⧫ Chapitre 21. Applications linéaires

Dans tout le chapitre, m, n et p sont des entiers naturels non nuls.

I. — Définitions et propriétés générales

1) Définition

Définition 1

Une **application linéaire** de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ est une fonction $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ compatible avec les opérations d'espaces vectoriels c'est-à-dire telle que :

- $\forall\,(u\,;v) \in (\mathbb{R}^p)^2 \; f(u+v) = f(u) + f(v)\,;$
- $\forall v \in \mathbb{R}^p \; \forall \lambda \in \mathbb{R} \; f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

L'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ se note $\mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

Remarque 2. Dans la pratique, on peut montrer qu'une application est linéaire en montrant que, pour tout $(u\,;v) \in (\mathbb{R}^p)^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$.

Exemple 3. Déterminer si les fonctions suivantes sont des applications linéaires.

1. Pour tout réel a, $f_1 : x \longmapsto ax$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. $f_2 : (x, y, z) \longmapsto (x - y + z, 2x - 3y - z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $k \in [\![1, p]\!]$ et $p_k : (x_1, x_2, ..., x_p) \longmapsto x_k$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.
4. L'application nulle $f_3 : v \longmapsto 0_{\mathbb{R}^n}$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.
5. $f_4 : x \longmapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
6. $f_4 : (x, y) \longmapsto (xy, x + y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Propriété 4

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

1. $f(0_{\mathbb{R}_p}) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
2. Pour tout $v \in \mathbb{R}^p$, $f(-v) = -f(v)$.
3. L'image d'une combinaison de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ est la combinaison linéaire des images avec les mêmes coefficients. Autrement dit,

$$\forall (v_1, v_2, ..., v_k) \in (\mathbb{R}^p)^k \; \forall (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) \in \mathbb{R}^p \; f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(v_i).$$

Exemple 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(1, 0) = (1, 1, 0)$ et $f(0, 1) = (0, 1, -1)$. Déterminer $f(-2, 3)$.

Définition 6

Un **endomorphisme** de $\mathbb{R}^p$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans lui-même. On note $\mathscr{L}(\mathbb{R}^p)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^p$.

Exemple 7.

1. Montrer que $f : (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, x - y + z, x + z)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas bijectif.
2. Montrer que $g : (x, y) \longmapsto (x + y, x - y)$ est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^2$.
3. Justifier que $h : (x, y, z) \longmapsto (2x + y, 2y + z)$ est une application linéaire mais pas un endomorphisme.

2) Opérations

Propriété 8. — Combinaisons linéaires

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Pour tous réels α et β, $\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

Propriété 9. — Composition

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^m)$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Alors, $g \circ f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

Exemple 10. En reprenant les fonctions de l'exemple 7, déterminer $h \circ f$.

Propriété 11. — Réciproque

Soit f est un application linéaire bijective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors f^{-1} est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Exemple 12. En reprenant les applications de l'exemple 7, déterminer g^{-1}.

II. — Noyau, image et rang d'une application linéaire

1) Noyau et lien avec l'injectivité

Définition 13

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. L'ensemble

$$\{u \in \mathbb{R}^p \mid f(u) = 0_{\mathbb{R}^n}\}$$

est appelé le **noyau** de f et se note $\ker(f)$ (ou $\ker f$).

Remarque 14.

1. Le noyau d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est donc l'ensemble des antécédents de $0_{\mathbb{R}^n}$ par f.
2. Étant donné que si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, $f(0_{\mathbb{R}^p}) = 0_{\mathbb{R}^n}$, $0_{\mathbb{R}^p}$ est toujours un élément de $\ker(f)$ et en particulier $\ker(f)$ n'est jamais vide.

Propriété 15

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Alors, $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

Propriété 16

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Alors, f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^p}\}$.

Exemple 17.

1. Déterminer le noyau de l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f : (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, x - y + z, x + y - z).$$

Que peut-on en déduire ?

2. Déterminer la noyau de l'application linéaire

$$g : (x, y, z) \longmapsto (x + 2y, 2x - y)$$

de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Que peut-on en déduire ?

3. Déterminer le noyau de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$h : (x, y) \longmapsto (2x + 6y, x + 3y).$$

Que peut-on en déduire ?

2) Image et lien avec la surjectivité

Définition 18

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. L'image directe de $\mathbb{R}^p$ par f, c'est-à-dire

$$\{f(u) \mid u \in \mathbb{R}^p\} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in \mathbb{R}^p \ v = f(u)\}$$

est appelée l'**image** de f et se note $\mathrm{Im}(f)$ (ou $\mathrm{Im}\, f$).

Remarque 19. Étant donné que si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, $f(0_{\mathbb{R}^p}) = 0_{\mathbb{R}^n}$, $0_{\mathbb{R}^n}$ est toujours un élément de $\mathrm{Im}(f)$ et en particulier $\mathrm{Im}(f)$ n'est jamais vide.

Propriété 20

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Alors, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Propriété 21

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Alors, f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n$.

Exemple 22. Déterminer les images des applications linéaires de l'exemple 17. Que peut-on en déduire dans chaque cas ?

3) Rang d'une application linéaire

Définition 23

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. On appelle **rang** de f, et on note $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ c'est-à-dire
$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Exemple 24. Déterminer le rang des applications f, g et h de l'exemple 17.

Remarque 25. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n)$ alors $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\mathbb{R}^n)$ i.e. $\mathrm{rg}(f) \leqslant n$.

4) Image d'une base par une application linéaire

Théorème 26

Une application linéaire $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est entièrement déterminée par l'image d'une base de $\mathbb{R}^p$.

Remarque 27. Une autre façon d'énoncer le théorème précédent est la suivante : si $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est une base de $\mathbb{R}^p$ et si f et g sont deux éléments de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ alors $f = g$ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f(e_i) = g(e_i)$.

Exemple 28. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que $f(1,1,1) = (1,0)$, $f(1,1,0) = (0,1)$ et $f(1,0,0) = (1,1)$. Déterminer $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Propriété 29

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Si $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est une base de $\mathbb{R}^p$ alors $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
En particulier, $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\mathbb{R}^p)$ i.e. $\mathrm{rg}(f) \leqslant p$.

Remarque 30. Rien ne garantit que $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ soit libre donc on ne peut pas affirmer, en général, qu'il s'agit d'une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exemple 31. Déterminer une famille génératrice de l'image des applications linéaires de l'exemple 17. Dans chaque cas, déterminer s'il s'agit d'une base.

III. — Matrice d'une application linéaire

1) Représentation matricielle d'une famille de vecteurs (rappel)

Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ alors, par théorème, tout vecteur v de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire de manière unique sous la forme
$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Les scalaires λ_1, λ_2, ..., λ_n sont appelés les **coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$**. La matrice colonne $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est appelée la **matrice des coordonnées v dans la base $\mathcal{B}$** et on la note

$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(v)$. Si $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$ est une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on appelle **matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$** et on note $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, la j-ème colonne de $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est égale à la matrice colonne $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(v_j)$.

2) Matrice d'une application linéaire

Définition 32

Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Si $\mathcal{B}_p = (e_1, e_2, ..., e_p)$ est une base de $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{B}_n = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ alors la matrice de la famille $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_p))$ dans la base $\mathcal{B}_n$ est appelée la **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$**. Il s'agit d'une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ que l'on note $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(f)$.
Ainsi,

Coordonnées de $f(e_2)$ dans la base $\mathcal{B}_n$

Coordonnées de $f(e_1)$ dans la base $\mathcal{B}_n$

Coordonnées de $f(e_p)$ dans la base $\mathcal{B}_n$

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(f) = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{matrix}$$

Remarque 33. La matrice de f dépend du choix des bases $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$. En revanche, sa taille est toujours $n \times p$.

Exemple 34.

1. On considère l'application linéaire
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x - y, y) \end{array}$$
Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. On considère l'application linéaire
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + z, x - y - z) \end{array}$$
Déterminer la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$.

Définition 35

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On appelle **matrice de f dans la base $\mathcal{B}_n$**, notée $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_n}(f)$, la matrice $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_n}(f)$.

Exemple 36. On considère l'application

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, x+2y+4z, x+y+z) \end{array}$$

1. Justifier que h est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. Justifier que $\mathcal{B} = ((-1,3,1),(-4,5,1),(-1,-1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de h dans cette base.

Remarque 37.

1. Dans n'importe quelles bases, la matrice de l'application nulle de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ est la matrice $0_{n,p}$ et la matrice de l'identité de $\mathbb{R}^n$ est la matrice I_n.

2. Comme une application linéaire f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ est entièrement déterminée par l'image d'une base de $\mathbb{R}^p$, f est également entièrement déterminer par sa matrice dans n'importe quelles bases.

Propriété 38

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Soit $\mathcal{B}_p$ une base de $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{B}_n$ une base $\mathbb{R}^n$. Le rang de f est égal au rang de la matrice $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(f)$. En particulier, le rang de cette matrice est indépendant du choix des bases de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 39. Déterminer le rang des applications f, g et h définies dans les exemples 34 et 36.

3) Application linéaire canoniquement associée à une matrice

On a vu dans ce qui précède que toute application linéaire entre espaces vectoriels peut être représentée par une matrice à condition de choisir une base de chaque espace. Inversement, toute matrice peut être vue comme la matrice d'une application linéaire.

Propriété 40

Soit $M \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ telle que la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ soit la matrice M.

Définition 41

Soit $M \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. L'unique application linéaire définie par la propriété précédente s'appelle l'**application linéaire canoniquement associée** à M.

Exemple 42. Déterminer les applications linéaires canoniquement associées aux matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Matrices et opérations

Propriété 43

Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux applications linéaires, α et β deux réels et v un vecteur de E. On considère une base $\mathcal{B}_p$ de $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{B}_n$ de $\mathbb{R}^n$.

1. Si M est la matrice de f dans $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$ et si V est la matrice de v dans $\mathcal{B}_p$ alors MV est la matrice de $f(v)$ dans $\mathcal{B}_n$.
2. Si M est la matrice de f dans $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$ et N est la matrice de g dans $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$ alors $\alpha M + \beta N$ est la matrice de $\alpha f + \beta g$ dans $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$.

Exemple 44. Soit $v = (1, -3, 2) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de $h(v)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ où h est l'application linéaire de l'exemple 36.

Propriété 45

Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux applications linéaires.
Si $M = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_m}(f)$ et $N = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_m,\mathcal{B}_n}(g)$ alors $NM = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(g \circ f)$.

Exemple 46. On considère les applications f et g de l'exemple 34. Déterminer la matrice de $g \circ f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et la matrice de $f \circ g$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Corollaire 47

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On note M la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice de $f^{\circ k} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$ dans $\mathcal{B}$ est M^k.
2. f est bijectif si et seulement si M est inversible et, dans ce cas, $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M^{-1}$.

Exemple 48. On reprend l'application h de l'exemple 36.

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice de $h^{\circ n}$ dans la base $\mathcal{B}$ de l'exemple 36.
2. **a.** Justifier que h est bijectif.
   b. Déterminer la matrice de h^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
   c. Déterminer la matrice de h^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

IV. — Exercices

Exercice 1. Démontrer que les applications suivantes sont linéaires.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x + 2y - z \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x-y) \end{array}$$

Exercice 2. On considère l'application $f : (x, y) \longmapsto xy$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1. Calculer$f(1, 1)$ et $f(2, 2)$.
2. L'application f est-elle linéaire ?

Exercice 3. Montrer que l'application $f : (x, y, z) \longmapsto (x + 2y, 4x - y + z, 2x + 2y + 3z)$ est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^3$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 4. Déterminer une base du noyau de chacune des applications linéaires suivantes.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x+2y-z) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-z, 2x+y) \end{array}$$

Exercice 5.

1. Montrer que $f : (x,y,z) \longmapsto x-2y+3z$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+3z=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de H.

Exercice 6. Déterminer une base de l'espace image de chacune des applications linéaires suivantes, puis en déduire son rang.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x+2y) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x+2y, y) \end{array}$$

Exercice 7.

1. Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $f(1,0,0)) = (0,1)$, $f(1,1,0) = (1\,;0)$ et $f(1,1,1) = (1,1)$.
2. Déterminer explicitement f.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 8. Déterminer les matrices des applications linéaires f et g dans les bases canoniques.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y-2x+z) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+z, z+x, x+y) \end{array}$$

Exercice 9. On considère l'application linéaire $f : (x,y,z) \longmapsto (5x+5y-2z, x+7y-z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = ((1,0,2),,(0,1,1),(1,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathcal{B}' = ((1,-1),(1,2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 10. On considère l'application linéaire

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (5x+2y, 3x+y) \end{array}$$

1. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. En utilisant A, démontrer que f est bijective et déterminer l'expression de $f^{-1}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 11. On considère l'endomorphisme

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \left(\frac{x-2y+z}{2}, y, \frac{x+2y+z}{2}\right). \end{array}$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - f$ et de $h = 2f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

Exercice 12. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où $\varepsilon_1 = (1,0,1)$, $\varepsilon_2 = (-1,1,0)$ et $\varepsilon_3 = (1,1,1)$.

1. Démontrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la matrice de $f^{\circ n} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$ dans la base $\mathcal{B}'$.