# ⧫ Chapitre 15. — Problèmes de géométrie

## I. — Géométrie du triangle

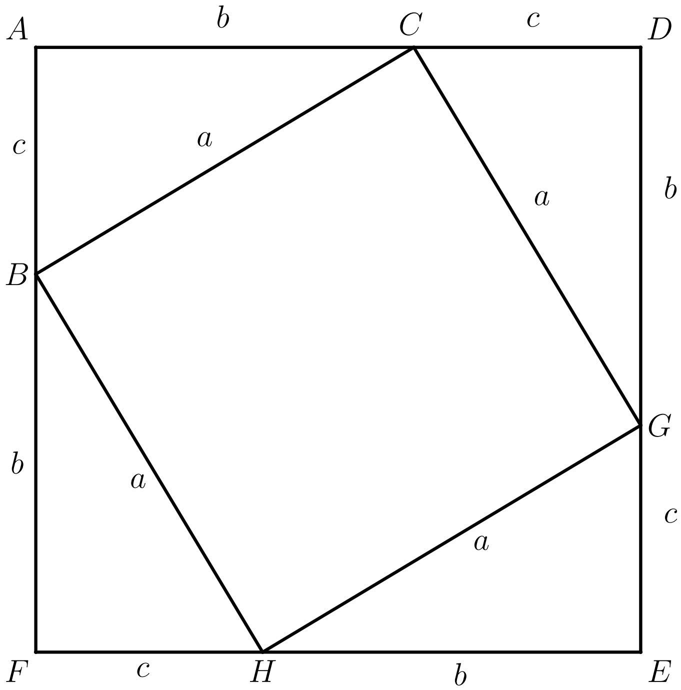
### 1) Théorème de Pythagore et conséquences

#### a) Le théorème de Pythagore

**Théorème 1. — Théorème de Pythagore**

Si $ABC$ est un triangle rectangle en $A$ alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

*Démonstration.* Supposons $ABC$ rectangle en $A$ et posons $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. Considérons le carré $ADEF$ formé en juxtaposant 4 exemplaires du triangle $ABC$ comme sur la figure ci-dessous.




Alors, le quadrilatère $BCGH$ est un carré car ses quatre côtés mesurent $a$ et

$$\widehat{HBC} = 180\text{ř} - \widehat{ABC} - \widehat{FBH} = 180\text{ř} - \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = \widehat{BAC} = 90\text{ř}$$

Ainsi, l'aire de $BCGH$ est $a^2$. Comme l'aire de chacun des triangles rectangles $ABC$, $CDG$, $GEH$ et $HFB$ est $\frac{bc}{2}$, on en déduit que l'aire de $ADEF$ est $a^2 + 4 \times \frac{bc}{2} = a^2 + 2bc$. Mais, d'autre part, $ADEF$ est un carré de côté $b + c$ donc son aire est $(b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$. On en déduit que $a^2 + 2bc = b^2 + 2bc + c^2$ donc $a^2 = b^2 + c^2$ □

**Exemple 2.** Une unité étant fixée, si $ABC$ est un triangle rectangle en $A$ tel que $AB = 3$ et $AC = 4$ alors, par le théorème de Pythagore, $BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ donc, comme $BC > 0$, $BC = 5$.

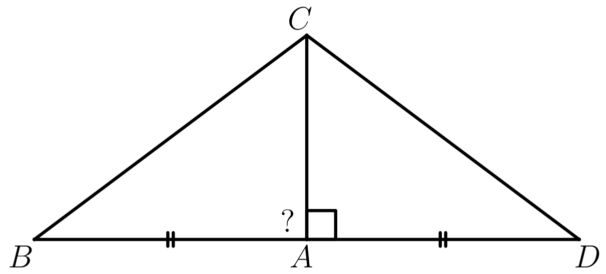
*Remarque* 3. La version contraposée du théorème de Pythagore permet d'affirmer que si, dans un triangle $ABC$, $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$ alors $ABC$ n'est pas rectangle en $B$.

**Exemple 4.** Une unité étant fixée, si $ABC$ est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 9$ et $BC = 11$ alors $AB^2 + AC^2 = 36 + 81 = 117$ et $BC^2 = 121$ donc $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ et ainsi, par la contraposée du théorème de Pythagore, $ABC$ n'est pas rectangle en $A$.

**Théorème 5. — Réciproque du théorème de Pythagore**

Si $ABC$ est un triangle tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors $ABC$ est rectangle en $A$.

*Démonstration.* Soit $ABC$ un triangle tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Considérons alors un point $D$ extérieur à $ABC$ tel que $ADC$ soit rectangle en $A$ et $AD = AB$




Alors, d'après le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle $ADC$, $DC^2 = AD^2 + AC^2$ et, comme $AD = AB$, $DC^2 = AB^2 + AC^2$. Dès lors, comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, $DC^2 = BC^2$ donc, comme $BC > 0$ et $DC > 0$, $BC = DC$. Ainsi, les triangles $ABC$ et $ADC$ ont mêmes mesures ($AB = AD$, $AC = AC$ et $BC = DC$) : ils sont donc superposables et, en particulier, $\widehat{BAC} = \widehat{DAC} = 90$ř donc $ABC$ est rectangle en $A$. □

**Exemple 6.** Une unité étant choisie, on considère un triangle $ABC$ tel que $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 10$. Alors, $AB^2 + AC^2 = 36 + 64 = 100 = BC^2$ donc, par la réciproque du théorème de Pythagore, $ABC$ est rectangle en $A$.

*Remarque* 7. On peut rassembler le théorème de Pythagore et sa réciproque sous forme d'une équivalence : un triangle $ABC$ est rectangle en $A$ si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

**Propriété 8**

Soit $ABC$ un triangle rectangle en $A$. Alors, $BC > AB$ et $BC > AC$. Autrement dit, dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand des côté.

*Démonstration.* Comme $ABC$ est rectangle en $A$, d'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Comme $AB > 0$ et $AC > 0$, on en déduit que $BC^2 > AB^2$ et $BC^2 > AC^2$. Par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, on en déduit que $\sqrt{BC^2} > \sqrt{AB^2}$ et $\sqrt{BC^2} > \sqrt{AC^2}$ c'est-à-dire $|BC| > |AB|$ et $|BC| > |AC|$. Or, $AB$, $AC$ et $BC$ sont positives donc $BC > AB$ et $BC > AC$. □

### b) Trigonométrie dans un triangle rectangle

**Définition 9**

Soit $ABC$ un triangle rectangle en $A$. Alors, on définit le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle $\widehat{ABC}$ par

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC}, \qquad \sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC} \qquad \text{et} \qquad \tan(\widehat{ABC}) = \frac{\sin(\widehat{ABC})}{\cos(\widehat{ABC})} = \frac{AC}{AB}.$$

**Exemple 10.** On a vu précédemment que le triangle $ABC$ tel que $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 10$ est rectangle en $A$. Dans ce triangle, $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $\sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ et $\tan(\widehat{ABC}) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

*Remarque* 11. On convient que si $\widehat{BAC} = 90$ř alors $\cos(\widehat{BAC}) = 0$ et $\sin(\widehat{BAC}) = 1$.

**Notation 12.** Si $\alpha$ est un angle, on note $\cos^2(\alpha) = (\cos(\alpha))^2$ et $\sin^2(\alpha) = (\sin(\alpha))^2$.

**Propriété 13**

Si $\alpha$ désigne un angle d'un triangle rectangle alors $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

*Démonstration.* Si $\alpha$ est l'angle droit alors d'après la remarque précédente, $\cos(\alpha) = 0$ et $\sin(\alpha) = 1$ donc $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 0^2 + 1^2 = 1$. Sinon, on note $ABC$ les sommets du triangle de telle façon que $\widehat{BAC}$ soit l'angle droit et que $\alpha = \widehat{ABC}$. Alors, par définition,

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AC^2}.$$

Comme $ABC$ est rectangle en $A$, d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 + AC^2 = BC^2$ donc $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$. □

**Exemple 14.** Soit $ABC$ un triangle rectangle en $A$ tel que $\sin(\widehat{ABC}) = \frac{5}{13}$. Alors, on $\cos^2(\widehat{ABC}) + \sin^2(\widehat{ABC}) = 1$ donc

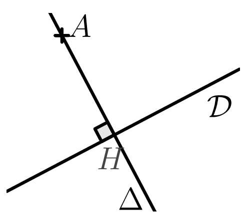
$$\cos^2(\widehat{ABC}) = 1 - \sin^2(\widehat{ABC}) = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169}{169} - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}.$$

Comme $\cos(\widehat{ABC}) \geqslant 0$, on en déduit que $\cos(\widehat{ABC}) = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$.

### c) Projeté orthogonal d'un point sur une droite

**Définition 15**

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan et $A$ un point du plan. On note $\Delta$ la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par $A$ et $H$ le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\Delta$.
Le point $H$ est appelé le projeté orthogonal de $A$ sur la droite $\mathcal{D}$.




*Remarque* 16. Si $A$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ alors $H = A$.

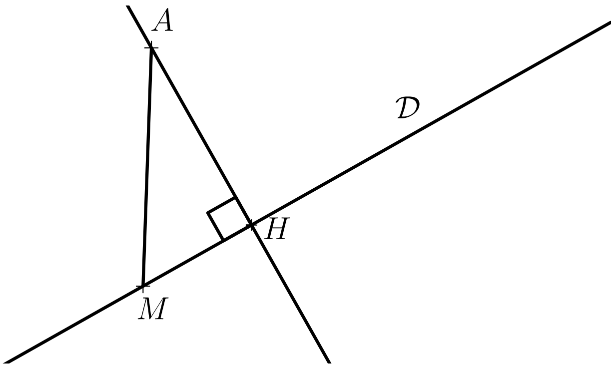
**Propriété 17**

Soit $\mathcal{D}$ une droite, $A$ un point du plan et $H$ le projeté orthogonal de $A$ sur $\mathcal{D}$. Alors, le point $H$ est le point de $\mathcal{D}$ le plus proche de $A$. Autrement dit, pour tout point $M$ de $\mathcal{D}$ différent de $H$, $AM > AH$.

*Démonstration.* Soit $M \in \mathcal{D}$ un point différent de $A$.

Si $A \in \mathcal{D}$ alors $A = H$ donc $AH = 0$. Or, comme $M \neq A$, $AM > 0$ donc $AM > AH$.

Sinon, le triangle $AHM$ est rectangle en $M$ et $AM$ est l'hypoténuse de ce triangle donc $AM > AH$ d'après la propriété 8.

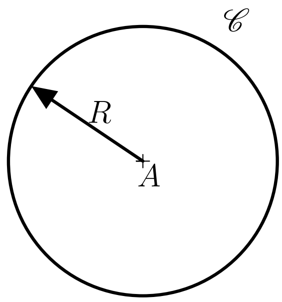



□

## 2) Cercles et tangente

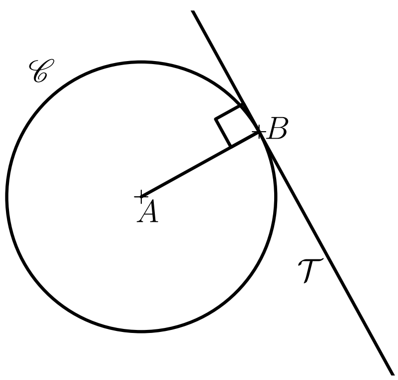
**Définition 18**

Soit $A$ un point du plan et $R$ un réel strictement positif. Le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A$ et de rayon $R$ est l'ensemble de points $M$ du plan tels que $AM = R$.




**Définition 19**

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $A$. Soit $B \in \mathscr{C}$. La droite $\mathcal{T}$ passant par $B$ et perpendiculaire à $(AB)$ est appelée la tangente à $\mathscr{C}$ au point $B$.



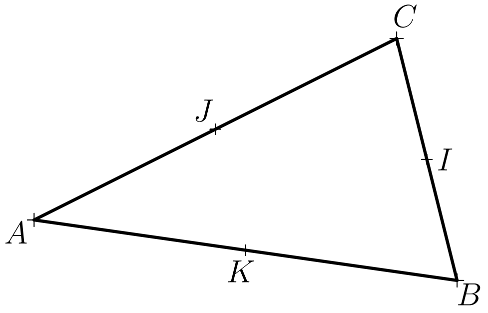
**Propriété 20**

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $A$ et de rayon $R$. Soit $B \in \mathscr{C}$ et $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathscr{C}$ en $B$. Alors, la droite $\mathcal{T}$ coupe le cercle $\mathscr{C}$ en une unique point (qui est le point $B$).

*Démonstration.* Par définition, $\mathcal{T}$ passe par $B$ donc elle coupe le cercle $\mathscr{C}$ en au moins un point. De plus, comme $\mathcal{T}$ est perpendiculaire à $(AB)$, le point $B$ est le projeté orthogonal de $A$ sur $\mathcal{T}$. Ainsi, d'après le propriété 17, pour tout point $M$ de $\mathcal{T}$ différent de $A$, $AM > AB = R$ donc $M \notin \mathscr{C}$. Ainsi, $B$ est l'unique point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de $\mathcal{T}$. □

## 3) Droites et points remarquables du triangle

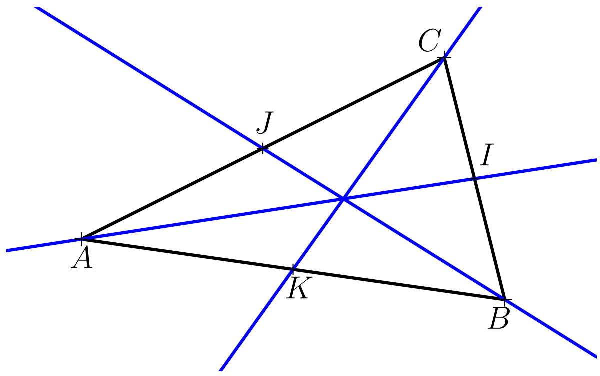
Dans tout ce paragraphe, $ABC$ désigne un triangle quelconque (non aplati). On note, de plus, $I$ le milieu de $[BC]$, $J$ le milieu de $[AC]$ et $K$ le milieu de $[AB]$.




### a) Médianes

**Définition 21**

Les médianes de $ABC$ sont les droites passant par un sommet du triangle et coupant le côté opposé en son milieu. La droite $(AI)$ est appelée la médiane issue de $A$, le droite $(BJ)$ la médiane issue de $B$ et la droite $(CK)$ la médiane issue de $C$.




**Définition 22**

On dit que trois droites (distinctes) sont concourantes en un point $M$ si $M$ appartient aux trois droites à la fois. Ce point est alors appelé le point de concours des trois droites

**Propriété 23**

Les médianes de $ABC$ sont concourantes en un point $G$ appelé le centre de gravité du triangle. De plus, $AG = \frac{2}{3}AI$, $BG = \frac{2}{3}BJ$ et $CG = \frac{2}{3}CK$.

*Démonstration.* On munit le plan du repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. Dans ce repère, les coordonnées des points sont

$$A\,(0\,;0) \qquad B\,(1\,;0) \qquad C\,(0\,;1) \qquad I\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right) \qquad J\left(0\,;\frac{1}{2}\right) \qquad K\left(\frac{1}{2}\,;0\right).$$

Un vecteur directeur de la droite $(AI)$ est $\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ donc

$$M\,(x\,;y) \in (AI) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AI}) = 0 \Leftrightarrow (x-0)\times\frac{1}{2}-(y-0)\times\frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y = 0 \Leftrightarrow x-y = 0$$

donc une équation cartésienne de $(AI)$ est $x + y = 0$.

De même, un vecteur directeur de la droite $(BJ)$ est $\overrightarrow{BJ}\left(-1\,;\frac{1}{2}\right)$ donc

$$\begin{aligned} M\,(x\,;y) \in (BJ) &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BJ}) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\times\frac{1}{2} - (y-0)\times(-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + y = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 1 = 0 \end{aligned}$$

donc une équation cartésienne de $(BJ)$ est $x + 2y - 1 = 0$.

Étudions l'intersection de $(AI)$ et $(BJ)$. Comme $\det(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{BJ}) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} - (-1)\times\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \neq 0$, les droites $(AI)$ et $(BJ)$ sont sécantes en un point $G$. Pour déterminer les coordonnées de $G$, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x + 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Montrons que $G$ appartient à la droite $(CK)$. En effet, $\overrightarrow{CK}\left(\frac{1}{2}\,;-1\right)$ et $\overrightarrow{CG}\left(\frac{1}{3}\,;-\frac{2}{3}\right)$ donc $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$ ce qui montre que les vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont colinéaires donc que $C$, $G$ et $K$ sont alignés.

Ainsi, les médianes $(AI)$, $(BJ)$ et $(CK)$ sont bien concourantes en $G$. De plus, on a vu que $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$ donc $CG = \frac{2}{3}CK$. De même, d'une part, $\overrightarrow{AG}\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ et, d'autre part, $\overrightarrow{BG}\left(-\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{BJ}\left(-1\,;\frac{1}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$. On conclut donc que $AG = \frac{2}{3}AI$ et $BG = \frac{2}{3}BJ$. □

**Propriété 24**

Soit $G$ le centre de gravité de $ABC$. Alors, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

*Démonstration.* Grâce à la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IC}) = \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}.$$

Or, comme $I$ est le milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 0$ et, par ailleurs, toujours par la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GA} + 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AI}) = 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AI}$$

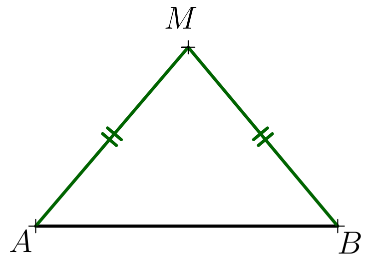
De plus, par la propriété précédente, $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ donc $3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AI}$ et ainsi $3\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{AI}$.

On conclut que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{0}$ comme annoncé. □

### b) Médiatrices

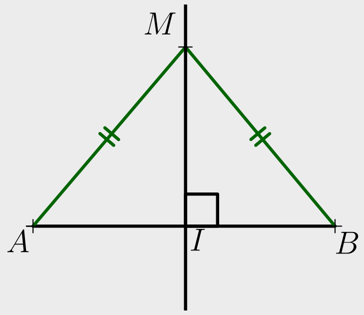
**Définition 25**

Soit $A$ et $B$ deux points distincts du plan. La médiatrice du segment $[AB]$ est l'ensemble des points $M$ du plan tels que $MA = MB$. Dans ce cas, on dit que $M$ est équidistant de $A$ et $B$.




**Propriété 26**

Soit $A$ et $B$ deux points distincts du plan et $I$ le milieu de $[AB]$. La médiatrice du segment $[AB]$ est la droite passant par $I$ et perpendiculaire à $(AB)$.




*Démonstration.* Notons $\mathcal{D}$ la médiatrice de $[AB]$ et $\Delta$ la perpendiculaire à $(AB)$ passant par $I$. On va montrer que $\Delta = \mathcal{D}$. Pour cela, on prouve que tout point de $\Delta$ appartient à $\mathcal{D}$ et que tout point de $\mathcal{D}$ appartient à $\Delta$.

Soit $M \in \Delta$. Alors, par définition, les triangles $MIA$ et $MIB$ sont rectangles en $I$. De plus, comme $I$ est le milieu de $[AB]$, $IA = IB$ donc, par le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle $MIA$ puis dans le triangle $MIB$,

$$MA^2 = MI^2 + IA^2 = MI^2 + IB^2 = MB^2$$

Soit $A$ et $B$ deux points distincts du plan. La médiatrice du segment $[AB]$ donc, comme $MA$ et $MB$ sont positives, $MA = MB$. Ainsi, $M \in \mathcal{D}$.

Réciproquement, supposons que $M \in \mathcal{D}$. Si $M = I$ alors, par définition, $M \in \Delta$. Sinon, notons $H$ le projeté orthogonal de $M$ sur $(AB)$. Alors, $(MH) \perp (AB)$ donc les triangle $MHA$ et $MHB$ sont rectangles en $H$. En utilisant le théorème de Pythagore dans $MHA$ puis dans $MHB$, on en déduit, puisque $MA = MB$, que

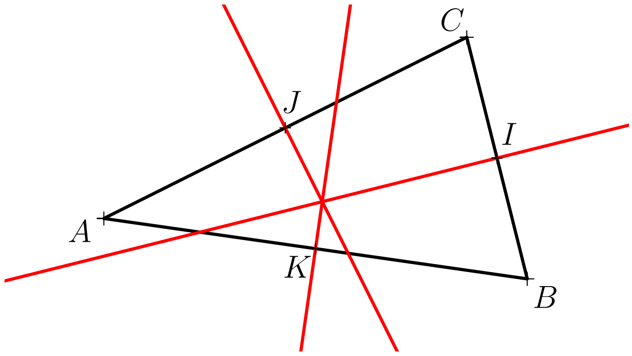
$$HA^2 = MA^2 - MH^2 = MB^2 - MH^2 = HB^2.$$

et donc, comme précédemment, $HA = HB$. Ainsi, $H$ est un point de $(AB)$ équidistant de $A$ et $B$ donc $H = I$. Ainsi, $(MI) \perp (AB)$ donc $(MI) = \Delta$ et, en particulier, $M \in \Delta$.

On conclut donc que $\mathcal{D} = \Delta$. $\square$

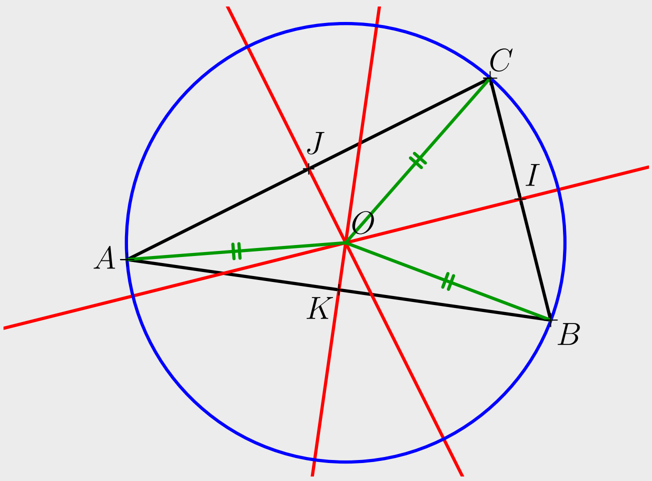
**Définition 27**

Les médiatrices du triangle $ABC$ sont les médiatrices des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.




**Propriété 28**

Les médiatrices de $ABC$ sont concourantes en un point $O$ qui est le centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$, c'est-à-dire le cercle passant par les trois points $A$, $B$ et $C$.

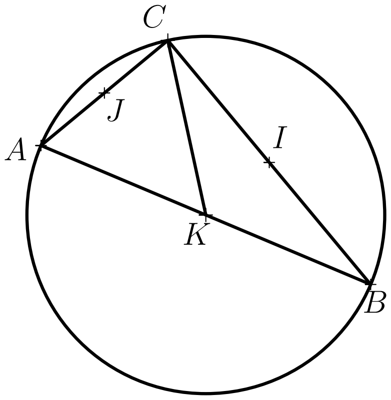



*Démonstration.* Notons $\mathcal{D}_I$ la médiatrice de $[BC]$, $\mathcal{D}_J$ la médiatrice de $[AC]$ et $\mathcal{D}_K$ la médiatrice de $[AB]$. Si $\mathcal{D}_I$ et $\mathcal{D}_J$ étaient parallèles alors, comme $(BC) \perp \mathcal{D}_I$ et $(AC) \perp \mathcal{D}_J$, les droites $(BC)$ et $(AC)$ seraient parallèles, ce qui est exclu puisqu'elles sont sécantes en $C$. Ainsi, $\mathcal{D}_I$ et $\mathcal{D}_J$ sont sécantes en un point $O$. Des lors, comme $O \in \mathcal{D}_I$, $OB = OC$ et, comme $O \in \mathcal{D}_J$, $OA = OC$. On en déduit que $OB = OC = OA$ donc $O$ est équidistant de $A$ et $B$ ce qui signifie que $O \in \mathcal{D}_K$. On conclut donc que les trois médiatrices sont concourantes en $O$.

De plus, on a vu que $OA = OB = OC$ donc si on note $R$ cette longueur commun alors $A$, $B$ et $C$ appartiennent au cercle de centre $O$ et de rayon $R$. Ce cercle passe par $A$, $B$ et $C$ donc c'est le cercle circonscrit à $ABC$ et il a bien pour centre le point $O$. $\square$

**Corollaire 29**

Le triangle $ABC$ est rectangle en $C$ si et seulement si $C$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$ et, dans ce cas, on a donc $KA = KB = KC$.



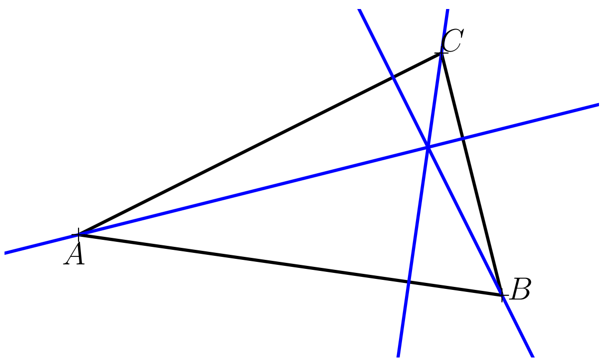

*Démonstration.* Supposons que $ABC$ est rectangle en $C$. Par le théorème de la droite des milieux, $(IK)$ est parallèle à $(AC)$. Or, comme $ABC$ est rectangle en $C$, $(BC) \perp (AC)$ donc $(IK) \perp (BC)$ et ainsi $(IK)$ est la médiatrice de $[BC]$. On montre de même que $(JK)$ est la médiatrice de $[AC]$. Or, ces deux médiatrices se coupent en $K$ donc $K$ est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit à $ABC$. Comme $K$ est le milieu de $[BC]$, on en déduit que $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Réciproquement, supposons que $C$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$. Alors, $KB = KC$ donc $K$ appartient à la médiatrice de $[BC]$. Autrement dit $(IK) \perp (BC)$. Or, par le théorème de la droite des milieux, $(IK)$ est parallèle à $(AC)$. On en déduit que $(BC) \perp (AC)$ donc $ABC$ est rectangle en $C$. □

### c) Hauteurs

**Définition 30**

Les hauteurs d'un triangle sont les droites perpendiculaires à un côté et passant par le sommet opposé à ce côté. La droite perpendiculaire à $(BC)$ passant par $A$ est la hauteur issue de $A$, la droite perpendiculaire à $(AC)$ passant par $B$ est la hauteur issue de $B$ et la droite perpendiculaire à $(AB)$ passant par $C$ est la hauteur issue de $C$.

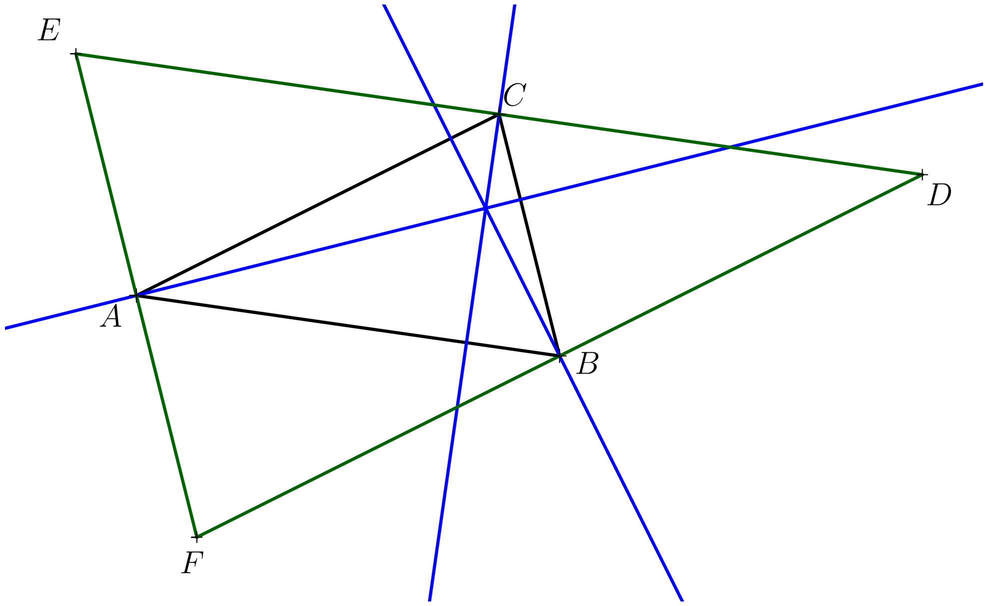



**Propriété 31**

Les hauteurs de $ABC$ sont concourantes en un point $H$ appelé l'orthocentre de $ABC$.

*Démonstration.* Notons $\mathcal{D}_A$ la hauteur issue de $A$, $\mathcal{D}_B$ la hauteur issue de $B$ et $\mathcal{D}_C$ la hauteur issue de $C$.

Considérons les points $D$, $E$ et $F$ tels que $ABDC$, $ABCE$ et $ACBF$.



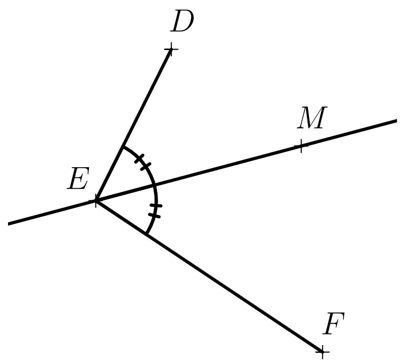

Alors, par construction, $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE}$ donc $E$ est le milieu de $[EF]$. De plus, comme $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{BC}$, les droites $(AF)$ et $(BC)$ sont parallèles ce qui revient à dire que $(EF)$ est parallèle à $(BC)$. Or, comme $\mathcal{D}_A$ est la hauteur issue de $A$, $\mathcal{D}_A \perp (BC)$ donc $\mathcal{D}_A \perp (EF)$. On en déduit que $\mathcal{D}_A$ est la médiatrice de $[EF]$.

On montre de même que $\mathcal{D}_B$ est la médiatrice de $[DF]$ et que $\mathcal{D}_C$ est la médiatrice de $[DE]$. Ainsi, $\mathcal{D}_A$, $\mathcal{D}_B$ et $\mathcal{D}_C$ sont les médiatrices du triangle $DEF$ donc, par la propriété 28, les droites $\mathcal{D}_A$, $\mathcal{D}_B$ et $\mathcal{D}_C$ sont concourantes en un point $H$. $\square$

### d) Bissectrices

**Définition 32**

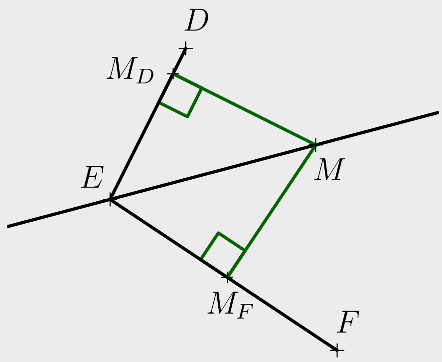
Soit $D$, $E$ et $F$ trois points distincts. La bissectrice de l'angle $\widehat{DEF}$ est la droite $\mathcal{D}$ passant par $E$ telle que, pour tout point $M \in \mathcal{D}$ différent de $E$, $\widehat{DEM} = \widehat{MEF}$.




*Remarque* 33. De façon imagée, la bissectrice d'un angle est donc une droite qui partage cet angle en deux angles égaux.

**Propriété 34**

Soit $D$, $E$ et $F$ trois points distincts du plan. Si $M$ est un point quelconque du plan, on note $M_D$ son projeté orthogonal sur $(ED)$ et $M_F$ sont projeté orthogonal sur $(EF)$. Alors, la bissectrice de $\widehat{DEF}$ est l'ensemble des points $M$ du plan tels que $MM_D = MM_F$.




*Démonstration.* Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M$ du plan tels que $MM_D = MM_F$ et $\Delta$ la bissectrice de $\widehat{DEF}$. Comme dans la démonstration de la propriété 26, on va montrer que $\mathcal{D} = \Delta$ en prouvant que tout point $M \in \mathcal{D}$ appartient à $\Delta$ et que tout point $M \in \Delta$ appartient à $\mathcal{D}$.

Soit $M \in \mathcal{D}$. Alors, $MM_D = MM_F$ et, comme les triangles $EMM_D$ et $EMM_F$ sont rectangles respectivement en $M_D$ et $M_F$, grâce au théorème de Pythagore,

$$EM_D^2 = EM^2 - MM_D^2 = EM^2 - MM_F^2 = EM_F^2$$

donc, comme $EM_D > 0$ et $EM_F > 0$, on conclut que $EM_D = EM_F$. Ainsi, les triangles $EMM_D$ et $EMM_F$ ont les mêmes mesures ($EM_D = EM_F$, $MM_D = MM_F$ et $EM = EM$), ils ont sont superposables et, en particulier, ils ont les mêmes angles. Il s'ensuit que $\widehat{M_DEM} = \widehat{MEM_F}$ et donc $\widehat{DEM} = \widehat{MEF}$. Ainsi, $M \in \Delta$.

Réciproquement, supposons que $M \in \Delta$. Alors, $\widehat{M_DEM} = \widehat{DEM} = \widehat{MEF} = \widehat{MEM_F}$ donc, dans les triangles rectangles $EM_DM$ et $EM_FM$, on a

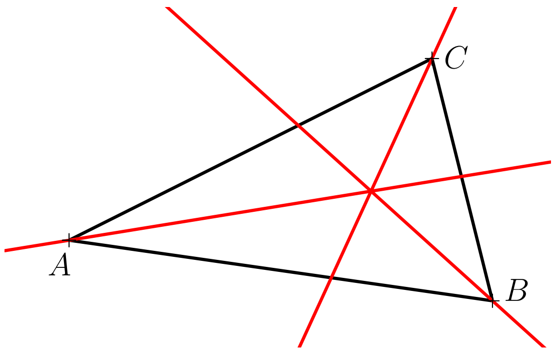
$$\frac{MM_D}{EM} = \sin(\widehat{M_DEM}) = \sin(\widehat{MEM_F}) = \frac{MM_F}{EM}$$

donc $MM_D = MM_F$ et ainsi $M \in \mathcal{D}$.

On conclut donc que $\mathcal{D} = \Delta$. □

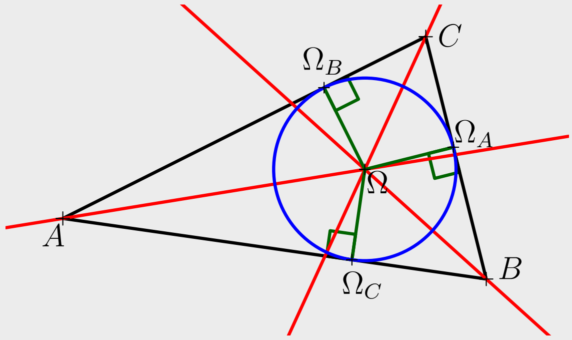
**Définition 35**

Les bissectrices d'un triangle sont les bissectrices des angles de ce triangle. Ainsi, dans $ABC$, la bissectrice issue de $A$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, la bissectrice issue de $B$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ et la bissectrice issue de $c$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$.



**Propriété 36**

Les bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point $\Omega$. De plus, $\Omega$ est le centre d'un cercle $\mathscr{C}$, appelé cercle circonscrit à $ABC$, tel que les trois droites $(AB)$, $(BC)$ et $(AB)$ sont tangentes à $\mathscr{C}$.




*Démonstration.* Notons $\mathcal{D}_A$ la bissectrice issue de $A$, $\mathcal{D}_B$ la bissectrice issue de $B$ et $\mathcal{D}_C$ la bissectrice issue de $C$.

Les droites $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$ passent par l'intérieur du triangle donc elles sont sécantes en un point $\Omega$. Notons $\Omega_A$ le projeté orthogonale de $\Omega$ sur $(BC)$, $\Omega_B$ le projeté orthogonal de $\Omega$ sur $(AC)$ et $\Omega_C$ le projeté orthogonal de $\Omega$ sur $(AB)$. Comme $\Omega \in \mathcal{D}_A$, d'après la propriété 34, $\Omega\Omega_B = \Omega\Omega_C$ et, comme $\Omega \in \mathcal{D}_B$, d'après la propriété 34, $\Omega\Omega_A = \Omega\Omega_C$. Ainsi, $\Omega\Omega_A = \Omega\Omega_C = \Omega\Omega_B$ donc $\Omega\Omega_A = \Omega\Omega_B$ et, toujours d'après le propriété 34, $\Omega \in \mathcal{D}_C$. Ainsi, les trois droites $\mathcal{D}_A$, $\mathcal{G}_B$ et $\mathcal{G}_C$ sont concourantes en $\Omega$.

De plus, comme $\Omega\Omega_A = \Omega\Omega_B = \Omega\Omega_C$, en notant $R$ cette valeur commune, $\Omega_A$, $\Omega_B$ et $\Omega_C$ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega$ et de rayon $R$. Mais, par définition du projeté orthogonale, $(AB) \perp (\Omega\Omega_C)$, $(BC) \perp (\Omega\Omega_A)$ et $(AC) \perp (\Omega\Omega_B)$ donc $(AB)$, $(BC)$ et $(AC)$ sont tangentes à $\mathscr{C}$ respectivement en $\Omega_C$, $\Omega_A$ et $\Omega_B$. □

# II. — Quelques polygones remarquables

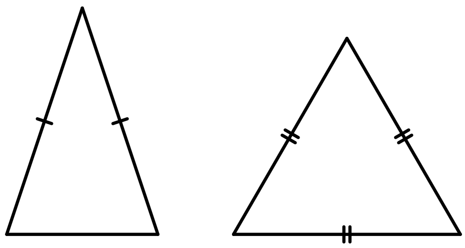
## 1) Triangles

Dans tout ce paragraphe $ABC$ est un triangle.

**Définition 37**

On dit que le triangle $ABC$ est

- isocèle en $A$ si $AB = AC$ ;
- équilatéral si $AB = AC = AD$.



triangle isocèle triangle équilatéral

**Propriété 38**

Le triangle $ABC$ est isocèle en $A$ si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- La médiane, la médiatrice, la hauteur et la bissectrice issue de $A$ sont confondues ;
- $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$.

*Démonstration.* (1) Supposons que $ABC$ est isocèle en $A$. Notons $H$ le projeté orthogonal de $A$ sur $(BC)$. Alors, en utilisant le théorème de Pythagore dans $AHB$ puis dans $AHC$ et sachant que $AB = AC$,

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = AC^2 - AH^2 = CH^2$$

donc, comme $BH > 0$ et $CH > 0$, $BH = CH$. Ainsi, $H$ est le milieu de $[BC]$. On en déduit que la médiane et la hauteur issue de $A$ sont confondues et il s'ensuit que la médiatrice est également confondues avec ces deux droites. Enfin, puisque $H$ est le milieu de $[BC]$ et $(AH) \perp (BC)$, $C$ est l'image de $B$ par la symétrie d'axe $(AH)$. La symétrie conservant les angles, on en déduit que $\widehat{BAH} = \widehat{HAC}$ donc la médiane $(AH)$ est aussi la bissectrice issue de $A$.

(2) Supposons que la médiane, la médiatrice, la hauteur et la bissectrice issue de $A$ sont confondues. Alors, en notant $I$ le milieu de $[BC]$, $\widehat{BAI} = \widehat{IAC}$ donc, comme $(AI) \perp (BC)$,

$$\widehat{ABC} = \widehat{ABI} = 180ř - (\widehat{BIA} + \widehat{IAB}) = 180ř - (90ř + \widehat{IAB}) = 180ř - (\widehat{AIC} + \widehat{IAC}) = \widehat{ICA} = \widehat{BCA}$$

(3) Enfin, supposons que $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$. Notons $H$ le projeté orthogonal de $A$ sur $(BC)$. Alors, en utilisant les triangles rectangles $BHA$ et $CHA$, on a

$$\frac{AH}{AB} = \sin(\widehat{ABC}) = \sin(\widehat{BCA}) = \frac{AH}{AC}$$

et donc $AB = AC$ c'est-à-dire $ABC$ est isocèle en $A$. □

**Propriété 39**

Le triangle $ABC$ est équilatéral si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- les trois angles de $ABC$ sont égaux ;
- $ABC$ est isocèle et possède un angle de 60ř.

*Démonstration.* (1) Supposons que $ABC$ est équilatéral. Alors, il est isocèle en $A$ et en $B$ donc, d'après la propriété 38, $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{BAC}$ donc $\widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \widehat{BAC}$.

(2) Supposons que $\widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \widehat{BAC}$. Alors, comme $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$, d'après la propriété 38, $ABC$ est isocèle en $A$. De plus, la somme des angles d'un triangle vaut 180° donc comme les trois angles sont égaux, ils valent tous $\frac{180ř}{3} = 60ř$.

(3) Supposons que $ABC$ est isocèle et possède un angle de 60ř. Quitte à renommer les sommets, on peut supposer que $ABC$ est isocèle en $A$. Alors, d'après la propriété 38, $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$. Si $\widehat{ABC}$ ou $\widehat{BCA}$ vaut 60ř alors l'autre aussi et donc $\widehat{BAC} = 180ř - 2 \times 60ř = 60ř$. Sinon, $\widehat{BAC} = 60ř$ donc, comme $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$, $180ř = 60ř + 2 \times \widehat{ABC}$ donc $\widehat{ABC} = 60ř$ et ainsi $\widehat{BCA} = 60ř$. Ainsi, dans tous les cas, $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$ donc $ABC$ est isocèle en $B$. Comme il est également isocèle en $A$, on en déduit que $AC = AB = BC$ donc $ABC$ est équilatéral. □

## 2) Quadrilatères

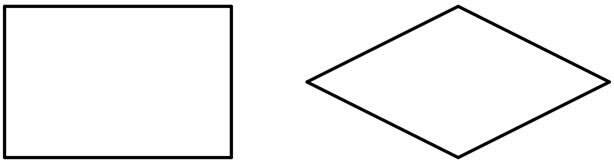
Dans tout ce paragraphe $ABCD$ est un quadrilatère (non croisé).

### a) Rectangles, losanges et carrés

**Définition 40**

On dit que $ABCD$ est

- un rectangle si $ABCD$ est un parallélogramme possédant un angle droit.
- un losange si les quatre côtés de $ABCD$ ont même longueur.
- un carré si $ABCD$ est à la fois un rectangle et un losange.




**Propriété 41**

Le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle si et seulement si ses diagonales ont même longueur et se coupent en leur milieu.

*Démonstration.* Supposons que $ABCD$ est un rectangle. Alors, $ABCD$ est un parallélogramme donc ses diagonales se coupent en leur milieu. Notons ce milieu $I$. Comme $ABCD$ est un rectangle, le triangle $ABC$ est rectangle en $B$ et le triangle $ADB$ est rectangle en $D$. Dès lors, d'après le corollaire 29, $IA = IB = IC = ID$ donc $AC = IA + IC = IB + ID = BD$ et ainsi les diagonales de $ABCD$ ont même longueur.

Réciproquement, supposons que les diagonales de $ABCD$ ont même longueur et se coupent en leur milieu $I$. Alors, comme elles se coupent en leur milieu, $ABCD$ est un parallélogramme. De plus, comme elles ont même longueur, $IA = IB = IC$ ce qui revient à dire que $I$ est le centre du cercle circonscrit à $ABC$. Ainsi, d'après le corollaire 29, $ABC$ est rectangle en $B$ donc $ABCD$ est un rectangle. □

**Propriété 42**

Le quadrilatère $ABCD$ est un losange si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.

*Démonstration.* Supposons que $ABCD$ est un losange. Alors, en particulier, $ABCD$ a ses côtés opposé deux à deux égaux donc $ABCD$ est un parallélogramme et ainsi ses diagonales se coupent en leur milieu $I$. De plus, $AB = AD$ donc le triangle $ABD$ est isocèle en $A$. Dès lors, d'après la propriété 38, la médiane $(AI)$ est aussi la hauteur issue de $A$ donc $(AI) \perp (BD)$ et donc $(AC) \perp (BD)$. Ainsi, les diagonales de $ABCD$ sont perpendiculaires.

Réciproquement, supposons que les diagonales de $ABCD$ sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu $I$. Alors, comme $(AI) \perp (BD)$ et $IA = IB$, en utilisant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangle $AIB$et $AID$,

$$AB^2 = AI^2 + IB^2 = AI^2 + ID^2 = AD^2$$

donc, comme $AB > 0$ et $AD > 0$, on conclut que $AB = AD$. On montre de même que $BA = BC$ et $CB = CD$ donc $AB = BC = CD = DA$ et ainsi $ABCD$ est un losange. □

On déduit immédiatement des deux propriétés précédentes le corollaire suivant.

**Corollaire 43**

Le quadrilatère $ABCD$ est un carré si et seulement si ses diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu en formant un angle droit.

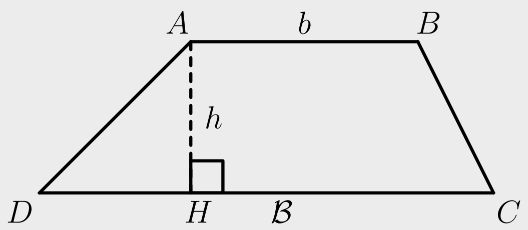
### b) Trapèze

**Définition 44**

On dit que $ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$ si les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles.

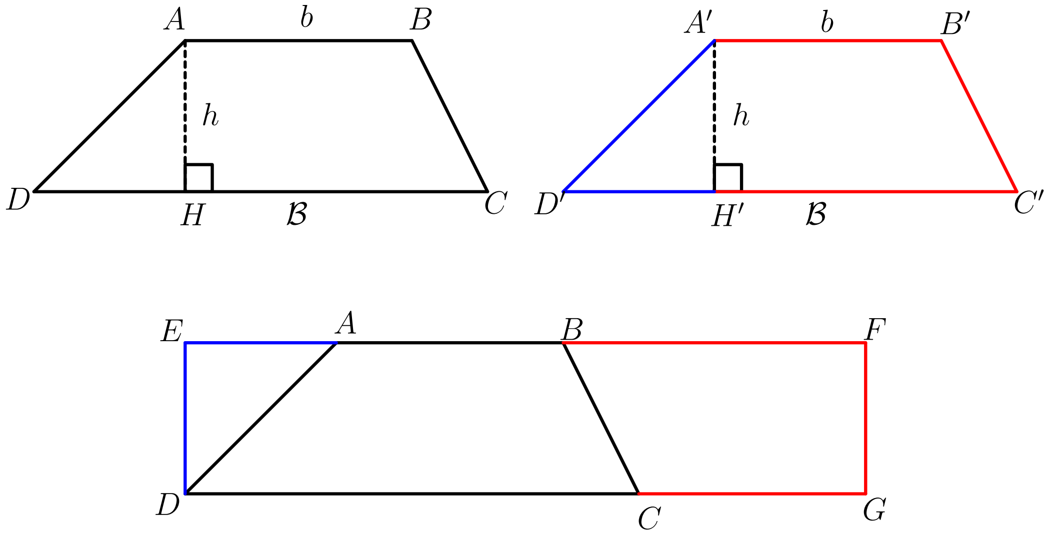
**Propriété 45**

Soit $ABCD$ est un trapèze de base $[AB]$ et $[CD]$. Soit $H$ le projeté orthogonal de $A$ sur $(CD)$. On note $b = AB$, $\mathcal{B} = CD$, $h = AH$.




Alors, l'aire de $ABCD$ est $\dfrac{(b + \mathcal{B}) \times h}{2}$.

*Démonstration.* On considère deux exemplaires du trapèze : l'une notée $ABCD$ et et l'autre $A'B'C'D'$. On coup le trapèze $A'B'C'D'$ en deux selon le segment $[A'H']$. Ensuite, on colle le triangle $A'D'H'$ sur le segment $[AD]$ et le trapèze $A'B'C'H'$ sur le segment $[BC]$ comme sur la figure ci-dessous.




On obtient ainsi un rectangle $DEFG$ dont les côtés mesurent $h$ et $b + \mathcal{B}$. Ainsi, l'aire de ce rectangle est $(b + \mathcal{B}) \times h$ et donc, comme celui-ci contient exactement deux exemplaires du trapèze $ABCD$, on conclut que l'aire de $ABCD$ est $\dfrac{(b + \mathcal{B}) \times h}{2}$. $\square$

*Remarque* 46. Le segment de longueur $b$ est appelé la petite base, celui de longueur $\mathcal{D}$ est appelé la grande base et celui de longueur $h$ est appelé la hauteur du trapèze.