

Bac S – Métropole – Septembre 2013

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre

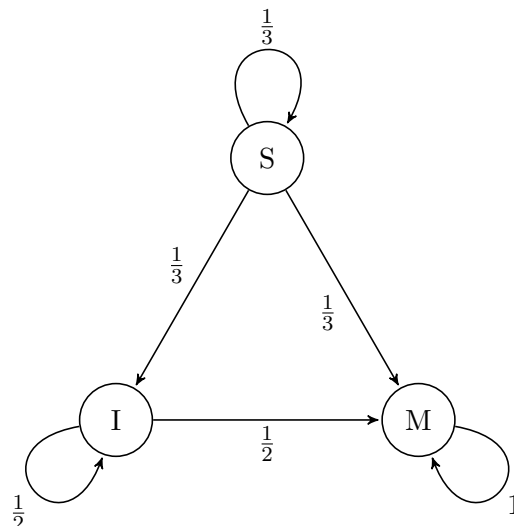
Dans un village imaginaire isolé, une nouvelle maladie contagieuse mais non mortelle a fait son apparition. Rapidement les scientifiques ont découvert qu'un individu pouvait être dans l'un des trois états suivants :

- S : « l'individu est sain, c'est-à-dire non malade et non infecté »,
- I : « l'individu est porteur sain, c'est-à-dire non malade mais infecté »,
- M : « l'individu est malade et infecté ».

Partie A. — Les scientifiques estiment qu'un seul individu est à l'origine de la maladie sur les 100 personnes que compte la population et que, d'une semaine à la suivante, un individu change d'état suivant le processus suivant :

- parmi les individus sains, la proportion de ceux qui deviennent porteurs sains est égale à $\frac{1}{3}$ et la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{3}$,
- parmi les individus porteurs sains, la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{2}$.

La situation peut être représentée par un graphe probabiliste comme ci-contre.



On note $P_n = (s_n \ i_n \ m_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines où s_n, i_n et m_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain ou malade la n -ième semaine.

On a alors $P_0 = (0,99 \ 0 \ 0,01)$ et pour tout entier naturel n ,

$$\begin{cases} s_{n+1} = \frac{1}{3}s_n \\ i_{n+1} = \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n \\ m_{n+1} = \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n + m_n \end{cases}$$

1. Ecrire la matrice A appelée *matrice de transition*, telle que pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} = P_n \times A.$$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.
3. Déterminer l'état probabiliste P_4 au bout de quatre semaines. On pourra arrondir les valeurs à 10^{-2} .

Quelle est la probabilité qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines ?

Partie B. — La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle précédent puisqu'au bout de 4 semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer l'endémie et traitent immédiatement l'ensemble de la population.

L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

On note Q_n la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination. Ainsi, $Q_n = (S_n \ I_n \ M_n)$ où S_n, I_n et

M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la n -ième semaine après la vaccination.

Pour tout entier naturel n , on a alors $Q_{n+1} = Q_n \times B$.

D'après la partie A, $Q_0 = P_4$. Pour la suite, on prend $Q_0 = (0,01 \quad 0,10 \quad 0,89)$ où les coefficients ont été arrondis à 10^{-2} .

1. Exprimer S_{n+1} , I_{n+1} et M_{n+1} en fonction de S_n , I_n et M_n .
2. Déterminer la constante réelle k telle que $B^2 = kJ$ où J est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On en déduit que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $B^n = B^2$.

3. a. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $Q_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

b. Interpréter ce résultat en terme d'évolution de la maladie.

Peut-on espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin ?

Bac S – Antilles-Guyane – Septembre 2016

Parmi les ordinateurs d'un parc informatique, 60 % présentent des failles de sécurité. Afin de pallier ce problème, on demande à un technicien d'intervenir chaque jour pour traiter les défaillances.

On estime que chaque jour, il remet en état 7 % des ordinateurs défaillants, tandis que de nouvelles failles apparaissent chez 3 % des ordinateurs sains. On suppose de plus que le nombre d'ordinateurs est constant sur la période étudiée.

Pour tout entier naturel n , on note a_n la proportion d'ordinateurs sains de ce parc informatique au bout de n jours d'intervention et b_n la proportion d'ordinateurs défaillants au bout de n jours.

Ainsi $a_0 = 0,4$ et $b_0 = 0,6$.

Partie A

1. Décrire la situation précédente à l'aide d'un graphe ou d'un arbre pondéré.
2. Déterminer a_1 et b_1 .
3. Pour tout entier naturel n , exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,07 \\ 0,03 & 0,93 \end{pmatrix}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
 - a. Justifier que pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = AX_n$.
 - b. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $X_n = A^n X_0$.
 - c. Calculer, à l'aide de la calculatrice, X_{30} . En donner une interprétation concrète (les coefficients seront arrondis au millième).

Partie B

1. On pose $D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix}$.
 - a. Justifier que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$.
 - b. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$X_{n+1} = DX_n + B.$$

2. On pose, pour tout entier naturel n , $Y_n = X_n - 10B$.
 - a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $Y_{n+1} = DY_n$.
 - b. On admet que, pour tout entier naturel n , $Y_n = D^n Y_0$.
En déduire que, pour tout entier naturel n , $X_n = D^n (X_0 - 10B) + 10B$.
 - c. Donner l'expression de D^n puis en déduire a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de n .
3. Selon cette étude, que peut-on dire de la proportion d'ordinateurs défaillants sur le long terme ?