⧫ Chapitre 13. — Fonctions de référence

I. — La fonction carré

Définition 1

La fonction carré est la fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2. Si f est la fonction carré alors $f(1) =$, $f(2) =$, $f(-3) =$, $f(0) =$ et $f(\sqrt{2}) =$.

Propriété 3

La fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On aboutit donc au tableau de variation suivant :

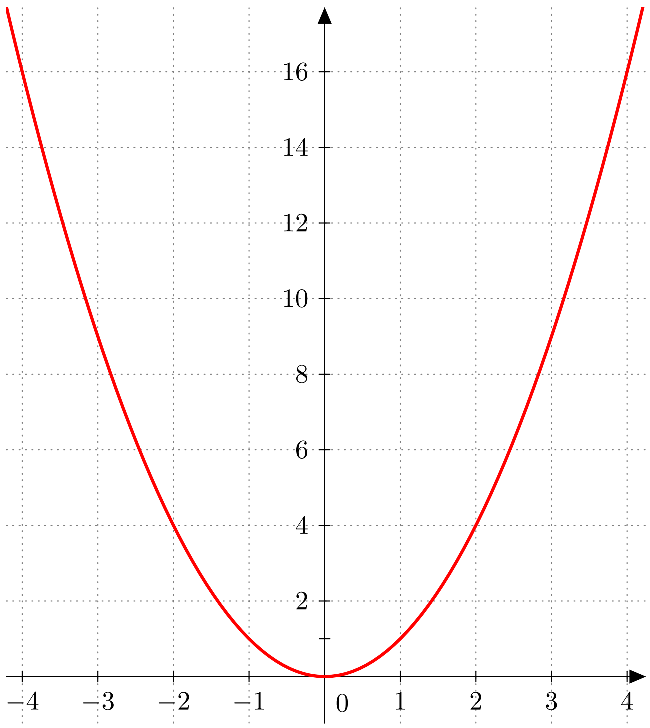
x	
Variation de $x \longmapsto x^2$	

Exemple 4. Comparer $a = \pi^2$ et $b = 9$ puis $c = (-1{,}99)^2$ et $d = 4$.

Propriété 5

La fonction carré est paire.

La courbe représentative $\mathscr{P}$ de la fonction carré dans un repère orthogonal est tracée ci-contre. Comme la fonction carré est paire, $\mathscr{P}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La courbe $\mathscr{P}$ est appelée une parabole.



Propriété 6

Soit a un réel.

1. Si $a > 0$ alors l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = a$ est $\{-\sqrt{a}\,;\sqrt{a}\}$ et l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \leqslant a$ est $[-\sqrt{a}\,;\sqrt{a}]$.
2. Si $a = 0$ alors l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = a$ est $\{0\}$ et l'ensemble des solution de l'inéquation $x^2 \leqslant 0$ est $\{0\}$.
3. Si $a < 0$ alors l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = a$ est vide et l'ensemble des solution de l'inéquation $x^2 \leqslant a$ est vide.

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 > 2$.

II. — La fonction racine carrée

Définition 8

La fonction racine carrée est la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0\,;+\infty[$.

Exemple 9. Si f est la fonction racine carrée alors $f(1) =$, $f(2) =$, $f(4) =$, $f(0) =$ et $f(\sqrt{2}) =$.

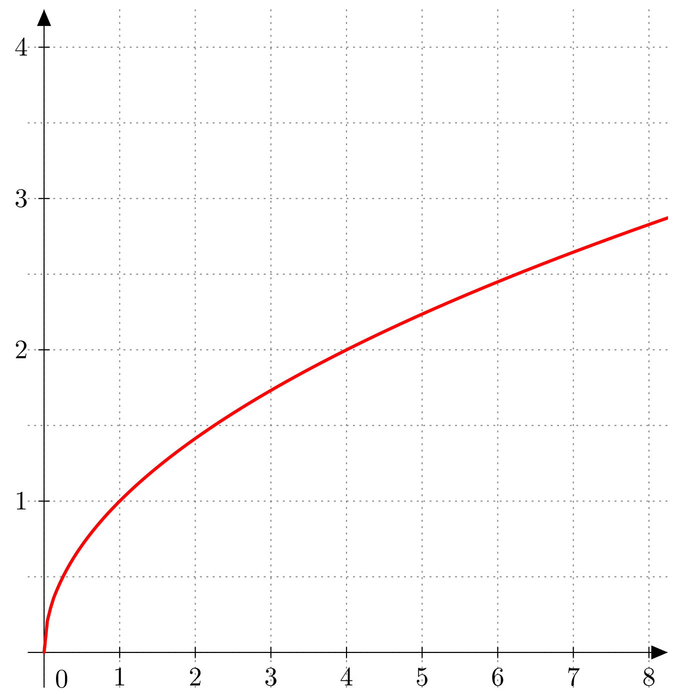
Propriété 10

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Exemple 11. Comparer $a = 2$ et $b = \sqrt{\pi}$ puis $c = 2\sqrt{2}$ et $d = 3$.

Exercice 12. Comparer, sans calculatrice, $a = 2\sqrt{3}$ et $b = 3\sqrt{2}$.

La courbe représentative de la fonction racine carrée dans un repère orthogonal est tracée ci-dessous.



Propriété 13

Pour tous réels strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Remarque 14. En particulier, si a et b sont deux réels strictement positifs alors $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

III. — La fonction cube

Définition 15

La fonction cube est la fonction $f : x \longmapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exemple 16. Si f est la fonction cube alors $f(1) =$, $f(2) =$, $f(-3) =$, $f(0) =$ et $f(\sqrt{2}) =$.

Propriété 17

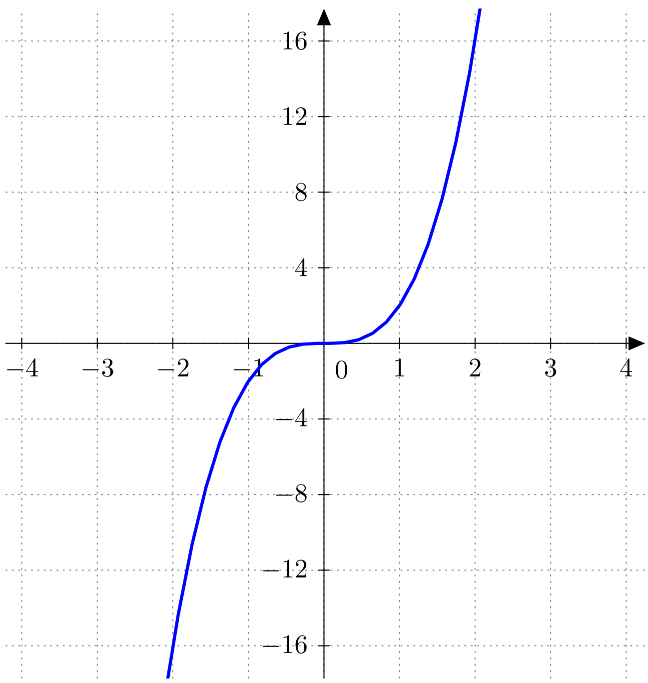
La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 18. Comparer $a = \pi^2$ et $b = 27$ puis $c = 2\sqrt{2}$ et $b = 1{,}5^3$.

Propriété 19

La fonction cube est impaire.

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction cube dans un repère orthogonal est tracée ci-dessous. Comme la fonction cube est impaire, $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

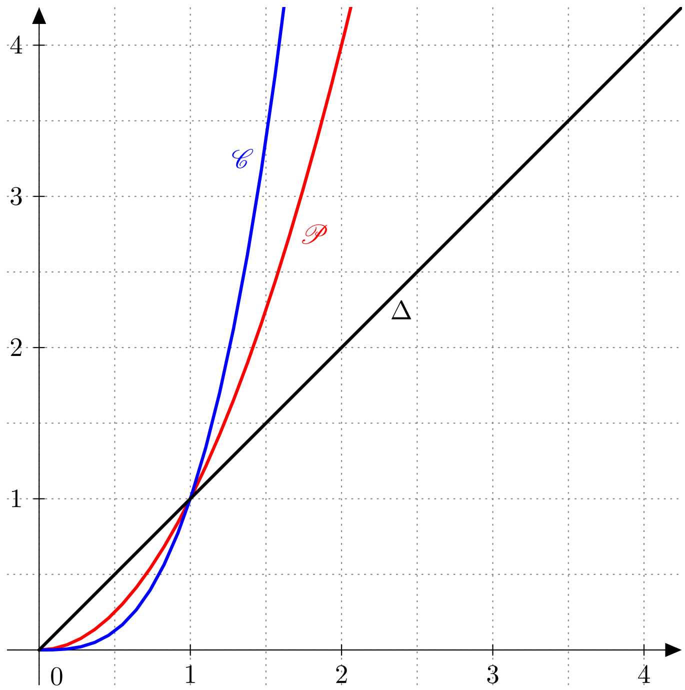


Propriété 20

Soit x un réel positif.

1. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $x^3 \leqslant x^2 \leqslant x$.
2. Si $x \geqslant 1$ alors $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$.

Remarque 21. D'un point de vue graphique, la propriété précédente nous apprend que sur l'intervalle $[0\,;1]$, la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction cube est en dessous de la courbe $\mathscr{P}$ de la fonction carré qui est elle-même en dessous de la droite Δ d'équation $y = x$ et sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{P}$ qui est elle-même au-dessus de la droite Δ.



Exemple 22. Comparer $\sqrt{2}$, 2 et $2\sqrt{2}$. Même question avec $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

IV. — La fonction inverse

Définition 23

La fonction inverse est la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ c'est-à-dire sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$

Exemple 24. Si f est la fonction inverse alors $f(1) =$, $f(2) =$, $f(-3) =$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) =$.

Propriété 25

La fonction inverse est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

On aboutit donc au tableau de variation suivant.

<table>
<tr><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td>Variation de $x \longmapsto \frac{1}{x}$</td><td></td></tr>
</table>

Exemple 26. Comparer $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{3}$ puis $c = -\frac{1}{4}$ et $d = -\frac{1}{\pi}$.

Remarque 27.

1. On ne peut pas appliquer la propriété 25 pour comparer les inverses de nombres de signes différents. Cependant, dans ce cas, la comparaison est évidente car l'un est positif et l'autre négatif. Par exemple, si $a = 2$ et $b = -3$, on ne peut pas appliquer la propriété 23 pour comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ mais il suffit de dire que $\frac{1}{a} = \frac{1}{2} > 0$ et $\frac{1}{b} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} < 0$ donc $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
2. La propriété 25 ne s'applique pas non plus si on a une inégalité du type $a > 0$ ou $a < 0$ pour déterminer une inégalité sur $\frac{1}{a}$. Cependant, dans ce cas encore, il suffit de raisonner sur le signe. Si $a > 0$ alors $\frac{1}{a} > 0$ comme quotient de nombres positifs et si $a < 0$ alors $\frac{1}{a} < 0$ comme quotient de nombres de signes contraires.

Propriété 28

La fonction inverse est impaire.

La courbe représentative $\mathscr{H}$ de la fonction inverse dans un repère orthogonal est tracée ci-dessous. Comme la fonction inverse est impaire, $\mathscr{H}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère. La courbe $\mathscr{H}$ est appelée une hyperbole. Comme la fonction inverse n'est pas définie en 0, la courbe $\mathscr{H}$ est formée de deux parties appelées les branches de l'hyperbole.