

Bac S – Métropole – Septembre 2013 – Corrigé

Partie A

1. La matrice de transition associée à ce graphe est $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Soit la proposition $H_n : \ll P_n = P_0 A^n \gg$ pour $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, l'égalité est vraie car $A^0 = I_3$. Supposons que H_k soit vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors,

$$P_{k+1} = P_k A = (P_0 A^k) A = P_0 A^{k+1}$$

donc H_{k+1} est vraie.

On a ainsi démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_0 A^n$.

3. On en déduit que $P_4 = P_0 A^4$ donc, à l'aide de la calculatrice, on trouve que l'état probabiliste au bout de 4 semaines est $P_4 \approx (0,01 \quad 0,1 \quad 0,89)$. La probabilité qu'un individu soit sain au bout de 4 semaines est environ 0,01.

Partie B

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $Q_{n+1} = Q_n B$ i.e.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} S_{n+1} & I_{n+1} & M_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} S_n & I_n & M_n \end{pmatrix} A \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{12}S_n + \frac{5}{12}I_n + \frac{1}{6}M_n & \frac{1}{4}S_n + \frac{1}{4}I_n + \frac{1}{2}M_n & \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{3}I_n + \frac{1}{3}M_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \begin{cases} S_{n+1} = \frac{5}{12}S_n + \frac{5}{12}I_n + \frac{1}{6}M_n \\ I_{n+1} = \frac{1}{4}S_n + \frac{1}{4}I_n + \frac{1}{2}M_n \\ M_{n+1} = \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{3}I_n + \frac{1}{3}M_n \end{cases}.$$

2. À l'aide de la calculatrice, on vérifie que $B^2 = \frac{1}{3}J$.
3. a. La suite (Q_n) est une suite géométrique de matrices lignes de raison B donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = Q_0 B^n$. Dès lors, pour tout entier $n \geq 2$, $Q_n = Q_0 B^2$. Or, à l'aide de la calculatrice, on vérifie que $Q_0 B^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ donc

$$\text{pour tout entier } n \geq 2, Q_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

- b. Ainsi, à partir du rang 2, la suite (Q_n) est constante donc la répartition des individus est stable avec une équirépartition entre les trois états.

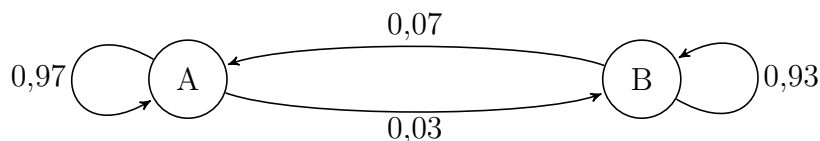
En particulier, la proportion d'individus malades est constante égale à $\frac{1}{3}$ donc le vaccin ne permet pas d'éradiquer le virus.

Bac S – Antilles-Guyane – Septembre 2016 – Corrigé

ATTENTION, dans cet exercice, les états probabilistes sont des matrices colonnes et non des matrices lignes comme dans le cours. Du coup, la matrice de transition A est une matrice stochastique en colonne et non pas en ligne comme dans le cours.

Partie A

1. On peut représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste à deux états : A : « L'ordinateur est sain » et B : « l'ordinateur est défaillant ».



2. On a $a_1 = 0,97a_0 + 0,07b_0 = 0,43$ et $b_1 = 0,03a_0 + 0,93b_0 = 0,57$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} = 0,97a_n + 0,07b_n$ et $b_{n+1} = 0,03a_n + 0,93b_n$.
4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97a_n + 0,07b_n \\ 0,03a_n + 0,93b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,07 \\ 0,03 & 0,93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

i.e. $X_{n+1} = AX_n$.

- b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $X_n = A^n X_0$ ».

Comme $A^0 = I_2$, $A^0 X_0 = I_2 X_0 = X_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors, $X_{k+1} = AX_k = A(A^k X_0) = (AA^k)X_0 = A^{k+1}X_0$ donc $\mathcal{P}(k)$ est vraie et on a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

- c. À l'aide de la calculatrice, on trouve $X_{30} = A^{30} X_0 \approx \begin{pmatrix} 0,687 \\ 0,313 \end{pmatrix}$.

On en déduit qu'au bout de 30 jours, il y aura environ 68,7% des ordinateurs qui seront sains et 31,3% des ordinateurs qui seront défaillants.

Partie B

1. a. Le nombre d'ordinateurs est constant donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$.

Remarque. — On ne sait pas trop pourquoi l'énoncé s'intéresse à $a_{n+1} + b_{n+1}$ plutôt qu'à $a_n + b_n$ qui vaut également 1 pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors que c'est cette dernière égalité qui sera utile pour la suite.

- b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$DX_n + B = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9a_n + 0,07 \\ 0,9b_n + 0,07 \end{pmatrix}.$$

Or, $a_n + b_n = 1$ donc, d'une part, $b_n = 1 - a_n$ et ainsi

$$a_{n+1} = 0,97a_n + 0,07b_n = 0,97a_n + 0,07(1 - a_n) = 0,97a_n + 0,07 - 0,07a_n = 0,9a_n + 0,07$$

et, d'autre part, $b_n = 1 - a_n$ donc

$$b_{n+1} = 0,03a_n + 0,93b_n = 0,03(1 - b_n) + 0,93b_n = 0,03 - 0,03b_n + 0,93b_n = 0,9b_n + 0,03.$$

Ainsi, $X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9a_n + 0,07 \\ 0,9b_n + 0,03 \end{pmatrix}$ et donc $X_{n+1} = DX_n + B$.

- 2. a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $Y_{n+1} = X_{n+1} - 10B = DX_n + B - 10B = DX_n - 9B$. Or, on remarque que $10D = 9I_2$ donc $9B = (9I_2)B = (10D)B = D(10B)$ et ainsi $Y_{n+1} = DX_n - D(10B) = D(X_n - 10B)$ i.e. $\boxed{Y_{n+1} = DY_n}$.
- b.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $X_n = Y_n + 10B = D^n Y_0 + 10B$ i.e. $\boxed{X_n = D^n(X_0 - 10B) + 10B}$.
- c.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $D = 0,9I_2$, $D^n = (0,9I_2)^n = (0,9)^n I_2^n = (0,9)^n I_2$ donc

$$X_n = (0,9)^n I_2(X_0 - 10B) + 10B = (0,9)^n(X_0 - 10B) + 10B \begin{pmatrix} -0,3 \times 0,9^n + 0,7 \\ 0,3 \times 0,9^n + 0,3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, a_n = 0,7 - 0,3 \times 0,9^n \text{ et } b_n = 0,3 + 0,3 \times 0,9^n}$ (et donc $a_{n+1} = 0,7 - 0,3 \times 0,9^{n+1}$ et $b_{n+1} = 0,3 + 0,3 \times 0,9^{n+1}$).

Remarque. — Là encore, pourquoi a_{n+1} et b_{n+1} , je ne sais pas...

- d.** Comme $-1 < 0,9 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,7$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0,3$.

Ainsi, à long terme, chaque jour, environ 70% des ordinateurs seront sains et 30% des ordinateurs seront défectueux.