# ⧫ Chapitre 2. — Calcul littéral

## I. — Transformer une expression algébrique

### 1) Développement

**Définition 1**

Développer une expression signifie transformer un produit en somme.

**Méthode 2**

Pour développer une expression, on utilise la distributivité si l'expression contient deux facteurs. Si elle contient plus de deux facteurs, on répète autant de fois que nécessaire la distributivité en prenant les facteurs deux par deux.

**Exemple 3.**

1. Développer $A(x) = 5x(3x - 2)$.
   On a
   $$A(x) = 5x \times (3x - 2) = 5x \times 3x - 5x \times 2 = 15x^2 - 10x$$

2. Développer $B(x) = (2x - 3)(-x + 4)$.
   On a
   $$B(x) = (2x - 3)(-x + 4) = 2x \times (-x) + 2x \times 4 - 3 \times (-x) - 3 \times 4 = -2x^2 + 9x - 12$$

Dans le second exemple, on a non seulement développé mais également rassembler les puissances identiques en une seule et ordonné de la plus grande puissance à la plus petite.

Cette forme s'appelle la forme développée, réduite et ordonnée de $B(x)$.

**Propriété 4. — Identités remarquables**

Pour tous réels $a$ et $b$,

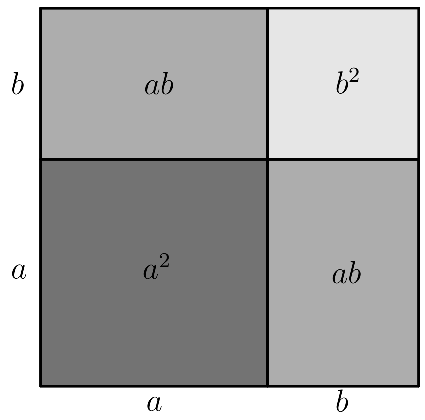
1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ;
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ;
3. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

*Démonstration.* Soit $a$ et $b$ deux réels.

1. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. $(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$.

□

L'égalité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ peut s'interpréter graphiquement de la manière suivante :




Le grand carré a une aire égale à $(a+b)^2$ et il est composé d'un carré d'aire $a^2$, d'un carré d'aire $b^2$ et de deux rectangles d'aire $ab$. Ainsi, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

**Exemple 5.**

1. Développer $A(x) = (3x+2)^2$.
   On a $A(x) = (3x)^2 + 2 \times (3x) \times 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$.
2. Développer $B(x) = (5-x)^2$.
   On a $B(x) = 5^2 - 2 \times 5 \times x + x^2 = x^2 - 10x + 25$.
3. Développer $C(x) = (x-0{,}5)(x+0{,}5)$.
   On a $C(x) = x^2 - 0{,}5^2 = x^2 - 0{,}25$.

## 2) Factorisation

**Définition 6**

Factoriser une expression signifie transformer une somme en produit.

**Méthode 7**

Pour développer une expression, on peut utiliser

- un facteur commun ;
- les identités remarquables ;
- combiner les deux méthodes précédentes.

**Exemple 8.**

1. Factoriser $A(x) = (x+1)(2x+3) + (x+1)(-5x-2)$.
   On reconnaît le facteur commun $x+1$ :

$$\begin{aligned} A(x) &= (x+1)(2x+3) + (x+1)(-5x-2) \\ &= (x+1)[(2x+3) + (-5x-2)] \\ &= (x+1)[2x+3-5x-2] \\ &= (x+1)(-3x+1) \end{aligned}$$

2. Factoriser $B(x) = x^2 + 6x + 9$.
On reconnaît une identité remarquable :
$$B(x) = x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2 = (x+3)^2$$
3. Factoriser $B(x) = 16 - 9x^2$.
On reconnaît une identité remarquable :
$$C(x) = 4^2 - (3x)^2 = (2-3x)(2+3x).$$
4. Factoriser $D(x) = x^2 - 1 - (x-1)(2-7x)$.
On reconnaît d'abord une identité remarquable : $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x-1)(x+1)$. On a donc $D(x) = (x-1)(x+1) - (x-1)(2-7x)$. De la sorte, on fait apparaître un facteur commun :
$$\begin{aligned} D(x) &= (x-1)(x+1) - (x-1)(2-7x) \\ &= (x-1)[(x+1) - (2-7x)] \\ &= (x-1)(x+1-2+7x) \\ &= (x-1)(8x-1) \end{aligned}$$

## 3) Réduction au même dénominateur

**Méthode 9**

Pour additionner deux expressions de la forme $\frac{A(x)}{B(x)}$ et $\frac{C(x)}{D(x)}$, il faut les réduire au même dénominateur.

**Exemple 10.**

1. Calculer $A(x) = \frac{3x+1}{x-1} - \frac{x+3}{x-5}$.
Ici, on obtient un dénominateur commun en multipliant numérateur et dénominateur de chaque fraction par le dénominateur de l'autre fraction :
$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{(3x+1)(x-5)}{(x-1)(x-5)} - \frac{(x+3)(x-1)}{(x-5)(x-1)} \\ &= \frac{3x^2 - 15x + x - 5 - (x^2 - x + 3x - 3)}{(x-1)(x-5)} \\ &= \frac{3x^2 - 14x - 5 - x^2 - 2x + 3}{x^2 - 5x - x + 5} \end{aligned}$$
i.e. $A(x) = \frac{2x^2 - 16x - 2}{x^2 - 6x + 5}$.
2. Calculer $B(x) = \frac{7x-3}{x} + \frac{2x-1}{x^3}$.
Ici, on obtient un dénominateur commun en multipliant numérateur et dénominateur de la première fraction par $x^2$ :
$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{(7x-3) \times x^2}{x \times x^2} + \frac{2x-1}{x^3} \\ &= \frac{7x^3 - 3x^2 + (2x-1)}{x^3} \end{aligned}$$
i.e. $B(x) = \frac{7x^3 - 3x^3 + 2x - 1}{x^3}$.

# II. — Puissances entières et racines carrées

## 1) Puissances entières

**Définition 11**

Soit $a$ un réel et $n$ un entier relatif.

1. Si $n > 0$ alors $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$.
2. $a^0 = 1$.
3. Si $n < 0$ et $a \neq 0$ alors $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

**Exemple 12.**

1. $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.
2. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

**Propriété 13**

Pour tout réel $a$ non nul et tous entiers relatifs $n$ et $m$ :

$$1)\ a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad 2)\ \frac{1}{a^n} = a^{-n} \qquad 3)\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad 4)\ (a^m)^n = a^{m\times n}.$$

**Propriété 14**

Pour tous réels $a$ et $b$ non nuls et pour tout entier relatif $n$,

$$1)\ a^n \times b^n = (a \times b)^n \qquad 2)\ \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad 3)\ 1^n = 1.$$

**Exemple 15.**

1. $a = \dfrac{5^2 \times 10^2}{5^3 \times 2^4} = \dfrac{5^2 \times (2 \times 5)^2}{5^3 \times 2^4} = \dfrac{5^2 \times 2^2 \times 5^2}{5^3 \times 2^4} = \dfrac{2^2 \times 5^4}{5^3 \times 2^4} = \dfrac{5}{2^2} = \dfrac{5}{4}$.
2. $b = 10^{-3} \times 10^5 \times 0,0001 = 10^{-3+5} \times 10^{-4} = 10^2 \times 10^{-4} = 10^{2-4} = 10^{-2} = 0{,}01$.
3. $c = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 4^{-2} = \dfrac{1^2}{2^2} \times \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{64}$.
4. $d = (0{,}2)^2 \times (0{,}4)^3 \times 10^4 = (2 \times 10^{-1})^2 \times (4 \times 10^{-1})^3 \times 10^4 = 2^2 \times 10^{-2} \times 4^3 \times 10^{-3} \times 10^4$ donc $d = 4 \times 64 \times 10^{-2-3+4} = 256 \times 10^{-1} = 25{,}6$.

**Exercice 16.** On considère deux réels $a$ et $b$ non nuls. Ecrire chacun des nombres suivants sous la forme $a^m b^n$ où $m$ et $n$ sont des entiers relatifs.

$$(a^2b)^{-3} \times (ab)^2 \qquad (ab^2)^{-1} \times (a^2b)^2 \qquad \frac{a^{-1}b^2}{a^{-2}b}.$$

**Solution**. — $(a^2b)^{-3} \times (ab)^2 = (a^2)^{-3} \times b^{-3} \times a^2 \times b^2 = a^{-6}a^2b^{-3}b^2 = a^{-4}b^{-1}$
$(ab^2)^{-1} \times (a^2b)^2 = a^{-1}(b^2)^{-1} \times (a^2)^2b^2 = a^{-1}b^{-2}a^4b^2 = a^{-1+4}b^{-2+2} = a^3b^0$.
$\dfrac{a^{-1}b^2}{a^{-2}b} = a^{-1}b^2 \times \dfrac{1}{a^{-2}} \times \dfrac{1}{b} = a^{-1}b^2a^2b^{-1} = a^{-1+2}b^{2-1} = a^1b^1$.

## 2) Racines carrées

**Définition 17**

Soit $a$ un réel positif ou nul. L'unique réel positif ou nul $r$ tel que $r^2 = a$ est appelé la racine carrée de $a$ et on le note $\sqrt{a}$.

**Exemple 18.**

1. $\sqrt{9} = 3$ car 3 est positif et $3^2 = 9$.
2. $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ car 0,5 est positif et $0{,}5^2 = 0{,}25$.
3. $\sqrt{0} = 0$ car 0 est positif ou nul et $0^2 = 0$.

**Propriété 19**

Soit $a$ et $b$ deux réels.

1. $\sqrt{a^2} = |a|$.
2. Si $a$ et $b$ sont positifs, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
3. Si $a \geqslant 0$ et $b > 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

*Démonstration.*

1. Si $a \geqslant 0$ alors $|a|^2 = a^2$ et si $a < 0$ alors $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$. Ainsi, $|a|$ est un nombre positif tel que $|a|^2 = a^2$ donc, par définition, $\sqrt{a^2} = |a|$.
2. Comme $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont positifs, $\sqrt{a}\sqrt{b}$ est positif. De plus, $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2\sqrt{b}^2 = ab$ donc, par définition, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
3. Comme $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont positifs, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est positif. De plus, $(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})^2 = \frac{\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}^2} = \frac{a}{b}$ donc, par définition, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

□

**Exemple 20.**

1. $\sqrt{36 \times 25} = \sqrt{36} \times \sqrt{25} = 6 \times 5 = 30$.
2. $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.
3. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$.