Devoir commun de mathématiques

Sujet A

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Les élèves doivent traiter les 5 exercices.

Écrire lisiblement sur la première page de la copie : SUJET A

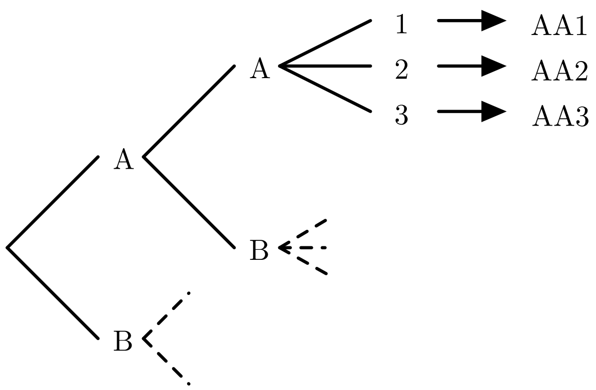
Exercice 1 (4 points). — Sur le graphique donné en annexe 1 (page 3), on a tracé les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g définies sur $[-2{,}5\,;2]$.

1. Déterminer graphiquement l'image de 0 par f puis par g.
2. Déterminer graphiquement les antécédents de 1 par f.
3. Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 3$ d'inconnue x.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[-2{,}5\,;2]$.
5. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ d'inconnue x.
6. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$ d'inconnue x.

Exercice 2 (4 points). — La porte d'entrée d'un immeuble est munie de cinq touches marquées des lettres A et B et des chiffres 1, 2 et 3. Le code qui déclenche l'ouverture de la porte est formé de deux lettres suivies d'un chiffre.

On choisit un code au hasard.

1. Recopier et compléter l'arbre suivant permettant d'obtenir tous les codes possibles.



2. Déterminer le nombre de codes différents possibles.
3. **a.** On note E l'évènement « le code comporte la lettre A exactement une fois ».

   Déterminer la probabilité de E.

   b. On note F l'évènement « le code comporte la lettre A exactement deux fois ».

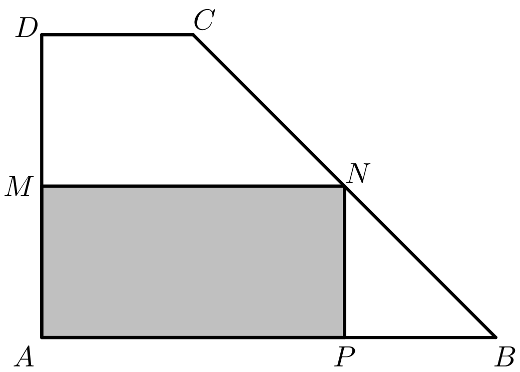
   Déterminer la probabilité de F.
4. On définit les évènements suivants :

   G : « le code contient la lettre A au moins une fois » ;
   H : « le code finit par un chiffre pair ».

   a. Calculer les probabilités des évènements G et H.

   b. Définir par une phrase l'évènement $G \cap H$ puis déterminer la probabilité de $G \cap H$.
5. En utilisant les probabilités calculées précédemment, calculer $P(\overline{G})$ et $P(G \cup H)$.

Exercice 3 (5 points). — Un exploitant agricole dispose d'une parcelle de forme trapézoïdale. Dans cette parcelle, il souhaite délimiter une zone rectangulaire. On modélise la parcelle par un trapèze rectangle $ABCD$ avec $AB = 60$ m, $CD = 20$ m et $AD = 40$ m.
On considère un point M mobile sur le segment $[AD]$ et on construit le rectangle $AMNP$ inscrit dans le trapèze $ABCD$ comme sur la figure ci-contre.
Soit x la longueur AM exprimée en mètres.



1. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour x. On note I cet ensemble dans la suite.
2. **a.** On admet que le triangle BNP est rectangle isocèle en P.
   Exprimer la longueur AP en fonction de x.
   b. En déduire que l'aire du rectangle $APNM$ est égale à $S(x) = 60x - x^2$ (forme 1).
   c. Justifier que, pour tout réel $x \in I$, on a $S(x) = 900 - (x - 30)^2$ (forme 2).
3. En utilisant la forme de $S(x)$ qui vous semble la mieux adaptée (forme 1 ou forme 2), répondre aux questions suivantes.
   a. Pour quelle(s) positions(s) de M l'aire de la surface grisée est-elle égale à 800 m^2 ?
   b. Pour quelle(s) position(s) de M l'aire de la surface grisée est-elle égale à l'aire du triangle PBN ?
4. Justifier que, pour tout $x \in I$, on a $S(x) \leqslant 900$ et préciser la valeur de x telle que $S(x) = 900$.

Exercice 4 (4 points). — On considère un triangle ABC quelconque.
On définit les points M, N et P par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

1. Sur la figure de l'annexe 2 (page 3), placer les points M, N et P.
2. Quelle est la nature du quadrilatère ACBP ? (On justifiera sa réponse.)
3. Montrer que $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
4. Exprimer, de même, $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
5. Déduire des questions précédentes que les droites (MN) et (CP) sont parallèles.

Exercice 5 (3 points). — Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples (Q.C.M.). Pour chacune des questions, on propose 4 réponses possibles dont une et une seule est exacte. Indiquer sur votre copie, pour chaque question, le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse que vous pensez exacte. Aucune justification n'est demandée. Donner une réponse fausse ou illisible, donner plusieurs réponses à une même question ou ne pas répondre à une question ne rapporte ni n'enlève de point pour cette question.

1. Pour tout réel x, $9x^2 - 4$ est égal à :

   a) $(3x-2)^2$ b) $(3x-2)(3x+2)$ c) $(9x-2)(9x+2)$ d) $9(x^2-4)$.

2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = 3 - x^2$. Le nombre 0 a pour antécédent(s) par f :

   a) 3 b) $\sqrt{3}$ c) 3 et -3 d) $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

3. Pour tous réels a et b, $a^3 + b^3$ est égal à :

   a) $(a+b)^3$ b) $(a+b)(a^2+b^2)$ c) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ d) $(a+b)(a^2+ab+b^2)$.

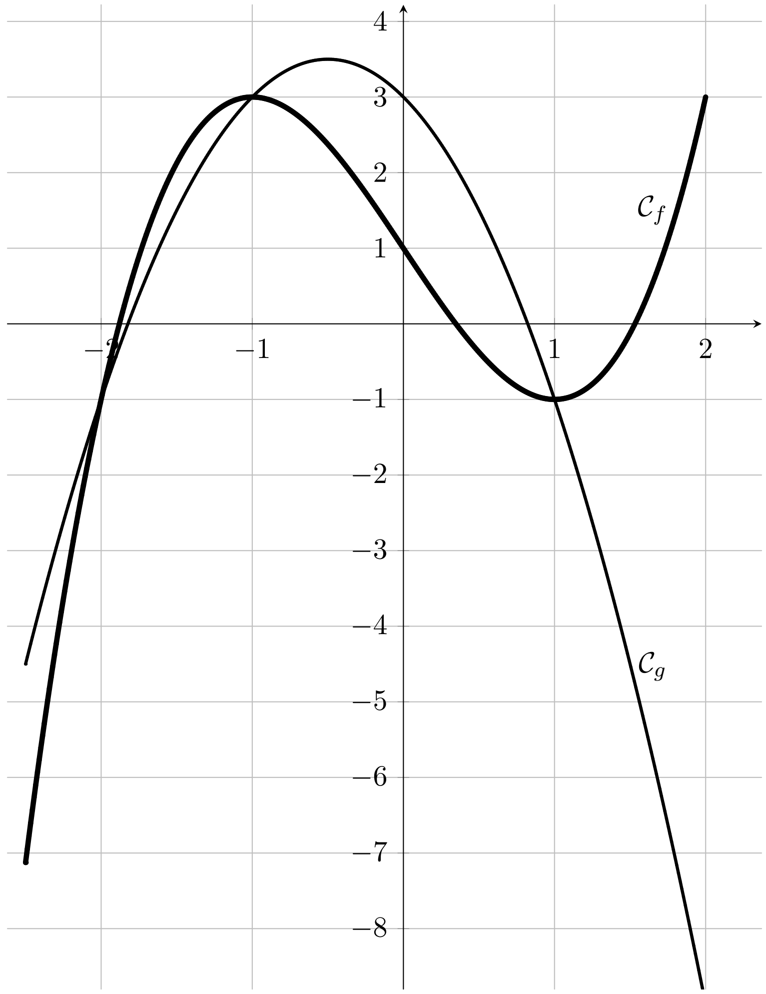
4. On considère le programme ci-contre écrit en Python.
   À la fin de l'exécution, la variable A vaut :

   a) 1 b) -3 c) 3 d) 2.

```
A=2
B=-1
if (A>=B):
  A=A-B
else:
  A=B-A
```

FEUILLE À RENDRE AVEC SA COPIE

Annexe 1



Annexe 2