation graphique (lorsque $a > b$) :



Définition 7

L'écriture $a = bq + r$ avec q et r des entiers naturels tels que $r < b$ est appelée la division euclidienne de a par b. Le nombre a est appelé le dividende, le nombre b est appelé le diviseur, le nombre q est appelé le quotient et le nombre r est appelé le reste dans cette division.

Exemple 8. Effectuer la division euclidienne de 1 315 par 24.

Remarque 9. Si $0 \leqslant a < b$ alors $q = 0$ et $r = a$.

Méthode 10

Soit b un entier naturel au moins égal à 2 et N un entier naturel quelconque. Pour déterminer l'écriture en base b de N,

- on effectue la division euclidienne de N par b : on obtient un reste r_1 et un quotient q_1 ;
- si $q_1 \geqslant b$, on effectue la division euclidienne de q_1 par b : on obtient un reste r_2 et un quotient q_2 ;
- on réitère jusqu'à obtenir un quotient $q_k < b$.

L'écriture en base b de N est alors $\overline{q_k r_{k-1} \cdots r_1}^b$.

Exemple 11.

1. Déterminer l'écriture en base 9 de 745.

2. Déterminer l'écriture binaire de 27.

4) Exemples d'opérations en base quelconque

Les opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication) en base b se posent comme les opérations en base décimale mais en prenant garde au fait que les retenues entrent en jeu lorsqu'on atteint ou dépasse b et non plus lorsqu'on atteint ou dépasse 10.

Exemple 12. Poser et effectuer les opérations suivantes.

1. $\overline{101001}^2 + \overline{11011}^2$;

2. $\overline{101110101}^2 - \overline{11011}^2$;

3. $\overline{111}^2 \times \overline{101}^2$;

4. $\overline{1431}^6 + \overline{542}^6$;

5. $\overline{4251}^6 - \overline{335}^6$;

6. $\overline{27}^8 \times \overline{521}^8$.

II. — Diviseurs et multiples

1) Notion de divisibilité

Définition 13

Soit a et b deux nombres entiers naturels. On dit que b divise a s'il existe un entier naturel k tel que $a = k \times b$.

Dans ce cas, on dit aussi que a est un multiple de b et que b est un diviseur de a.

Exemple 14. Justifier les affirmations suivantes.

1. 4 divise 12.

2. 30 est un multiple de 6.

3. 1 divise n'importe quel entier naturel a.

4. Tout entier naturel b divise 0.

Remarque 15.

1. Le mot « divise » ne fait pas référence ici à une division. Ainsi, si on ne peut pas diviser par 0, on peut en revanche dire que 0 divise 0 car $0 = 2 \times 0$.

2. Si a et b sont deux entiers naturels tels que $b > 0$ alors b divise a si et seulement si le reste dans la division euclidienne de a par b est 0.

Exemple 16. Déterminer tous les diviseurs de 35.

Remarque 17. Si a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que $a \leqslant 10b$ et $b \leqslant 10$ alors dire que b divise a signifie que a est dans la table de multiplication de b.

$1 \times 1 = 1$	$2 \times 1 = 2$	$3 \times 1 = 3$	$4 \times 1 = 4$	$5 \times 1 = 5$
$1 \times 2 = 2$	$2 \times 2 = 4$	$3 \times 2 = 6$	$4 \times 2 = 8$	$5 \times 2 = 10$
$1 \times 3 = 3$	$2 \times 3 = 6$	$3 \times 3 = 9$	$4 \times 3 = 12$	$5 \times 3 = 15$
$1 \times 4 = 4$	$2 \times 4 = 8$	$3 \times 4 = 12$	$4 \times 4 = 16$	$5 \times 4 = 20$
$1 \times 5 = 5$	$2 \times 5 = 10$	$3 \times 5 = 15$	$4 \times 5 = 20$	$5 \times 5 = 25$
$1 \times 6 = 6$	$2 \times 6 = 12$	$3 \times 6 = 18$	$4 \times 6 = 24$	$5 \times 6 = 30$
$1 \times 7 = 7$	$2 \times 7 = 14$	$3 \times 7 = 21$	$4 \times 7 = 28$	$5 \times 7 = 35$
$1 \times 8 = 8$	$2 \times 8 = 16$	$3 \times 8 = 24$	$4 \times 8 = 32$	$5 \times 8 = 40$
$1 \times 9 = 9$	$2 \times 9 = 18$	$3 \times 9 = 27$	$4 \times 9 = 36$	$5 \times 9 = 45$
$1 \times 10 = 10$	$2 \times 10 = 20$	$3 \times 10 = 30$	$4 \times 10 = 40$	$5 \times 10 = 50$
$6 \times 1 = 6$	$7 \times 1 = 7$	$8 \times 1 = 8$	$9 \times 1 = 9$	$10 \times 1 = 10$
$6 \times 2 = 12$	$7 \times 2 = 14$	$8 \times 2 = 16$	$9 \times 2 = 18$	$10 \times 2 = 20$
$6 \times 3 = 18$	$7 \times 3 = 21$	$8 \times 3 = 24$	$9 \times 3 = 27$	$10 \times 3 = 30$
$6 \times 4 = 24$	$7 \times 4 = 28$	$8 \times 4 = 32$	$9 \times 4 = 36$	$10 \times 4 = 40$
$6 \times 5 = 30$	$7 \times 5 = 35$	$8 \times 5 = 40$	$9 \times 5 = 45$	$10 \times 5 = 50$
$6 \times 6 = 36$	$7 \times 6 = 42$	$8 \times 6 = 48$	$9 \times 6 = 54$	$10 \times 6 = 60$
$6 \times 7 = 42$	$7 \times 7 = 49$	$8 \times 7 = 56$	$9 \times 7 = 63$	$10 \times 7 = 70$
$6 \times 8 = 48$	$7 \times 8 = 56$	$8 \times 8 = 64$	$9 \times 8 = 72$	$10 \times 8 = 80$
$6 \times 9 = 54$	$7 \times 9 = 63$	$8 \times 9 = 72$	$9 \times 9 = 81$	$10 \times 9 = 90$
$6 \times 10 = 60$	$7 \times 10 = 70$	$8 \times 10 = 80$	$9 \times 10 = 90$	$10 \times 10 = 100$

Propriété 18

Soit a, b et n des entiers naturels. On suppose que a est divisible par n. Alors, $a + b$ est divisible par n si et seulement si b est divisible par n.

Exemple 19. On considère un nombre N dont l'écriture en base 8 est de la forme $N = \overline{abcd}^{8}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que N soit divisible par 4.

2) Nombres pairs et nombres impairs

Définition 20

Soit n un entier naturel. On dit que :

1. n est pair si n est un multiple de 2 ;
2. n est impair si $n-1$ est pair.

Exemple 21. Justifier les affirmations suivantes.

1. Le nombre 6 est pair.
2. Le nombre 0 est pair.
3. Le nombre 198 est pair.
4. Le nombre 1 est impair.
5. Le nombre 7 est impair.
6. Le nombre 19 est impair.

Propriété 22

1. Un entier naturel n est pair si et seulement s'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$.
2. Un entier naturel n est impair si et seulement s'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$.

Remarque 23. Le fait pour un entier n d'être pair ou impair s'appelle la parité de n.

Exemple 24. Soit a et b deux entiers. Étudier la parité de $a + b$ en fonction de celles de a et b.

Propriété 25

Soit n un entier. Alors, n et n^2 ont la même parité.

3) Critères de divisibilité en base 10

Propriété 26

On considère un entier N écrit en base 10.

1. N est divisible par 2 si et seulement si son chiffre des unités est pair.
2. N est divisible par 3 (resp. par 9) si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (resp. par 9).
3. N est divisible par 4 si et seulement si l'entier formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
4. N est divisible par 5 si et seulement si son dernier chiffre est 0 ou 5.
5. N est divisible par 10 si et seulement si son dernier chiffre est 0.

Exemple 27. Étudier la divisibilité par 2, 3, 4, 5, 9 et 10 des nombres suivants :

$$A = 123 \qquad B = 720 \qquad C = 91 \qquad D = 135 \qquad E = 140.$$

III. — Exercices

1) Bases de numération

Exercice 1. On considère une nombre N écrit en base 10. Déterminer N sachant que

1. le chiffre des unités de N est 3 ;
2. le nombre de centaines de N est 247 ;
3. le chiffre des dizaines de N est 2.

Exercice 2. Écrire en base 10 les nombres suivants (sachant que pour les bases supérieures à 10, on utilise la lettre A pour désigner 10, la lettre B pour 11, etc.)

$$N = \overline{10011101}^{2} \qquad M = \overline{1\mathrm{BD}5}^{17} \qquad P = \overline{1234}^{7} \qquad Q = \overline{\mathrm{BCDE}}^{16}$$

Exercice 3. Déterminer l'écriture du nombre 12 345 en base 7, en base 11 et en base 20.

Exercice 4 (CRPE – Montpellier – 1998)**.** En base sexagésimale,

$$\overline{(2)(19)(51)}^{60} = 2 \times 60^2 + 19 \times 60 + 51.$$

1. Écrire en base 10 le nombre $\overline{(3)(0)(17)(48)}^{60}$.
2. Écrire en base 60 le nombre 54 325 432.

Exercice 5. Effectuer les calculs suivants en posant les opérations et sans utiliser la base 10.

$\overline{101}^{2} + \overline{100011}^{2}$	$\overline{123}^{7} + \overline{25}^{7}$;
$\overline{10010}^{2} - \overline{101}^{2}$;	$\overline{3412}^{5} - \overline{244}^{5}$;
$\overline{1011}^{2} \times \overline{1001}^{2}$;	$\overline{812}^{9} \times \overline{37}^{9}$.

Exercice 6 (CRPE – Toulouse – 1998)**.** Déterminer les nombres à 3 chiffres en écriture décimale qui ne sont pas des multiples de 10 et tels que

1. le chiffre des dizaines est quadruple de celui des unités ;
2. en retranchant 297 à ce nombre, on obtient le nombre écrit à l'envers (par exemple, si le nombre de départ est 721, on obtient 127).

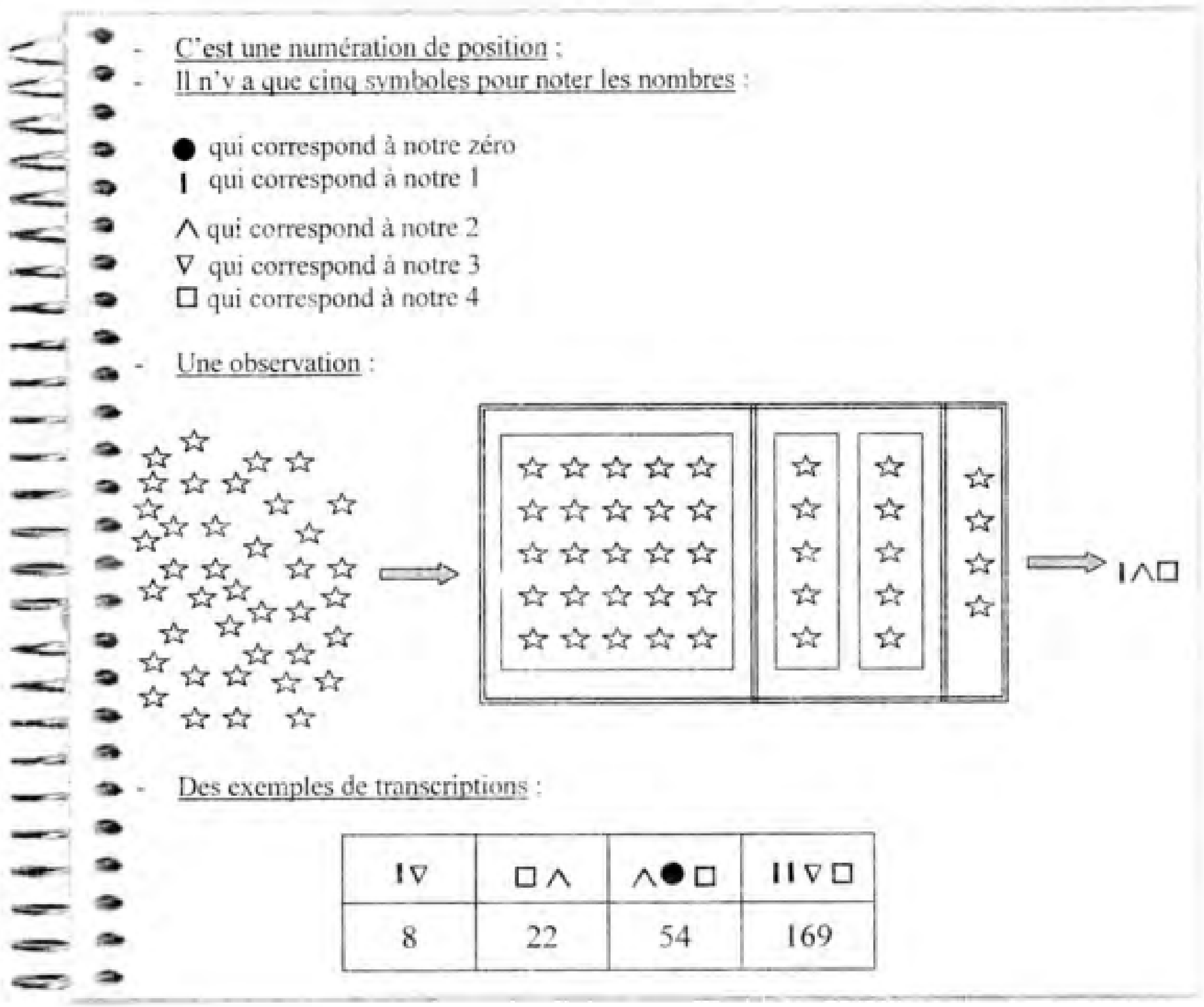
Exercice 7 (CRPE – Montpellier – 1997)**.**

1. Quelle est l'écriture, en base 10, du plus grand nombre qui s'écrive avec deux chiffres en base 8 ?
2. Quelle est l'écriture, en base 10, du plus grand nombre qui s'écrive avec deux chiffres en base 12 ?
3. Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1. En base n, le plus grand nombre qui s'écrive avec un seul chiffre est $n - 1$.
   - **a.** Déterminer le plus grand nombre qu'on peut écrire en base n avec deux chiffres.
   - **b.** Quel est le plus petit entier n pour lequel 224 (écrit en base 10) s'écrit en base n avec deux chiffres ?

Exercice 8 (CRPE – Créteil – 2000)**.** Soit A un nombre entier écrit en base 10.

1. Déterminer une condition nécessaire sur le chiffre des unités de A pour que A soit le carré d'un entier naturel. Cette condition est-elle suffisante ?
2. Déterminer une condition nécessaire sur le chiffre des unités de A pour que A soit le produit de deux entiers naturels consécutifs. Cette condition est-elle suffisante ?

Exercice 9 (CRPE – Lille – 2005)**.** Dans la tribu des Cincofiles, on a une manière particulière de compter. Lors d'un voyage dans cette tribu, un chercheur a ramené un certain nombre d'observations qu'il a retranscrites dans un carnet. Voici ce qu'il a noté sur la manière de compter des Cincofiles :



1. En expliquant votre démarche :
   a. transcrire dans notre système de numération le nombre noté par les Cincofiles « □□□ ».
   b. transcrire dans le système Cincofile le nombre que nous notons « 273 ».
2. Sans passer par une transcription dans notre système de numération décimale et en justifiant votre réponse, écrire en écriture Cincofile :
   a. le nombre qui précède le nombre « ∇□● » dans le système Cincofile ;
   b. le nombre qui suit le nombre « ∧□□ » dans le système Cincofile.

2) Division euclidienne

Exercice 10. Effectuer la division euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants.

1. $a = 1\,432$ et $b = 351$.
2. $a = 12\,025$ et $b = 11$.
3. $a = 124$ et $b = 999$.

Exercice 11 (CRPE – Créteil – 2004)**.** Sachant que $36\,202\,744 = 9\,658 \times 3\,748 + 4\,560$, donner le quotient de la division euclidienne de $36\,202\,744$ par $3\,748$.

Exercice 12 (CRPE – Bordeaux – 2000)**.** On considère deux entiers naturels a et a'. Dans la division euclidienne par 11, le reste de a est r et celui de a' est r'.

1. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $a + a'$ par 11.
2. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $3a$ par 11.

Exercice 13 (CRPE – Reims – 1997)**.** Vous comptez de 7 en 7, à partir de 38, jusqu'au plus grand nombre inférieur ou égal à 365.

1. Quel est le dernier nombre atteint ?
2. Combien y a-t-il de nombres atteints (38 y compris) ?
3. Par quels nombres peut-on remplacer 365 sans modifier les deux réponses précédentes ?

Exercice 14 (CRPE – Lyon – 1993)**.** Un enfant range toutes les petites voitures dont il dispose.
Il les met par rangées de 6 : il lui en reste 3.
Il les met par rangées de 5 : il n'en reste pas.

1. S'il les range par 3, en reste-t-il ? Justifier cette réponse.
2. S'il les range par 2, en reste-t-il ? Justifier cette réponse.
3. Quel peut être le nombre de voitures de cet enfant, sachant qu'il en a moins de 100 ?

3) Diviseurs et multiples

Exercice 15. Déterminer les diviseurs de 12, ceux de 75 et ceux de 121.

Exercice 16. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera chacune de ses réponses.

1. Si un entier est divisible par 3 alors il est divisible par 6.
2. Si un entier est divisible par 6 alors il est divisible par 3.
3. Si un entier n est divisible par 4 et par 6 alors il est divisible par 6×4.
4. Si un entier est un multiple pair de 5 alors son chiffre des unités (en base dix) est 0.
5. Si les trois derniers chiffres d'un nombre écrit en base 10 sont 1 (centaine), 2 (dizaines) et 5 (unités) alors ce nombre est divisible par 125.
6. Si les deux derniers chiffres d'un nombre écrit en base 10 sont 1 (dizaine) et 5 (unités) alors ce nombre est divisible par 15.

Exercice 17 (CRPE – Aix-Marseille – 2000)**.** Déterminer le nombre $a = \overline{mcdu}^{10}$ tel que $a > 7\,000$, a est divisible par 45, a est impair et le chiffre des milliers de a est le double de celui des centaines.

Exercice 18 (CRPE – Lyon – 1998)**.** Les multiples de 21 dont l'écriture décimale nécessite deux chiffres exactement sont : 21, 42, 63 et 84. Pour écrire cette liste, il faut 8 caractères d'imprimerie.

1. Combien en faut-il pour écrire la liste des multiples de 21 dont l'écriture décimale nécessite trois chiffres exactement ?

2. Même question avec cinq chiffres.

Exercice 19 (CRPE – Groupement 3 – 2019)**.**

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $30n + 25$ est divisible par 5.

2. Voici un programme de calcul :

choisir un nombre entier multiplier par 3 ajouter 5 élever au carré soustraire neuf fois le carré du nombre de départ

a. Montrer que si le nombre choisi au départ est 8 alors le résultat du programme est 265. On détaillera les calculs.

b. Quel résultat obtient-on si l'entier choisi au départ et -56 ?

c. Montrer que, quel que soit l'entier choisi au départ, le résultat du programme de calcul est divisible par 5.

Exercice 20 (CRPE – Créteil – 2004)**.** Un entier N a pour écriture décimale $\overline{72a83b}^{10}$. Sachant que N est divisible par 6 et par 45,

1. déterminer la valeur de b ;

2. déterminer N.

Exercice 21 (CRPE – Amiens – 2002)**.** Soit $N = \overline{mcdu}$ un nombre entier naturel écrit en base 10 pour lequel $m > c > d > u > 0$.

1. Quel est le plus petit entier N possible ?

2. Quel est le plus grand entier N possible ?

3. Dresser la liste des entiers N pour lesquels le chiffre des milliers est 6.

On note N' le nombre obtenu à partir de N en permutant le chiffre des unités avec celui des milliers et le chiffres des centaines avec celui des dizaines. On note de plus $D = N - N'$.

4. Exprimer D en fonction de m, c, d et u.

5. Montrer que D est un multiple de 9.

6. Quelle est la valeur maximale de D ? Pour quelle(s) valeur(s) de N, D est-il maximal ?

7. Quelle est la valeur minimale de D ? Pour quelle(s) valeur(s) de N, D est-il minimal ?

Exercice 22 (CRPE – Orléans-Tours – 1998).

1. Que vaut $\overline{132}^6$? Est-il multiple de 6 ? Est-il multiple de 2 ?
2. $\overline{324}^6$, $\overline{222}^6$, $\overline{550}^6$ sont-ils multiples de 6 ? Sont-ils multiples de 2 ?
3. Énoncer et montrer les critères de divisibilité par 6 et 2 pour un nombre de la forme $\overline{abc}^6$.
4. Montrer que $\overline{325}^6$, $\overline{212}^6$, $\overline{555}^6$ sont multiples de 5.
5. Énoncer et montrer le critère de divisibilité par 5 pour un nombre de la forme $\overline{abc}^6$.

Exercice 23 (CRPE – Groupement 1 – 2011). L'écriture en base 3 d'un nombre n positif est de la forme $\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$ où

— k est un entier naturel ;
— les termes a_0, a_1, ..., a_{k-1} et a_k sont compris entre 0 et 2 ;
— $a_k > 0$ sauf si $n = 0$ (auquel cas $k = 0$ et $a_0 = 0$) ;
— les termes a_0, a_1, ..., a_{k-1}, a_k sont alors appelés les chiffres de l'écriture en base 3 de n.

Toutes les réponses devront être justifiées.

1. **a.** Vérifier que l'écriture en base 3 du nombre 11 est $\overline{102}$.

   b. Quelle est l'écriture en base 3 du nombre 74 ?

   c. Que peut-on dire d'un nombre dont l'écriture en base 3 se termine par le chiffre « 0 » ?
2. On s'intéresse aux nombres entiers n dont aucun chiffre de l'écriture en base 3 ne prend la valeur 2. On appellera ces nombres des entiers 2-lacunaires. Par exemple, $12 = \overline{110}$ est 2-lacunaire alors que $19 = \overline{201}$ ne l'est pas.

   a. Déterminer le nombre d'entiers 2-lacunaires compris entre 0 et 100.

   b. À quelle condition nécessaire et suffisante un nombre 2-lacunaire possédant 4 chiffres en base 3 est-il divisible par 2 ?
3. On appelle nombres 1-lacunaires les nombres entiers n dont aucun chiffre de l'écriture en base 3 ne prend la valeur 1.

   a. Montrer que tout entier 1-lacunaire est le double d'un entier 2-lacunaire.

   b. Montrer que tout entier peut se décomposer comme la somme d'un entier 2-lacunaire et d'un entier 1-lacunaire.

   c. Montrer que cette décomposition n'est pas toujours unique.