⧫ Chapitre 14. — Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Rappels. On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels c'est-à-dire l'ensemble des entiers positifs ou nuls. Ainsi, $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ...\}$.

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs c'est-à-dire l'ensemble des entiers positifs, négatifs ou nuls. Ainsi, $\mathbb{Z} = \{... ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ...\}$

Dans tout ce chapitre, lorsqu'on ne précise pas, le mot « entier » signifie « entier relatif ».

I. — Notion de divisibilité

Définition 1

Soit a et b deux nombres entiers relatifs. On dit que b divise a s'il existe un entier relatif k tel que $a = k \times b$.

Dans ce cas, on dit aussi que a est un multiple de b et que b est un diviseur de a.

Exemple 2.

1. 4 divise 12 car $12 = 3 \times 4$ (ici, $k = 4$).
2. 30 est un multiple de -6 car $30 = (-5) \times (-6)$ (ici, $k = -5$).
3. 1 divise n'importe quel entier a car $a = a \times 1$ (ici, $k = a$).
4. Tout entier b divise 0 car $0 = 0 \times b$ (ici, $k = 0$).
5. Si b est un diviseur de a alors $-b$ est aussi un diviseur de a. En effet, dans ce cas, il existe un entier k tel que $a = k \times b$ donc $a = (-k) \times (-b)$ et $-k$ est un entier car k est un entier donc $-b$ est un diviseur de a.

Remarque 3. ATTENTION ! Le mot « divise » ne fait pas référence ici à une division. Ainsi, si on ne peut pas diviser par 0, on peut en revanche dire que 0 divise 0 car $0 = 2 \times 0$.

Remarque 4. On remarque que les diviseurs fonctionnent par paire. En effet, 4 divise 12 car $12 = 3 \times 4$ mais on a donc aussi $12 = 4 \times 3$ ce qui signifie que 3 divise aussi 12. On dit que 3 et 4 forment une paire de diviseurs associés de 12. Il se peut cependant que deux diviseurs associés d'un entier a soient égaux : par exemple, $36 = 6 \times 6$ donc 6 divise 36 et son diviseur associé est lui-même. Cela signifie en fait que a est le carré d'un entier. C'est ce qu'on appelle un carré parfait.

Définition 5

De manière plus générale, si x et y sont des réels quelconques (pas nécessairement entiers), on dit que y est un multiple de x s'il existe un entier relatif k tel que $y = k \times x$.

Exemple 6. Ainsi, 7 est un multiple de 3,5 car $7 = 2 \times 3{,}5$ et $\sqrt{18}$ est un multiple de $\sqrt{2}$ car $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2}$.

ATTENTION, on ne peut pas dire en revanche que 7 est un multiple de 2 car 3,5 n'est pas un entier. Ainsi, dans le cas des réels, les diviseurs ne fonctionnent pas forcément par paire.

Propriété 7

Soit x un réel. On suppose que y et z sont des multiples de x. Alors, $y+z$ est un multiple de x.

Démonstration. Comme y est un multiple de x, il existe un entier k tel que $y = kx$. De même, comme z est un multiple de x, il existe un entier k' tel que $z = k'x$. (Attention, il n'y a aucune raison que $k = k'$ donc il faut choisir deux noms différents pour ces entiers). Dès lors, $y + z = kx + k'x = (k + k')x$. Or, comme k et k' sont des entiers, $k + k'$ est un entier donc $y + z$ est un multiple de x. □

Exemple 8. Les nombres 6π et -14π sont des multiples de 2π car $6\pi = 3\times 2\pi$, $-14\pi = -7\times 2\pi$ et 3 et -7 sont des entiers. On en déduit que $6\pi + (-14\pi)$ est un multiple de 2π. (Et, en effet, $6\pi + (-14\pi) = 6\pi - 14\pi = -8\pi = -4 \times 2\pi$.)

II. — Nombres pairs et nombres impairs

Définition 9

Soit n un entier relatif. On dit que :

1. n est pair si n est un multiple de 2 ;
2. n est impair si $n - 1$ est pair.

Exemple 10.

1. Le nombre 6 est pair car $6 = 3 \times 2$ donc 6 est un multiple de 2.
2. Le nombre 0 est pair car $0 = 0 \times 2$ donc 0 est un multiple de 2.
3. Le nombre -198 est pair car $-198 = (-99) \times 2$ donc -198 est un multiple de 2.
4. Le nombre 1 est impair car $1 - 1 = 0$ est pair.
5. Le nombre 7 est impair car $7 - 1 = 6$ est pair.
6. Le nombre -19 est impair car $-19 - 1 = -20 = (-10) \times 2$ est pair.

Propriété 11

1. Un nombre entier n est pair si et seulement s'il existe un entier k tel que $n = 2k$.
2. Un nombre entier n est impair si et seulement s'il existe un entier k tel que $n = 2k+1$.

Démonstration.

1. Un entier n est pair si et seulement si n est un multiple de 2 ce qui, par définition, équivaut à l'existence d'un entier k tel que $n = 2k$.
2. Un entier n est impair si seulement si $n - 1$ est pair ce qui équivaut, d'après ce qui précède, à l'existence d'un entier k tel que $n - 1 = 2k$. On conclut donc que n est impair si et seulement s'il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.

□

Exemple 12. Si m est un entier alors le nombre entier $4m + 3$ est impair. En effet, on peut écrire $4m + 3 = 2 \times 2m + 2 + 1 = 2(2m + 1) + 1$ donc, en posant $k = 2m + 1$ qui est bien un entier car m est entier, on a $4m + 3 = 2k + 1$. Ainsi, $4m + 3$ est impair.

Remarque 13. On peut montrer que tout entier n est soit pair soit impair : c'est ce qu'on appelle la parité de n.

Propriété 14

Soit n un entier. Alors, n et n^2 ont la même parité.

Démonstration. Supposons que n est pair. Alors, il existe un entier k tel que $n = 2k$. Dès lors, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. En posant $K = 2k^2$ qui est un entier car k est entier, on a $n^2 = 2K$ donc n^2 est pair.

Supposons que n est impair. Alors, il existe un entier k tel que $n = 2k+1$. Dès lors, grâce aux identités remarquables, $n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. En posant $K = 2k^2 + 2k$ qui est un entier car k est entier, on a $n^2 = 2K + 1$ donc n^2 est impair.

Ainsi, on a bien montré que n et n^2 ont la même parité. □

III. — Nombres premiers

Définition 15

Un entier naturel p est un nombre premier si p admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Exemple 16. Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 20 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.

Remarque 17. 0 n'est pas premier car il admet une infinité de diviseurs positifs (on a vu que tout entier divise 0) et 1 n'est pas premier car 1 possède un seul diviseur positif : lui-même. Ainsi, le plus petit nombre premier est 2. C'est par ailleurs le seul nombre premier pair. En effet, si n est un entier pair strictement supérieur à 2 alors n possède au moins 3 diviseurs : 1, 2 et n.

Théorème 18. — (Admis)

Tout entier naturel $n \geqslant 2$ est soit un nombre premier soit un produit de nombres premiers. De plus, si n n'est pas premier, il existe une seule façon d'écrire n comme un produit de nombres premiers. Cette écriture est appelée la décomposition de n en produit de facteurs premiers.

Exemple 19.

1. La décomposition de 6 en produit de facteurs premiers est $6 = 2 \times 3$.
2. La décomposition de 100 en produit de facteurs premiers est $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$.
3. La décomposition de 77 en produit de facteurs premiers est $77 = 7 \times 11$.

Méthode 20

Pour déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier $n \geqslant 2$, on teste tous les diviseurs premiers successivement et autant de fois que possible.

Exemple 21. Décomposons 4312 en produit de facteurs premiers. Pour cela, Une présentation pratique est la suivante :

4312	2
2156	2
1078	2
539	7
77	7
11	11
1	

À droite, on met les diviseurs premiers successifs et à gauche les quotients obtenus. La colonne de droite contient la décomposition produit de facteurs premiers : $4312 = 2^3 \times 7^2 \times 11$.

IV. — Forme irréductible d'un nombre rationnel

Rappels. Un nombre rationnel est un nombre r qui peut s'écrire sous la forme $r = \frac{a}{b}$ où a est un entier relatif et b est un entier naturel non nul.

Dans la pratique, si r est négatif, on écrira souvent $r = -\frac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels. Ainsi, on écrira $-\frac{17}{25}$ au lieu de $\frac{-17}{25}$ (qui correspond à l'application stricte de la définition).

Définition 22

Soit a, b et d des entiers. On dit que d est un diviseur commun de a et b si d divise a et d divise b.

Exemple 23. Le nombre 5 est un diviseur commun de 10 et 35 car $10 = 2 \times 5$ et $35 = 7 \times 5$ donc 5 divise 10 et 35.

Définition 24

Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul. On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si a et b n'ont pas d'autre diviseur commun positif que 1.

Exemple 25. La fraction $\frac{5}{7}$ est irréductible mais la fraction $\frac{14}{77}$ n'est pas irréductible car 14 et 77 sont tous les deux divisibles par 7.

Théorème 26. — (Admis)

Tout rationnel peut s'écrire de manière unique sous la forme d'une fraction irréductible.

Exemple 27. Le rationnel $\frac{14}{77}$ n'est pas écrit sous forme irréductible mais on peut l'écrire $\frac{2}{11}$ qui est une forme irréductible.

Méthode 28

Pour obtenir la forme irréductible d'un rationnel (positif), on peut utiliser les décompositions en produits de facteurs premiers du numérateur et du dénominateur.

Exemple 29. Considérons le rationnel $r = \frac{140}{4312}$. Pour obtenir l'écriture sous forme de fraction irréductible de r, on peut décomposer 140 et 4312 en produits de facteurs premiers. On a vu, dans l'exemple 21, que $4312 = 2^3 \times 7^2 \times 11$. De plus, $140 = 2^2 \times 5 \times 7$ donc

$$r = \frac{140}{4312} = \frac{2^2 \times 5 \times 7}{2^3 \times 7^2 \times 11} = \frac{5}{2 \times 7 \times 11} = \frac{5}{154}.$$

Propriété 30

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration. On donne ici une nouvelle démonstration de cette propriété.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous la forme d'une fraction irréductible. En élevant au carré, on en déduit que $2 = \frac{a^2}{b^2}$ donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi, a^2 est pair et donc, par la propriété 14, a est pair. Il existe donc un entier k tel que $a = 2k$. Dès lors, $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ donc, puisque $a^2 = 2b^2$, $4k^2 = 2b^2$. En simplifiant par 2, on en déduit que $2k^2 = b^2$ donc b^2 est pair. Toujours d'après la propriété 14, on en déduit que b est pair. Ainsi, a et b sont tous les deux pairs donc 2 est un diviseur commun de a et b. C'est absurde car on a supposé que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible.

On conclut donc que $\sqrt{2}$ est irrationnel. $\square$