II. Divisibilité par un nombre premier

II. Divisibilité par un nombre premier

Propriété 14

Soit n un entier et p un nombre premier. Alors ou bien p divise n ou bien p est premier avec n.

II. Divisibilité par un nombre premier

Propriété 14

Soit n un entier et p un nombre premier. Alors ou bien p divise n ou bien p est premier avec n.

Démonstration.

Notons d le P.G.C.D. de n et p (qui est bien défini car $p \neq 0$).

II. Divisibilité par un nombre premier

Propriété 14

Soit n un entier et p un nombre premier. Alors ou bien p divise n ou bien p est premier avec n.

Démonstration.

Notons d le P.G.C.D. de n et p (qui est bien défini car $p \neq 0$). Alors, par définition, d divise p donc, comme p est premier, $p = 1$ ou $p = d$.

II. Divisibilité par un nombre premier

Propriété 14

Soit n un entier et p un nombre premier. Alors ou bien p divise n ou bien p est premier avec n.

Démonstration.

Notons d le P.G.C.D. de n et p (qui est bien défini car $p \neq 0$). Alors, par définition, d divise p donc, comme p est premier, $p = 1$ ou $p = d$. Si $p = 1$ alors n et p sont premiers entre eux

II. Divisibilité par un nombre premier

Propriété 14

Soit n un entier et p un nombre premier. Alors ou bien p divise n ou bien p est premier avec n.

Démonstration.

Notons d le P.G.C.D. de n et p (qui est bien défini car $p \neq 0$). Alors, par définition, d divise p donc, comme p est premier, $p = 1$ ou $p = d$. Si $p = 1$ alors n et p sont premiers entre eux et si $d = p$ alors, comme d divise n, p divise n. □

Propriété 15. — Lemme d'Euclide

Soit a_1 et a_2 deux entiers et p un nombre premier. Si p divise le produit $a_1 a_2$ alors p divise a_1 ou p divise a_2.

Propriété 15. — Lemme d'Euclide

Soit a_1 et a_2 deux entiers et p un nombre premier. Si p divise le produit $a_1 a_2$ alors p divise a_1 ou p divise a_2.

Démonstration.

Si p divise a_1, la propriété est montrée.

Propriété 15. — Lemme d'Euclide

Soit a_1 et a_2 deux entiers et p un nombre premier. Si p divise le produit $a_1 a_2$ alors p divise a_1 ou p divise a_2.

Démonstration.

Si p divise a_1, la propriété est montrée. Sinon, d'après la propriété 14, p est premier avec a_1 donc, par le théorème de Gauss, p divise a_2. □

Exercice 16

Soit a et b des entiers naturels non nuls. Montrer que $\text{PGCD}(a^2, b^2) = \text{PGCD}(a, b)^2$.

Exercice 16

Soit a et b des entiers naturels non nuls. Montrer que $\text{PGCD}(a^2, b^2) = \text{PGCD}(a, b)^2$.

Solution. Notons $d = \text{PGCD}(a, b)$ et $D = \text{PGCD}(a^2, b^2)$.

Exercice 16

Soit a et b des entiers naturels non nuls. Montrer que $\text{PGCD}(a^2, b^2) = \text{PGCD}(a, b)^2$.

Solution. Notons $d = \text{PGCD}(a, b)$ et $D = \text{PGCD}(a^2, b^2)$.
Considérons les entiers a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$.

Exercice 16

Soit a et b des entiers naturels non nuls. Montrer que $\text{PGCD}(a^2, b^2) = \text{PGCD}(a, b)^2$.

Solution. Notons $d = \text{PGCD}(a, b)$ et $D = \text{PGCD}(a^2, b^2)$.
Considérons les entiers a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$. Alors, par théorème, $D = \text{PGCD}(d^2a'^2, d^2b'^2) = d^2\text{PGCD}(a'^2, b'^2)$.

Exercice 16

Soit a et b des entiers naturels non nuls. Montrer que $\text{PGCD}(a^2, b^2) = \text{PGCD}(a, b)^2$.

Solution. Notons $d = \text{PGCD}(a, b)$ et $D = \text{PGCD}(a^2, b^2)$. Considérons les entiers a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$. Alors, par théorème, $D = \text{PGCD}(d^2a'^2, d^2b'^2) = d^2\text{PGCD}(a'^2, b'^2)$. Montrons que $\text{PGCD}(a'^2, b'^2) = 1$.

Exercice 16

Soit a et b des entiers naturels non nuls. Montrer que $\text{PGCD}(a^2, b^2) = \text{PGCD}(a, b)^2$.

Solution. Notons $d = \text{PGCD}(a, b)$ et $D = \text{PGCD}(a^2, b^2)$. Considérons les entiers a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$. Alors, par théorème, $D = \text{PGCD}(d^2a'^2, d^2b'^2) = d^2\text{PGCD}(a'^2, b'^2)$. Montrons que $\text{PGCD}(a'^2, b'^2) = 1$. Supposons que $\text{PGCD}(a'^2, b'^2) \geqslant 2$.

Exercice 16

Soit a et b des entiers naturels non nuls. Montrer que $\text{PGCD}(a^2, b^2) = \text{PGCD}(a, b)^2$.

Solution. Notons $d = \text{PGCD}(a, b)$ et $D = \text{PGCD}(a^2, b^2)$. Considérons les entiers a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$. Alors, par théorème, $D = \text{PGCD}(d^2a'^2, d^2b'^2) = d^2\text{PGCD}(a'^2, b'^2)$. Montrons que $\text{PGCD}(a'^2, b'^2) = 1$. Supposons que $\text{PGCD}(a'^2, b'^2) \geqslant 2$. Alors, par la propriété 14, $\text{PGCD}(a'^2, b'^2)$ admet un diviseur premier p.

Exercice 16

Soit a et b des entiers naturels non nuls. Montrer que $\text{PGCD}(a^2, b^2) = \text{PGCD}(a, b)^2$.

Solution. Notons $d = \text{PGCD}(a, b)$ et $D = \text{PGCD}(a^2, b^2)$. Considérons les entiers a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$. Alors, par théorème, $D = \text{PGCD}(d^2a'^2, d^2b'^2) = d^2\text{PGCD}(a'^2, b'^2)$. Montrons que $\text{PGCD}(a'^2, b'^2) = 1$. Supposons que $\text{PGCD}(a'^2, b'^2) \geqslant 2$. Alors, par la propriété 14, $\text{PGCD}(a'^2, b'^2)$ admet un diviseur premier p. Dès lors, p divise a'^2 et b'^2 donc, par le lemme d'Euclide, p divise a' et p divise b'.

Exercice 16

Soit a et b des entiers naturels non nuls. Montrer que $\text{PGCD}(a^2, b^2) = \text{PGCD}(a, b)^2$.

Solution. Notons $d = \text{PGCD}(a, b)$ et $D = \text{PGCD}(a^2, b^2)$. Considérons les entiers a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$. Alors, par théorème, $D = \text{PGCD}(d^2a'^2, d^2b'^2) = d^2\text{PGCD}(a'^2, b'^2)$. Montrons que $\text{PGCD}(a'^2, b'^2) = 1$. Supposons que $\text{PGCD}(a'^2, b'^2) \geqslant 2$. Alors, par la propriété 14, $\text{PGCD}(a'^2, b'^2)$ admet un diviseur premier p. Dès lors, p divise a'^2 et b'^2 donc, par le lemme d'Euclide, p divise a' et p divise b'. Ainsi, p divise $\text{PGCD}(a', b')$.

Exercice 16

Soit a et b des entiers naturels non nuls. Montrer que $\text{PGCD}(a^2, b^2) = \text{PGCD}(a, b)^2$.

Solution. Notons $d = \text{PGCD}(a, b)$ et $D = \text{PGCD}(a^2, b^2)$. Considérons les entiers a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$. Alors, par théorème, $D = \text{PGCD}(d^2a'^2, d^2b'^2) = d^2\text{PGCD}(a'^2, b'^2)$. Montrons que $\text{PGCD}(a'^2, b'^2) = 1$. Supposons que $\text{PGCD}(a'^2, b'^2) \geqslant 2$. Alors, par la propriété 14, $\text{PGCD}(a'^2, b'^2)$ admet un diviseur premier p. Dès lors, p divise a'^2 et b'^2 donc, par le lemme d'Euclide, p divise a' et p divise b'. Ainsi, p divise $\text{PGCD}(a', b')$. Mais, par théorème, $\text{PGCD}(a', b') = 1$ donc on aboutit à une contradiction car $p > 1$.

Exercice 16

Soit a et b des entiers naturels non nuls. Montrer que $\text{PGCD}(a^2, b^2) = \text{PGCD}(a, b)^2$.

Solution. Notons $d = \text{PGCD}(a, b)$ et $D = \text{PGCD}(a^2, b^2)$. Considérons les entiers a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$. Alors, par théorème, $D = \text{PGCD}(d^2a'^2, d^2b'^2) = d^2\text{PGCD}(a'^2, b'^2)$. Montrons que $\text{PGCD}(a'^2, b'^2) = 1$. Supposons que $\text{PGCD}(a'^2, b'^2) \geqslant 2$. Alors, par la propriété 14, $\text{PGCD}(a'^2, b'^2)$ admet un diviseur premier p. Dès lors, p divise a'^2 et b'^2 donc, par le lemme d'Euclide, p divise a' et p divise b'. Ainsi, p divise $\text{PGCD}(a', b')$. Mais, par théorème, $\text{PGCD}(a', b') = 1$ donc on aboutit à une contradiction car $p > 1$. Ainsi, $\text{PGCD}(a'^2, b'^2) = 1$ et donc $D = d^2$.

Corollaire 17

Soit q_1, q_2 et p des nombres premiers. Si p divise le produit $q_1 q_2$ alors $p = q_1$ ou $p = q_2$.

Corollaire 17

Soit q_1, q_2 et p des nombres premiers. Si p divise le produit $q_1 q_2$ alors $p = q_1$ ou $p = q_2$.

Démonstration.

D'après le lemme d'Euclide, p divise q_1 ou p divise q_2.

Corollaire 17

Soit q_1, q_2 et p des nombres premiers. Si p divise le produit $q_1 q_2$ alors $p = q_1$ ou $p = q_2$.

Démonstration.

D'après le lemme d'Euclide, p divise q_1 ou p divise q_2. Or, comme q_1 et q_2 sont des nombres premiers, leurs seuls diviseurs sont 1 et eux-même.

Corollaire 17

Soit q_1, q_2 et p des nombres premiers. Si p divise le produit $q_1 q_2$ alors $p = q_1$ ou $p = q_2$.

Démonstration.

D'après le lemme d'Euclide, p divise q_1 ou p divise q_2. Or, comme q_1 et q_2 sont des nombres premiers, leurs seuls diviseurs sont 1 et eux-même. Mais, comme p est premier, $p \neq 1$ donc $p = q_1$ ou $= q_2$. □

Corollaire 18

Soit a_1 et a_2 deux entiers et p un nombre premier. Alors, p est premier avec a_1 et a_2 si et seulement si p est premier avec le produit $a_1 a_2$.

Corollaire 18

Soit a_1 et a_2 deux entiers et p un nombre premier. Alors, p est premier avec a_1 et a_2 si et seulement si p est premier avec le produit $a_1 a_2$.

Démonstration.

D'après la propriété 14, pour tout entier n, le contraire de « p divise n » est « p est premier avec n » (car p est premier).

Corollaire 18

Soit a_1 et a_2 deux entiers et p un nombre premier. Alors, p est premier avec a_1 et a_2 si et seulement si p est premier avec le produit $a_1 a_2$.

Démonstration.

D'après la propriété 14, pour tout entier n, le contraire de « p divise n » est « p est premier avec n » (car p est premier).
Supposons que p divise a_1 ou a_2.

Corollaire 18

Soit a_1 et a_2 deux entiers et p un nombre premier. Alors, p est premier avec a_1 et a_2 si et seulement si p est premier avec le produit $a_1 a_2$.

Démonstration.

D'après la propriété 14, pour tout entier n, le contraire de « p divise n » est « p est premier avec n » (car p est premier).
Supposons que p divise a_1 ou a_2. Alors, p divise tout multiple de a_1 ou de a_2 donc p divise $a_1 a_2$.

Corollaire 18

Soit a_1 et a_2 deux entiers et p un nombre premier. Alors, p est premier avec a_1 et a_2 si et seulement si p est premier avec le produit $a_1 a_2$.

Démonstration.

D'après la propriété 14, pour tout entier n, le contraire de « p divise n » est « p est premier avec n » (car p est premier).
Supposons que p divise a_1 ou a_2. Alors, p divise tout multiple de a_1 ou de a_2 donc p divise $a_1 a_2$. Par contraposition, si p est premier avec $a_1 a_2$ alors p est premier avec a_1 et avec a_2.

Corollaire 18

Soit a_1 et a_2 deux entiers et p un nombre premier. Alors, p est premier avec a_1 et a_2 si et seulement si p est premier avec le produit $a_1 a_2$.

Démonstration.

D'après la propriété 14, pour tout entier n, le contraire de « p divise n » est « p est premier avec n » (car p est premier).
Supposons que p divise a_1 ou a_2. Alors, p divise tout multiple de a_1 ou de a_2 donc p divise $a_1 a_2$. Par contraposition, si p est premier avec $a_1 a_2$ alors p est premier avec a_1 et avec a_2.
Réciproquement, supposons que p divise $a_1 a_2$.

Corollaire 18

Soit a_1 et a_2 deux entiers et p un nombre premier. Alors, p est premier avec a_1 et a_2 si et seulement si p est premier avec le produit $a_1 a_2$.

Démonstration.

D'après la propriété 14, pour tout entier n, le contraire de « p divise n » est « p est premier avec n » (car p est premier).
Supposons que p divise a_1 ou a_2. Alors, p divise tout multiple de a_1 ou de a_2 donc p divise $a_1 a_2$. Par contraposition, si p est premier avec $a_1 a_2$ alors p est premier avec a_1 et avec a_2.
Réciproquement, supposons que p divise $a_1 a_2$. Alors, d'après le lemme d'Euclide, p divise a_1 ou p divise a_2.

Corollaire 18

Soit a_1 et a_2 deux entiers et p un nombre premier. Alors, p est premier avec a_1 et a_2 si et seulement si p est premier avec le produit $a_1 a_2$.

Démonstration.

D'après la propriété 14, pour tout entier n, le contraire de « p divise n » est « p est premier avec n » (car p est premier).
Supposons que p divise a_1 ou a_2. Alors, p divise tout multiple de a_1 ou de a_2 donc p divise $a_1 a_2$. Par contraposition, si p est premier avec $a_1 a_2$ alors p est premier avec a_1 et avec a_2.
Réciproquement, supposons que p divise $a_1 a_2$. Alors, d'après le lemme d'Euclide, p divise a_1 ou p divise a_2. Ainsi, par contraposition, si p est premier avec a_1 et avec a_2, p est premier avec $a_1 a_2$.

Corollaire 18

Soit a_1 et a_2 deux entiers et p un nombre premier. Alors, p est premier avec a_1 et a_2 si et seulement si p est premier avec le produit $a_1 a_2$.

Démonstration.

D'après la propriété 14, pour tout entier n, le contraire de « p divise n » est « p est premier avec n » (car p est premier).
Supposons que p divise a_1 ou a_2. Alors, p divise tout multiple de a_1 ou de a_2 donc p divise $a_1 a_2$. Par contraposition, si p est premier avec $a_1 a_2$ alors p est premier avec a_1 et avec a_2.
Réciproquement, supposons que p divise $a_1 a_2$. Alors, d'après le lemme d'Euclide, p divise a_1 ou p divise a_2. Ainsi, par contraposition, si p est premier avec a_1 et avec a_2, p est premier avec $a_1 a_2$.
On a donc bien montré l'équivalence. □

Remarque 19

La propriété 15 et les corollaires 17 et 18 se généralisent par récurrence à n entiers a_1, a_2, ..., a_n.

Remarque 19

La propriété 15 et les corollaires 17 et 18 se généralisent par récurrence à n entiers a_1, a_2, ..., a_n.

Exercice 20

Montrer que, pour tout nombre premier p, p est premier avec $(p-1)!$.

Remarque 19

La propriété 15 et les corollaires 17 et 18 se généralisent par récurrence à n entiers a_1, a_2, ..., a_n.

Exercice 20

Montrer que, pour tout nombre premier p, p est premier avec $(p-1)!$.

Solution. Soit p un nombre premier.

Remarque 19

La propriété 15 et les corollaires 17 et 18 se généralisent par récurrence à n entiers a_1, a_2, ..., a_n.

Exercice 20

Montrer que, pour tout nombre premier p, p est premier avec $(p-1)!$.

Solution. Soit p un nombre premier. Alors, aucun des nombres 1, 2, ... , $p-1$ n'est une multiple de p donc, par la propriété 14, p est premier avec 1, 2, ... , $p-1$.

Remarque 19

La propriété 15 et les corollaires 17 et 18 se généralisent par récurrence à n entiers a_1, a_2, ..., a_n.

Exercice 20

Montrer que, pour tout nombre premier p, p est premier avec $(p-1)!$.

Solution. Soit p un nombre premier. Alors, aucun des nombres 1, 2, ... , $p-1$ n'est une multiple de p donc, par la propriété 14, p est premier avec 1, 2, ... , $p-1$. Grâce au corollaire 18 (généralisé par récurrence), on conclut que p est premier avec $1 \times 2 \times \cdots \times (p-1)$ i.e. p est premier avec $(p-1)!$.

Correction des exercices

Exercice 33 p. 27

Exercice 33 p. 27

1. Les nombres 2 et 3 sont deux nombres premiers consécutifs.

Exercice 33 p. 27

1. Les nombres 2 et 3 sont deux nombres premiers consécutifs.
2. Supposons que p, $p+1$ et $p+2$ sont des nombres premiers.

Exercice 33 p. 27

1. Les nombres 2 et 3 sont deux nombres premiers consécutifs.
2. Supposons que p, $p+1$ et $p+2$ sont des nombres premiers. Si $p=2$ alors $p+2=4$ n'est pas premier donc $p>2$.

Exercice 33 p. 27

1. Les nombres 2 et 3 sont deux nombres premiers consécutifs.
2. Supposons que p, $p+1$ et $p+2$ sont des nombres premiers. Si $p=2$ alors $p+2=4$ n'est pas premier donc $p>2$. Or, parmi les trois nombres p, $p+1$ et $p+2$, l'un au moins est pair et différent de 2 donc il n'est pas premier.

Exercice 33 p. 27

1. Les nombres 2 et 3 sont deux nombres premiers consécutifs.
2. Supposons que p, $p+1$ et $p+2$ sont des nombres premiers. Si $p=2$ alors $p+2=4$ n'est pas premier donc $p>2$. Or, parmi les trois nombres p, $p+1$ et $p+2$, l'un au moins est pair et différent de 2 donc il n'est pas premier. Ainsi, il n'existe pas trois nombres premiers consécutifs.

Exercice 82 p. 27

Exercice 82 p. 27

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 82 p. 27

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $f(n) = (n+7)(n+11)$.

Exercice 82 p. 27

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $f(n) = (n+7)(n+11)$. Or, comme $n \geqslant 0$, $n+7 > 1$ et $n+11 > 1$

Exercice 82 p. 27

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $f(n) = (n+7)(n+11)$. Or, comme $n \geqslant 0$, $n+7 > 1$ et $n+11 > 1$ donc $f(n)$ admet un diviseur autre 1 et lui-même.

Exercice 82 p. 27

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $f(n) = (n+7)(n+11)$. Or, comme $n \geqslant 0$, $n+7 > 1$ et $n+11 > 1$ donc $f(n)$ admet un diviseur autre 1 et lui-même. Ainsi, $f(n)$ n'est pas premier.
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n+7 < n+11$

Exercice 82 p. 27

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $f(n) = (n+7)(n+11)$. Or, comme $n \geqslant 0$, $n+7 > 1$ et $n+11 > 1$ donc $f(n)$ admet un diviseur autre 1 et lui-même. Ainsi, $f(n)$ n'est pas premier.
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n+7 < n+11$ donc pour que $f(n)$ soit premier, il faut que $n+7 = 1$ i.e. $n = -6$.

Exercice 82 p. 27

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $f(n) = (n+7)(n+11)$. Or, comme $n \geqslant 0$, $n+7 > 1$ et $n+11 > 1$ donc $f(n)$ admet un diviseur autre 1 et lui-même. Ainsi, $f(n)$ n'est pas premier.
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n+7 < n+11$ donc pour que $f(n)$ soit premier, il faut que $n+7 = 1$ i.e. $n = -6$.Réciproquement, $f(-6) = 5$ est un nombre premier.

Exercice 82 p. 27

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $f(n) = (n+7)(n+11)$. Or, comme $n \geqslant 0$, $n+7 > 1$ et $n+11 > 1$ donc $f(n)$ admet un diviseur autre 1 et lui-même. Ainsi, $f(n)$ n'est pas premier.
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n+7 < n+11$ donc pour que $f(n)$ soit premier, il faut que $n+7 = 1$ i.e. $n = -6$.Réciproquement, $f(-6) = 5$ est un nombre premier.
   Ainsi, l'unique entier relatif n tel que $f(n)$ est premier est $n = -6$.

Exercice 85 p. 30

Exercice 85 p. 30 Notons n_1 et n_2 les deux solutions entières de $x^2 - px + q = 0$ avec $n_1 < n_2$.

Exercice 85 p. 30 Notons n_1 et n_2 les deux solutions entières de $x^2 - px + q = 0$ avec $n_1 < n_2$. Alors,
$(x - n_1)(x - n_2) = x^2 - px + q$

Exercice 85 p. 30 Notons n_1 et n_2 les deux solutions entières de $x^2 - px + q = 0$ avec $n_1 < n_2$. Alors,
$(x - n_1)(x - n_2) = x^2 - px + q$ i.e.
$x^2 - (n_1 + n_2)x + n_1 n_2 = x^2 - px + q$

Exercice 85 p. 30 Notons n_1 et n_2 les deux solutions entières de $x^2 - px + q = 0$ avec $n_1 < n_2$. Alors,
$(x - n_1)(x - n_2) = x^2 - px + q$ i.e.
$x^2 - (n_1 + n_2)x + n_1 n_2 = x^2 - px + q$ donc $p = n_1 + n_2$ et $q = n_1 n_2$.

Exercice 85 p. 30 Notons n_1 et n_2 les deux solutions entières de $x^2 - px + q = 0$ avec $n_1 < n_2$. Alors,
$(x - n_1)(x - n_2) = x^2 - px + q$ i.e.
$x^2 - (n_1 + n_2)x + n_1 n_2 = x^2 - px + q$ donc $p = n_1 + n_2$ et $q = n_1 n_2$. Or, q est premier donc cela impose $n_1 = 1$ et $n_2 = q$.

Exercice 85 p. 30 Notons n_1 et n_2 les deux solutions entières de $x^2 - px + q = 0$ avec $n_1 < n_2$. Alors,
$(x - n_1)(x - n_2) = x^2 - px + q$ i.e.
$x^2 - (n_1 + n_2)x + n_1 n_2 = x^2 - px + q$ donc $p = n_1 + n_2$ et $q = n_1 n_2$. Or, q est premier donc cela impose $n_1 = 1$ et $n_2 = q$. Ainsi, $p = n_1 + n_2 = q + 1$ donc p et q sont consécutifs et donc $q = 2$ et $p = 3$ (voir l'exercice 33 p. 27).

Exercice 86 p. 30

Exercice 86 p. 30

1. Supposons que n est premier.

Exercice 86 p. 30

1. Supposons que n est premier. Si $n = 2$ alors $n + 7 = 9$ donc $n + 7$ n'est pas premier.

Exercice 86 p. 30

1. Supposons que n est premier. Si $n = 2$ alors $n + 7 = 9$ donc $n + 7$ n'est pas premier. Sinon, n est impair donc $n + 7$ est un nombre pair supérieur strictement à 2 : il n'est donc pas premier.

Exercice 86 p. 30

1. Supposons que n est premier. Si $n = 2$ alors $n + 7 = 9$ donc $n + 7$ n'est pas premier. Sinon, n est impair donc $n + 7$ est un nombre pair supérieur strictement à 2 : il n'est donc pas premier.
   Dans tous les cas, $n + 7$ n'est pas premier.

Exercice 86 p. 30

1. Supposons que n est premier. Si $n = 2$ alors $n + 7 = 9$ donc $n + 7$ n'est pas premier. Sinon, n est impair donc $n + 7$ est un nombre pair supérieur strictement à 2 : il n'est donc pas premier.
   Dans tous les cas, $n + 7$ n'est pas premier.
2. La réciproque est :

Exercice 86 p. 30

1. Supposons que n est premier. Si $n = 2$ alors $n + 7 = 9$ donc $n + 7$ n'est pas premier. Sinon, n est impair donc $n + 7$ est un nombre pair supérieur strictement à 2 : il n'est donc pas premier.
   Dans tous les cas, $n + 7$ n'est pas premier.
2. La réciproque est : « pour tout entier naturel n, si $n + 7$ n'est pas premier alors n est premier ».

Exercice 86 p. 30

1. Supposons que n est premier. Si $n = 2$ alors $n + 7 = 9$ donc $n + 7$ n'est pas premier. Sinon, n est impair donc $n + 7$ est un nombre pair supérieur strictement à 2 : il n'est donc pas premier.
   Dans tous les cas, $n + 7$ n'est pas premier.
2. La réciproque est : « pour tout entier naturel n, si $n + 7$ n'est pas premier alors n est premier ».
   Cette réciproque est fausse.

Exercice 86 p. 30

1. Supposons que n est premier. Si $n = 2$ alors $n + 7 = 9$ donc $n + 7$ n'est pas premier. Sinon, n est impair donc $n + 7$ est un nombre pair supérieur strictement à 2 : il n'est donc pas premier.
   Dans tous les cas, $n + 7$ n'est pas premier.
2. La réciproque est : « pour tout entier naturel n, si $n + 7$ n'est pas premier alors n est premier ».
   Cette réciproque est fausse. Par exemple, $1 + 7 = 8$ n'est pas premier mais 1 n'est pas premier non plus.

Exercice 86 p. 30

1. Supposons que n est premier. Si $n = 2$ alors $n + 7 = 9$ donc $n + 7$ n'est pas premier. Sinon, n est impair donc $n + 7$ est un nombre pair supérieur strictement à 2 : il n'est donc pas premier.
   Dans tous les cas, $n + 7$ n'est pas premier.
2. La réciproque est : « pour tout entier naturel n, si $n + 7$ n'est pas premier alors n est premier ».
   Cette réciproque est fausse. Par exemple, $1 + 7 = 8$ n'est pas premier mais 1 n'est pas premier non plus.
3. L'implication est fausse. Par exemple, 2 est premier et $2 + 11 = 13$ est premier aussi.

Exercice 86 p. 30

1. Supposons que n est premier. Si $n = 2$ alors $n + 7 = 9$ donc $n + 7$ n'est pas premier. Sinon, n est impair donc $n + 7$ est un nombre pair supérieur strictement à 2 : il n'est donc pas premier.
   Dans tous les cas, $n + 7$ n'est pas premier.
2. La réciproque est : « pour tout entier naturel n, si $n + 7$ n'est pas premier alors n est premier ».
   Cette réciproque est fausse. Par exemple, $1 + 7 = 8$ n'est pas premier mais 1 n'est pas premier non plus.
3. L'implication est fausse. Par exemple, 2 est premier et $2 + 11 = 13$ est premier aussi.
   Il est assez simple de voir, par le même raisonnement que dans la question 1, que c'est le seul contre-exemple possible.

Exercice 88 p. 30

Exercice 88 p. 30

1. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3 et r le reste de p modulo 3.

Exercice 88 p. 30

1. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3 et r le reste de p modulo 3. Alors, $r \neq 0$ car sinon 3 diviserait p et comme $p > 3$, p ne serait pas premier.

Exercice 88 p. 30

1. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3 et r le reste de p modulo 3. Alors, $r \neq 0$ car sinon 3 diviserait p et comme $p > 3$, p ne serait pas premier. Ainsi, $r = 1$ ou $r = 2$.

Exercice 88 p. 30

1. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3 et r le reste de p modulo 3. Alors, $r \neq 0$ car sinon 3 diviserait p et comme $p > 3$, p ne serait pas premier. Ainsi, $r = 1$ ou $r = 2$. Si $r = 1$ alors $p \equiv 1\ [3]$ donc $8p^2 + 1 \equiv 8 \times 1^2 + 1\ [3] \equiv 0\ [3]$

Exercice 88 p. 30

1. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3 et r le reste de p modulo 3. Alors, $r \neq 0$ car sinon 3 diviserait p et comme $p > 3$, p ne serait pas premier. Ainsi, $r = 1$ ou $r = 2$. Si $r = 1$ alors $p \equiv 1\ [3]$ donc $8p^2 + 1 \equiv 8 \times 1^2 + 1\ [3] \equiv 0\ [3]$ donc 3 divise $8p^2 + 1$.

Exercice 88 p. 30

1. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3 et r le reste de p modulo 3. Alors, $r \neq 0$ car sinon 3 diviserait p et comme $p > 3$, p ne serait pas premier. Ainsi, $r = 1$ ou $r = 2$. Si $r = 1$ alors $p \equiv 1\ [3]$ donc $8p^2 + 1 \equiv 8 \times 1^2 + 1\ [3] \equiv 0\ [3]$ donc 3 divise $8p^2 + 1$. De plus, $8p^2 + 1 > 3$ donc $8p^2 + 1$ n'est pas premier.

Exercice 88 p. 30

1. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3 et r le reste de p modulo 3. Alors, $r \neq 0$ car sinon 3 diviserait p et comme $p > 3$, p ne serait pas premier. Ainsi, $r = 1$ ou $r = 2$.
   Si $r = 1$ alors $p \equiv 1\ [3]$ donc $8p^2 + 1 \equiv 8 \times 1^2 + 1\ [3] \equiv 0\ [3]$ donc 3 divise $8p^2 + 1$. De plus, $8p^2 + 1 > 3$ donc $8p^2 + 1$ n'est pas premier.
   Si $r = 2$ alors $p \equiv 2\ [3]$ donc $8p^2 + 1 \equiv 8 \times 2^2 + 1\ [3] \equiv 0\ [3]$

Exercice 88 p. 30

1. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3 et r le reste de p modulo 3. Alors, $r \neq 0$ car sinon 3 diviserait p et comme $p > 3$, p ne serait pas premier. Ainsi, $r = 1$ ou $r = 2$.
   Si $r = 1$ alors $p \equiv 1\ [3]$ donc $8p^2 + 1 \equiv 8 \times 1^2 + 1\ [3] \equiv 0\ [3]$ donc 3 divise $8p^2 + 1$. De plus, $8p^2 + 1 > 3$ donc $8p^2 + 1$ n'est pas premier.
   Si $r = 2$ alors $p \equiv 2\ [3]$ donc $8p^2 + 1 \equiv 8 \times 2^2 + 1\ [3] \equiv 0\ [3]$ donc 3 divise $8p^2 + 1$.

Exercice 88 p. 30

1. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3 et r le reste de p modulo 3. Alors, $r \neq 0$ car sinon 3 diviserait p et comme $p > 3$, p ne serait pas premier. Ainsi, $r = 1$ ou $r = 2$.
   Si $r = 1$ alors $p \equiv 1\ [3]$ donc $8p^2 + 1 \equiv 8 \times 1^2 + 1\ [3] \equiv 0\ [3]$ donc 3 divise $8p^2 + 1$. De plus, $8p^2 + 1 > 3$ donc $8p^2 + 1$ n'est pas premier.
   Si $r = 2$ alors $p \equiv 2\ [3]$ donc $8p^2 + 1 \equiv 8 \times 2^2 + 1\ [3] \equiv 0\ [3]$ donc 3 divise $8p^2 + 1$. De plus, $8p^2 + 1 > 3$ donc $8p^2 + 1$ n'est pas premier.

Exercice 88 p. 30

1. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3 et r le reste de p modulo 3. Alors, $r \neq 0$ car sinon 3 diviserait p et comme $p > 3$, p ne serait pas premier. Ainsi, $r = 1$ ou $r = 2$.
   Si $r = 1$ alors $p \equiv 1\ [3]$ donc $8p^2 + 1 \equiv 8 \times 1^2 + 1\ [3] \equiv 0\ [3]$ donc 3 divise $8p^2 + 1$. De plus, $8p^2 + 1 > 3$ donc $8p^2 + 1$ n'est pas premier.
   Si $r = 2$ alors $p \equiv 2\ [3]$ donc $8p^2 + 1 \equiv 8 \times 2^2 + 1\ [3] \equiv 0\ [3]$ donc 3 divise $8p^2 + 1$. De plus, $8p^2 + 1 > 3$ donc $8p^2 + 1$ n'est pas premier.
   Comme $8p^2 + 1 \geqslant 2$, on conclut que $8p^2 + 1$ est composé.

Exercice 88 p. 30

1. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3 et r le reste de p modulo 3. Alors, $r \neq 0$ car sinon 3 diviserait p et comme $p > 3$, p ne serait pas premier. Ainsi, $r = 1$ ou $r = 2$.
   Si $r = 1$ alors $p \equiv 1\ [3]$ donc $8p^2 + 1 \equiv 8 \times 1^2 + 1\ [3] \equiv 0\ [3]$ donc 3 divise $8p^2 + 1$. De plus, $8p^2 + 1 > 3$ donc $8p^2 + 1$ n'est pas premier.
   Si $r = 2$ alors $p \equiv 2\ [3]$ donc $8p^2 + 1 \equiv 8 \times 2^2 + 1\ [3] \equiv 0\ [3]$ donc 3 divise $8p^2 + 1$. De plus, $8p^2 + 1 > 3$ donc $8p^2 + 1$ n'est pas premier.
   Comme $8p^2 + 1 \geqslant 2$, on conclut que $8p^2 + 1$ est composé.
2. La réciproque est

Exercice 88 p. 30

1. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3 et r le reste de p modulo 3. Alors, $r \neq 0$ car sinon 3 diviserait p et comme $p > 3$, p ne serait pas premier. Ainsi, $r = 1$ ou $r = 2$.
   Si $r = 1$ alors $p \equiv 1\ [3]$ donc $8p^2 + 1 \equiv 8 \times 1^2 + 1\ [3] \equiv 0\ [3]$ donc 3 divise $8p^2 + 1$. De plus, $8p^2 + 1 > 3$ donc $8p^2 + 1$ n'est pas premier.
   Si $r = 2$ alors $p \equiv 2\ [3]$ donc $8p^2 + 1 \equiv 8 \times 2^2 + 1\ [3] \equiv 0\ [3]$ donc 3 divise $8p^2 + 1$. De plus, $8p^2 + 1 > 3$ donc $8p^2 + 1$ n'est pas premier.
   Comme $8p^2 + 1 \geqslant 2$, on conclut que $8p^2 + 1$ est composé.
2. La réciproque est « pour tout entier $p > 3$, si $8p^2 + 1$ est composé alors p est premier ».

Exercice 88 p. 30

1. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3 et r le reste de p modulo 3. Alors, $r \neq 0$ car sinon 3 diviserait p et comme $p > 3$, p ne serait pas premier. Ainsi, $r = 1$ ou $r = 2$.
   Si $r = 1$ alors $p \equiv 1\ [3]$ donc $8p^2 + 1 \equiv 8 \times 1^2 + 1\ [3] \equiv 0\ [3]$ donc 3 divise $8p^2 + 1$. De plus, $8p^2 + 1 > 3$ donc $8p^2 + 1$ n'est pas premier.
   Si $r = 2$ alors $p \equiv 2\ [3]$ donc $8p^2 + 1 \equiv 8 \times 2^2 + 1\ [3] \equiv 0\ [3]$ donc 3 divise $8p^2 + 1$. De plus, $8p^2 + 1 > 3$ donc $8p^2 + 1$ n'est pas premier.
   Comme $8p^2 + 1 \geqslant 2$, on conclut que $8p^2 + 1$ est composé.
2. La réciproque est « pour tout entier $p > 3$, si $8p^2 + 1$ est composé alors p est premier ».
   Cette réciproque est fausse. Par exemple,
   $8 \times 4^2 + 1 = 129 = 3 \times 43$ est composé mais 4 n'est pas premier.