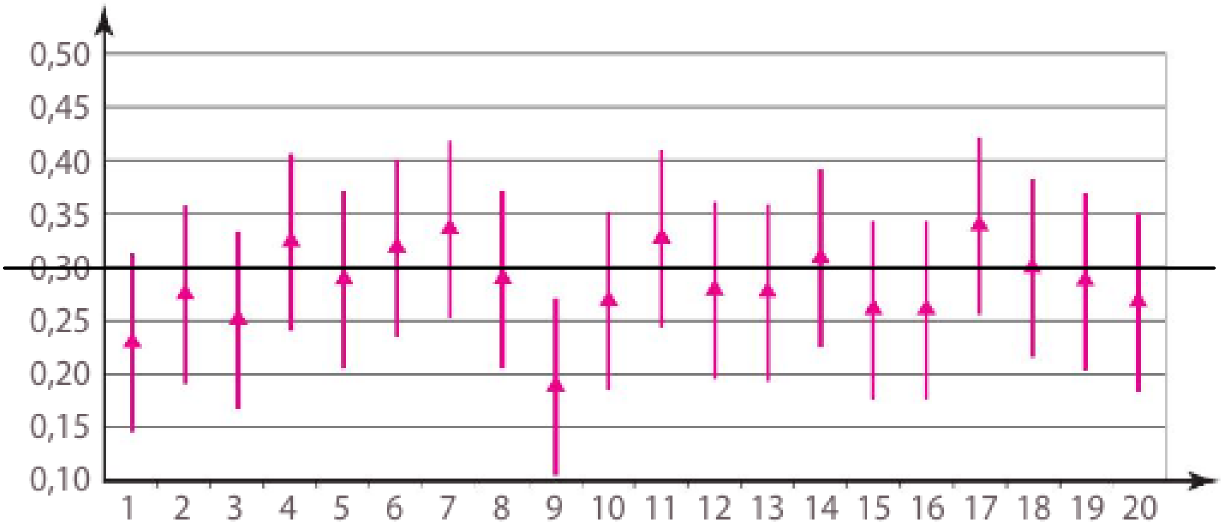
Estimation par intervalle de confiance
Corrigés

Exercice 1.

1. La proportion de poissons porteurs de parasites parmi les poissons péchés est $\frac{180}{900} = \frac{1}{5}$.
2. On a $\frac{180}{900} - \frac{1}{\sqrt{900}} = \frac{1}{6}$ et $\frac{180}{900} + \frac{1}{\sqrt{900}} = \frac{7}{30}$ donc un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% de la proportion de poissons porteurs de parasites dans ce lac est $\left[\frac{1}{6}\,;\frac{7}{30}\right]$ soit environ $[0{,}16\,;0{,}24]$.

Exercice 2.

1. Les nombres sur l'axe des abscisses représentent les numéros des simulations et les nombres sur l'axe des ordonnées représentent les fréquences (simulées) d'animaux infectés.
2. Les triangles sur les segments verticaux représentent les fréquences observées d'animaux infectés pour chaque simulation. Ces triangles se situent également au milieu de chaque intervalle.
3. Les intervalles de confiance diffèrent en raison de la fluctuation d'échantillonnage.
4. 

   D'après l'énoncé, la proportion de renards infectés est $30\% = 0{,}3$ donc on trace une droite horizontale passant en ordonnée par 0,3.
5. Parmi les 20 intervalles, seul 1 ne contient pas la fréquence de 0,3. Ainsi, le pourcentage d'intervalles de confiance qui ne contiennent pas la proportion de renards infectés est $\frac{1}{20} = 0{,}05 = 5\%$. Ceci était prévisible puisque les intervalles représentés sont des intervalles de confiance au niveau de confiance 95%.
6. Grâce au graphique, on peut estimer que l'amplitude des intervalles est environ 0,17. Ainsi, on a $\frac{2}{\sqrt{n}} \approx 0{,}17$ donc $\frac{1}{\sqrt{n}} \approx 0{,}085$. Dès lors, $\sqrt{n} \approx \frac{1}{0{,}085}$ donc $n \approx \left(\frac{1}{0{,}085}\right)^2$ c'est-à-dire $n \approx 140$.

Exercice 3.

1. **a.** La taille de l'échantillon est $n = 35$ et le nombre d'animaux possédant le caractère étudié dans l'échantillon est $m = 14$. Ainsi, la fréquence observée du caractère dans cet échantillon est $\frac{14}{35} = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

   b. On a $\frac{2}{5} - \frac{1}{\sqrt{35}} \approx 0{,}23$ et $\frac{2}{5} + \frac{1}{\sqrt{35}} \approx 0{,}57$ donc un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% de la proportion de lapin possédant le caractère dans l'ensemble de la population est $[0{,}23\,;0{,}57]$.

2. La taille de l'échantillon est $n = 100$ et le nombre d'animaux possédant le caractère étudié dans l'échantillon est $m = 40$. Ainsi, la fréquence observée du caractère dans cet échantillon est $\frac{40}{100} = 0{,}4$.
   On a $0{,}4 - \frac{1}{\sqrt{100}} \approx 0{,}3$ et $0{,}4 + \frac{1}{\sqrt{100}} \approx 0{,}5$ donc un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% de la proportion de lapin possédant le caractère dans l'ensemble de la population est $[0{,}3\,;0{,}5]$.

3. Sur les deux échantillons, on trouve les mêmes fréquences observées donc les résultats sont en accord.

Exercice 4.

1. La fréquence observée d'animaux marqués est $\frac{116}{400} = 0{,}29$. De plus, $0{,}29 - \frac{1}{\sqrt{400}} = 0{,}24$ et $0{,}29 + \frac{1}{\sqrt{400}} = 0{,}34$ donc un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% de la proportion p d'animaux marqués est $[0{,}24\,;0{,}34]$.

2. Comme $\frac{232}{0{,}34} \approx 680$ et $\frac{232}{0{,}24} \approx 970$, on peut estimer l'abondance de manchots empereurs sur l'île entre 680 et 970.

Exercice 5.

1. Comme la fréquence observée est $10\% = 0{,}1$ et que la marge d'erreur est d'au plus $3\% = 0{,}03$, un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% associé à cet échantillon est $[0{,}1 - 0{,}03\,;0{,}1 + 0{,}03]$ soit $[0{,}07\,;0{,}13]$.

2. On doit avoir $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}03$ donc $\sqrt{n} = \frac{1}{0{,}03}$ c'est-à-dire $n = \left(\frac{1}{0{,}03}\right)^2 \approx 1110$.

Exercice 6.

1. La fréquence observée de chatons porteurs du coryza dans cet échantillon est $\frac{25}{145} = \frac{5}{29} \approx 0{,}17$.

2. On a $\frac{5}{29} - \frac{1}{\sqrt{145}} \approx 0{,}08$ et $\frac{5}{29} + \frac{1}{\sqrt{145}} \approx 0{,}26$ donc un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% pour la proportion de chatons touchés par la maladie dans le département est $[0{,}08\,;0{,}26]$.

3. Pour avoir une marge d'erreur inférieure ou égale à 4%, il suffit de prendre un échantillon de taille n telle que $\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}04$ c'est-à-dire $\sqrt{n} \geqslant \frac{1}{0{,}04}$ soit $n \geqslant \left(\frac{1}{0{,}04}\right)^2 = 625$. Ainsi, il suffit de prendre un échantillon de taille au moins égale à 625.

Exercice 7. L'intervalle de confiance est ici $[0{,}08\,;0{,}15]$. L'amplitude de cet intervalle est $0{,}15 - 0{,}08 = 0{,}07$ donc, si on note n le taille de l'échantillon, on a $\frac{2}{\sqrt{n}} = 0{,}07$. Ainsi, $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}035$ donc $\sqrt{n} = \frac{1}{0{,}035}$ c'est-à-dire $n = \left(\frac{1}{0{,}035}\right)^2 \approx 816$.

Ainsi, l'étude se basait sur un échantillon d'environ 800 personnes.