

## Chapitre 5. Nombres premiers

# I. Définition

# I. Définition

## 1. Définition

# I. Définition

## 1. Définition

### Définition 1

On dit qu'un entier naturel  $p$  est un nombre premier si  $p$  admet exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et  $p$ .

Un entier  $n \geq 2$  qui n'est pas premier est dit composé.

# I. Définition

## 1. Définition

### Définition 1

On dit qu'un entier naturel  $p$  est un nombre premier si  $p$  admet exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et  $p$ .

Un entier  $n \geq 2$  qui n'est pas premier est dit composé.

### Exemple 2

1. La liste des nombres premiers inférieurs à 20 est

# I. Définition

## 1. Définition

### Définition 1

On dit qu'un entier naturel  $p$  est un nombre premier si  $p$  admet exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et  $p$ .

Un entier  $n \geq 2$  qui n'est pas premier est dit composé.

### Exemple 2

1. La liste des nombres premiers inférieurs à 20 est 2 ;

# I. Définition

## 1. Définition

### Définition 1

On dit qu'un entier naturel  $p$  est un nombre premier si  $p$  admet exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et  $p$ .

Un entier  $n \geq 2$  qui n'est pas premier est dit composé.

### Exemple 2

1. La liste des nombres premiers inférieurs à 20 est 2 ; 3 ;

# I. Définition

## 1. Définition

### Définition 1

On dit qu'un entier naturel  $p$  est un nombre premier si  $p$  admet exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et  $p$ .

Un entier  $n \geq 2$  qui n'est pas premier est dit composé.

### Exemple 2

1. La liste des nombres premiers inférieurs à 20 est 2 ; 3 ; 5 ;



# I. Définition

## 1. Définition

### Définition 1

On dit qu'un entier naturel  $p$  est un nombre premier si  $p$  admet exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et  $p$ .

Un entier  $n \geq 2$  qui n'est pas premier est dit composé.

### Exemple 2

1. La liste des nombres premiers inférieurs à 20 est 2 ; 3 ; 5 ; 7 ;

# I. Définition

## 1. Définition

### Définition 1

On dit qu'un entier naturel  $p$  est un nombre premier si  $p$  admet exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et  $p$ .

Un entier  $n \geq 2$  qui n'est pas premier est dit composé.

### Exemple 2

1. La liste des nombres premiers inférieurs à 20 est 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ;

# I. Définition

## 1. Définition

### Définition 1

On dit qu'un entier naturel  $p$  est un nombre premier si  $p$  admet exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et  $p$ .

Un entier  $n \geq 2$  qui n'est pas premier est dit composé.

### Exemple 2

1. La liste des nombres premiers inférieurs à 20 est 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ;

# I. Définition

## 1. Définition

### Définition 1

On dit qu'un entier naturel  $p$  est un nombre premier si  $p$  admet exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et  $p$ .

Un entier  $n \geq 2$  qui n'est pas premier est dit composé.

### Exemple 2

1. La liste des nombres premiers inférieurs à 20 est 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ;

# I. Définition

## 1. Définition

### Définition 1

On dit qu'un entier naturel  $p$  est un nombre premier si  $p$  admet exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et  $p$ .

Un entier  $n \geq 2$  qui n'est pas premier est dit composé.

### Exemple 2

1. La liste des nombres premiers inférieurs à 20 est 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19.

# I. Définition

## 1. Définition

### Définition 1

On dit qu'un entier naturel  $p$  est un nombre premier si  $p$  admet exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et  $p$ .

Un entier  $n \geq 2$  qui n'est pas premier est dit composé.

### Exemple 2

1. La liste des nombres premiers inférieurs à 20 est 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19.
2. Les nombres  $4 = 2 \times 2$ ,  $6 = 2 \times 3$  et  $15 = 3 \times 5$  sont composés.

## Remarque 3

1. 0 n'est pas premier car il admet une infinité de diviseurs positifs (tout entier naturel divise 0).

## Remarque 3

1. 0 n'est pas premier car il admet une infinité de diviseurs positifs (tout entier naturel divise 0).
2. 1 n'est pas premier car il possède un seul diviseur positif (lui-même).



## Remarque 3

1. 0 n'est pas premier car il admet une infinité de diviseurs positifs (tout entier naturel divise 0).
2. 1 n'est pas premier car il possède un seul diviseur positif (lui-même).
3. Ainsi, 0 et 1 ne sont ni premiers ni composés. En revanche, tout entier  $n \geq 2$  est soit premier soit composé.

## Remarque 3

1. 0 n'est pas premier car il admet une infinité de diviseurs positifs (tout entier naturel divise 0).
2. 1 n'est pas premier car il possède un seul diviseur positif (lui-même).
3. Ainsi, 0 et 1 ne sont ni premiers ni composés. En revanche, tout entier  $n \geq 2$  est soit premier soit composé.
4. 2 est le seul nombre premier pair car si  $n$  est un entier pair supérieur ou égal à 4 alors  $n$  admet au moins 3 diviseurs positifs distincts : 1, 2 et  $n$ .

## Exercice 4

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $A_n = n^2 + 4n + 3$ . Déterminer, en fonction de  $n$ , si  $n$  est premier ou composé.

## Exercice 4

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $A_n = n^2 + 4n + 3$ . Déterminer, en fonction de  $n$ , si  $n$  est premier ou composé.

**Solution.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = (n + 1)(n + 3)$  et  $n + 1 < n + 3$  donc si  $A_n$  est premier alors  $n + 1 = 1$  i.e.  $n = 0$ .

## Exercice 4

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $A_n = n^2 + 4n + 3$ . Déterminer, en fonction de  $n$ , si  $n$  est premier ou composé.

**Solution.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = (n + 1)(n + 3)$  et  $n + 1 < n + 3$  donc si  $A_n$  est premier alors  $n + 1 = 1$  i.e.  $n = 0$ . Réciproquement,  $A_0 = 3$  est premier donc on conclut que  $A_n$  est premier si et seulement si  $n = 0$ .

## Exercice 4

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $A_n = n^2 + 4n + 3$ . Déterminer, en fonction de  $n$ , si  $n$  est premier ou composé.

**Solution.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = (n + 1)(n + 3)$  et  $n + 1 < n + 3$  donc si  $A_n$  est premier alors  $n + 1 = 1$  i.e.  $n = 0$ . Réciproquement,  $A_0 = 3$  est premier donc on conclut que  $A_n$  est premier si et seulement si  $n = 0$ .

*Remarque.* La réciproque est indispensable. En effet, on pourrait faire le même raisonnement avec

$B_n = n^2 + 5n + 4 = (n + 1)(n + 4)$  et on trouverait que si  $A_n$  est premier alors  $n = 0$ . Pour autant,  $B_0 = 4$  n'est pas premier.

## 2. Étudier la primalité d'un entier

## 2. Étudier la primalité d'un entier

### Propriété 5

Tout entier  $n \geq 2$  admet un diviseur premier.



## 2. Étudier la primalité d'un entier

### Propriété 5

Tout entier  $n \geq 2$  admet un diviseur premier.

Démonstration.

Soit un entier  $n \geq 2$ .

## 2. Étudier la primalité d'un entier

### Propriété 5

Tout entier  $n \geq 2$  admet un diviseur premier.

Démonstration.

Soit un entier  $n \geq 2$ . Comme  $n > 1$ , l'ensemble  $\mathcal{D}_+(n)$  des diviseurs  $d > 1$  de  $n$  est non vide (il contient au moins  $n$ ).

## 2. Étudier la primalité d'un entier

### Propriété 5

Tout entier  $n \geq 2$  admet un diviseur premier.

Démonstration.

Soit un entier  $n \geq 2$ . Comme  $n > 1$ , l'ensemble  $\mathcal{D}_+(n)$  des diviseurs  $d > 1$  de  $n$  est non vide (il contient au moins  $n$ ). Notons  $p$  le plus petit élément de  $\mathcal{D}_+(n)$ .

## 2. Étudier la primalité d'un entier

### Propriété 5

Tout entier  $n \geq 2$  admet un diviseur premier.

Démonstration.

Soit un entier  $n \geq 2$ . Comme  $n > 1$ , l'ensemble  $\mathcal{D}_+(n)$  des diviseurs  $d > 1$  de  $n$  est non vide (il contient au moins  $n$ ). Notons  $p$  le plus petit élément de  $\mathcal{D}_+(n)$ . Si  $p$  n'est pas premier, il admet un diviseur positif  $d$  autre que 1 et  $p$ .

## 2. Étudier la primalité d'un entier

### Propriété 5

Tout entier  $n \geq 2$  admet un diviseur premier.

Démonstration.

Soit un entier  $n \geq 2$ . Comme  $n > 1$ , l'ensemble  $\mathcal{D}_+(n)$  des diviseurs  $d > 1$  de  $n$  est non vide (il contient au moins  $n$ ). Notons  $p$  le plus petit élément de  $\mathcal{D}_+(n)$ . Si  $p$  n'est pas premier, il admet un diviseur positif  $d$  autre que 1 et  $p$ . Ainsi,  $1 < d < p$ .

## 2. Étudier la primalité d'un entier

### Propriété 5

Tout entier  $n \geq 2$  admet un diviseur premier.

Démonstration.

Soit un entier  $n \geq 2$ . Comme  $n > 1$ , l'ensemble  $\mathcal{D}_+(n)$  des diviseurs  $d > 1$  de  $n$  est non vide (il contient au moins  $n$ ). Notons  $p$  le plus petit élément de  $\mathcal{D}_+(n)$ . Si  $p$  n'est pas premier, il admet un diviseur positif  $d$  autre que 1 et  $p$ . Ainsi,  $1 < d < p$ . Or,  $d$  divise  $p$  et  $p$  divise  $n$  donc, par transitivité de la divisibilité,  $d$  divise  $n$ .

## 2. Étudier la primalité d'un entier

### Propriété 5

Tout entier  $n \geq 2$  admet un diviseur premier.

Démonstration.

Soit un entier  $n \geq 2$ . Comme  $n > 1$ , l'ensemble  $\mathcal{D}_+(n)$  des diviseurs  $d > 1$  de  $n$  est non vide (il contient au moins  $n$ ). Notons  $p$  le plus petit élément de  $\mathcal{D}_+(n)$ . Si  $p$  n'est pas premier, il admet un diviseur positif  $d$  autre que 1 et  $p$ . Ainsi,  $1 < d < p$ . Or,  $d$  divise  $p$  et  $p$  divise  $n$  donc, par transitivité de la divisibilité,  $d$  divise  $n$ . C'est absurde par minimalité de  $p$ .

## 2. Étudier la primalité d'un entier

### Propriété 5

Tout entier  $n \geq 2$  admet un diviseur premier.

Démonstration.

Soit un entier  $n \geq 2$ . Comme  $n > 1$ , l'ensemble  $\mathcal{D}_+(n)$  des diviseurs  $d > 1$  de  $n$  est non vide (il contient au moins  $n$ ). Notons  $p$  le plus petit élément de  $\mathcal{D}_+(n)$ . Si  $p$  n'est pas premier, il admet un diviseur positif  $d$  autre que 1 et  $p$ . Ainsi,  $1 < d < p$ . Or,  $d$  divise  $p$  et  $p$  divise  $n$  donc, par transitivité de la divisibilité,  $d$  divise  $n$ . C'est absurde par minimalité de  $p$ . Ainsi,  $p$  est premier. □



## Remarque 6

On a en fait montré un résultat plus précis que le résultat annoncé : le plus petit diviseur de  $n$  strictement supérieur à 1 est un nombre premier.

## Remarque 6

On a en fait montré un résultat plus précis que le résultat annoncé : le plus petit diviseur de  $n$  strictement supérieur à 1 est un nombre premier. Ainsi, la démonstration prouve que tout entier  $n \geq 2$  admet un diviseur premier de façon constructive : elle montre qu'un tel diviseur existe en donnant une façon explicite de le calculer.

### Corollaire 7

1. Tout entier composé  $n \geq 2$  admet un diviseur premier inférieur ou égal à  $\sqrt{n}$ .

### Corollaire 7

1. Tout entier composé  $n \geq 2$  admet un diviseur premier inférieur ou égal à  $\sqrt{n}$ .
2. Un entier  $n \geq 2$  est premier si et seulement si  $n$  n'a pas de diviseur premier inférieur ou égal à  $E(\sqrt{n})$ .

## Demonstration

1. Soit un entier composé  $n \geq 2$ .

## Demonstration

1. Soit un entier composé  $n \geq 2$ . Alors, il existe deux entiers  $d$  et  $d'$  tels que  $1 < d \leq d' < n$  tels que  $n = dd'$ .

## Demonstration

1. Soit un entier composé  $n \geq 2$ . Alors, il existe deux entiers  $d$  et  $d'$  tels que  $1 < d \leq d' < n$  tels que  $n = dd'$ . Si  $d > \sqrt{n}$  alors  $d' > \sqrt{n}$  donc  $n = dd' > \sqrt{n}^2 = n$  ce qui est absurde.

## Demonstration

1. Soit un entier composé  $n \geq 2$ . Alors, il existe deux entiers  $d$  et  $d'$  tels que  $1 < d \leq d' < n$  tels que  $n = dd'$ . Si  $d > \sqrt{n}$  alors  $d' > \sqrt{n}$  donc  $n = dd' > \sqrt{n}^2 = n$  ce qui est absurde. Ainsi,  $d \leq \sqrt{n}$ .



## Demonstration

1. Soit un entier composé  $n \geq 2$ . Alors, il existe deux entiers  $d$  et  $d'$  tels que  $1 < d \leq d' < n$  tels que  $n = dd'$ . Si  $d > \sqrt{n}$  alors  $d' > \sqrt{n}$  donc  $n = dd' > \sqrt{n}^2 = n$  ce qui est absurde. Ainsi,  $d \leq \sqrt{n}$ . Or,  $d \geq 2$  donc, d'après la propriété 5,  $d$  admet un diviseur premier  $p$ .

## Demonstration

1. Soit un entier composé  $n \geq 2$ . Alors, il existe deux entiers  $d$  et  $d'$  tels que  $1 < d \leq d' < n$  tels que  $n = dd'$ . Si  $d > \sqrt{n}$  alors  $d' > \sqrt{n}$  donc  $n = dd' > \sqrt{n}^2 = n$  ce qui est absurde. Ainsi,  $d \leq \sqrt{n}$ . Or,  $d \geq 2$  donc, d'après la propriété 5,  $d$  admet un diviseur premier  $p$ . Or,  $p \leq d \leq \sqrt{n}$  donc  $p \leq \sqrt{n}$ . De plus, comme  $p \mid d$  et  $d \mid n$ ,  $p \mid n$ .

2. Soit un entier  $n \geq 2$ .

2. Soit un entier  $n \geq 2$ . Alors, ou bien  $n$  est premier ou bien  $n$  est composé.

2. Soit un entier  $n \geq 2$ . Alors, ou bien  $n$  est premier ou bien  $n$  est composé.

Si  $n$  est premier alors son seul diviseur premier est lui-même et, comme  $n \geq 2$ ,  $E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} < n$  donc  $n$  n'a pas de diviseur premier inférieur ou égal à  $E(\sqrt{n})$ .

2. Soit un entier  $n \geq 2$ . Alors, ou bien  $n$  est premier ou bien  $n$  est composé.

Si  $n$  est premier alors son seul diviseur premier est lui-même et, comme  $n \geq 2$ ,  $E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} < n$  donc  $n$  n'a pas de diviseur premier inférieur ou égal à  $E(\sqrt{n})$ .

Si  $n$  est composé alors, d'après le point 1.,  $n$  admet un diviseur premier  $p$  inférieur à  $\sqrt{n}$  et, comme  $p$  est entier, on a donc  $p \leq E(\sqrt{n})$  (puisque, par définition,  $E(\sqrt{n})$  est le plus grand entier inférieur ou égal à  $\sqrt{n}$ ).

2. Soit un entier  $n \geq 2$ . Alors, ou bien  $n$  est premier ou bien  $n$  est composé.

Si  $n$  est premier alors son seul diviseur premier est lui-même et, comme  $n \geq 2$ ,  $E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} < n$  donc  $n$  n'a pas de diviseur premier inférieur ou égal à  $E(\sqrt{n})$ .

Si  $n$  est composé alors, d'après le point 1.,  $n$  admet un diviseur premier  $p$  inférieur à  $\sqrt{n}$  et, comme  $p$  est entier, on a donc  $p \leq E(\sqrt{n})$  (puisque, par définition,  $E(\sqrt{n})$  est le plus grand entier inférieur ou égal à  $\sqrt{n}$ ).

On conclut donc que  $n$  est premier si et seulement si  $n$  n'a pas de diviseur premier inférieur ou égal à  $E(\sqrt{n})$ .  $\square$

## Méthode 8

Le résultat précédent montre donc que, pour tester si un entier est premier, il suffit de tester s'il admet des diviseurs premiers inférieurs ou égal à la partie entière de sa racine carrée.



## Méthode 8

Le résultat précédent montre donc que, pour tester si un entier est premier, il suffit de tester s'il admet des diviseurs premiers inférieurs ou égal à la partie entière de sa racine carrée.

## Exemple 9

Le nombre 131 est-il premier ?

## Méthode 8

Le résultat précédent montre donc que, pour tester si un entier est premier, il suffit de tester s'il admet des diviseurs premiers inférieurs ou égal à la partie entière de sa racine carrée.

## Exemple 9

Le nombre 131 est-il premier ?

Comme  $E(\sqrt{131}) = 11$ , il suffit de tester si 131 est divisible par 2, 3, 5, 7 et 11.

## Méthode 8

Le résultat précédent montre donc que, pour tester si un entier est premier, il suffit de tester s'il admet des diviseurs premiers inférieurs ou égal à la partie entière de sa racine carrée.

## Exemple 9

Le nombre 131 est-il premier ?

Comme  $E(\sqrt{131}) = 11$ , il suffit de tester si 131 est divisible par 2, 3, 5, 7 et 11. Comme 131 est impair, il n'est pas divisible par 2.

## Méthode 8

Le résultat précédent montre donc que, pour tester si un entier est premier, il suffit de tester s'il admet des diviseurs premiers inférieurs ou égal à la partie entière de sa racine carrée.

### Exemple 9

Le nombre 131 est-il premier ?

Comme  $E(\sqrt{131}) = 11$ , il suffit de tester si 131 est divisible par 2, 3, 5, 7 et 11. Comme 131 est impair, il n'est pas divisible par 2.

Comme  $1 + 3 + 1 = 5$ , il n'est pas divisible par 3.

## Méthode 8

Le résultat précédent montre donc que, pour tester si un entier est premier, il suffit de tester s'il admet des diviseurs premiers inférieurs ou égal à la partie entière de sa racine carrée.

### Exemple 9

Le nombre 131 est-il premier ?

Comme  $E(\sqrt{131}) = 11$ , il suffit de tester si 131 est divisible par 2, 3, 5, 7 et 11. Comme 131 est impair, il n'est pas divisible par 2.

Comme  $1 + 3 + 1 = 5$ , il n'est pas divisible par 3. Comme son dernier chiffre est 1, il n'est pas divisible par 5

## Méthode 8

Le résultat précédent montre donc que, pour tester si un entier est premier, il suffit de tester s'il admet des diviseurs premiers inférieurs ou égal à la partie entière de sa racine carrée.

### Exemple 9

Le nombre 131 est-il premier ?

Comme  $E(\sqrt{131}) = 11$ , il suffit de tester si 131 est divisible par 2, 3, 5, 7 et 11. Comme 131 est impair, il n'est pas divisible par 2.

Comme  $1 + 3 + 1 = 5$ , il n'est pas divisible par 3. Comme son dernier chiffre est 1, il n'est pas divisible par 5 et comme  $1 - 3 + 1 = -1$ , il n'est pas divisible par 11.

## Méthode 8

Le résultat précédent montre donc que, pour tester si un entier est premier, il suffit de tester s'il admet des diviseurs premiers inférieurs ou égal à la partie entière de sa racine carrée.

### Exemple 9

Le nombre 131 est-il premier ?

Comme  $E(\sqrt{131}) = 11$ , il suffit de tester si 131 est divisible par 2, 3, 5, 7 et 11. Comme 131 est impair, il n'est pas divisible par 2.

Comme  $1 + 3 + 1 = 5$ , il n'est pas divisible par 3. Comme son dernier chiffre est 1, il n'est pas divisible par 5 et comme  $1 - 3 + 1 = -1$ , il n'est pas divisible par 11. Reste à tester la divisibilité par 7.

## Méthode 8

Le résultat précédent montre donc que, pour tester si un entier est premier, il suffit de tester s'il admet des diviseurs premiers inférieurs ou égal à la partie entière de sa racine carrée.

### Exemple 9

Le nombre 131 est-il premier ?

Comme  $E(\sqrt{131}) = 11$ , il suffit de tester si 131 est divisible par 2, 3, 5, 7 et 11. Comme 131 est impair, il n'est pas divisible par 2.

Comme  $1 + 3 + 1 = 5$ , il n'est pas divisible par 3. Comme son dernier chiffre est 1, il n'est pas divisible par 5 et comme  $1 - 3 + 1 = -1$ , il n'est pas divisible par 11. Reste à tester la divisibilité par 7. Or,  $131 = 7 \times 18 + 5$  donc 131 n'est pas divisible par 7



## Méthode 8

Le résultat précédent montre donc que, pour tester si un entier est premier, il suffit de tester s'il admet des diviseurs premiers inférieurs ou égal à la partie entière de sa racine carrée.

### Exemple 9

Le nombre 131 est-il premier ?

Comme  $E(\sqrt{131}) = 11$ , il suffit de tester si 131 est divisible par 2, 3, 5, 7 et 11. Comme 131 est impair, il n'est pas divisible par 2.

Comme  $1 + 3 + 1 = 5$ , il n'est pas divisible par 3. Comme son dernier chiffre est 1, il n'est pas divisible par 5 et comme  $1 - 3 + 1 = -1$ , il n'est pas divisible par 11. Reste à tester la divisibilité par 7. Or,  $131 = 7 \times 18 + 5$  donc 131 n'est pas divisible par 7.

On conclut donc que 131 est un nombre premier.

## Application 10 (le crible d'Ératosthène)

Pour déterminer les nombres premiers compris entre 2 et  $n$ , il suffit d'éliminer tous les multiples stricts des nombres premiers compris entre 2 et  $E(\sqrt{n})$ .

## Application 10 (le crible d'Ératosthène)

Pour déterminer les nombres premiers compris entre 2 et  $n$ , il suffit d'éliminer tous les multiples stricts des nombres premiers compris entre 2 et  $E(\sqrt{n})$ . Cela constitue ce qu'on appelle la méthode du crible d'Ératosthène.

## Application 10 (le crible d'Ératosthène)

Pour déterminer les nombres premiers compris entre 2 et  $n$ , il suffit d'éliminer tous les multiples stricts des nombres premiers compris entre 2 et  $E(\sqrt{n})$ . Cela constitue ce qu'on appelle la méthode du crible d'Ératosthène.

Mettons-là en œuvre pour déterminer les nombres premiers inférieurs ou égaux à 100.

## Application 10 (le crible d'Ératosthène)

Pour déterminer les nombres premiers compris entre 2 et  $n$ , il suffit d'éliminer tous les multiples stricts des nombres premiers compris entre 2 et  $E(\sqrt{n})$ . Cela constitue ce qu'on appelle la méthode du crible d'Ératosthène.

Mettons-là en œuvre pour déterminer les nombres premiers inférieurs ou égaux à 100. Comme  $\sqrt{100} = 10$ , il suffit d'éliminer tous les diviseurs stricts des nombres premiers inférieurs à 10 i.e. 2, 3, 5 et 7.

On commence par barrer tous les multiples stricts de 2 :

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
|    | ②  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30  |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50  |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60  |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70  |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80  |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90  |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

On commence par barrer tous les multiples stricts de 2 :

|    |               |    |               |    |               |    |               |    |                |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|----------------|
|    | ②             | 3  | <del>4</del>  | 5  | <del>6</del>  | 7  | <del>8</del>  | 9  | <del>10</del>  |
| 11 | <del>12</del> | 13 | <del>14</del> | 15 | <del>16</del> | 17 | <del>18</del> | 19 | <del>20</del>  |
| 21 | <del>22</del> | 23 | <del>24</del> | 25 | <del>26</del> | 27 | <del>28</del> | 29 | <del>30</del>  |
| 31 | <del>32</del> | 33 | <del>34</del> | 35 | <del>36</del> | 37 | <del>38</del> | 39 | <del>40</del>  |
| 41 | <del>42</del> | 43 | <del>44</del> | 45 | <del>46</del> | 47 | <del>48</del> | 49 | <del>50</del>  |
| 51 | <del>52</del> | 53 | <del>54</del> | 55 | <del>56</del> | 57 | <del>58</del> | 59 | <del>60</del>  |
| 61 | <del>62</del> | 63 | <del>64</del> | 65 | <del>66</del> | 67 | <del>68</del> | 69 | <del>70</del>  |
| 71 | <del>72</del> | 73 | <del>74</del> | 75 | <del>76</del> | 77 | <del>78</del> | 79 | <del>80</del>  |
| 81 | <del>82</del> | 83 | <del>84</del> | 85 | <del>86</del> | 87 | <del>88</del> | 89 | <del>90</del>  |
| 91 | <del>92</del> | 93 | <del>94</del> | 95 | <del>96</del> | 97 | <del>98</del> | 99 | <del>100</del> |

Ensuite, on barre les multiples stricts de 3 (non déjà barrés) :

|    |               |    |               |    |               |    |               |    |                |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|----------------|
|    | ②             | ③  | <del>4</del>  | 5  | <del>6</del>  | 7  | <del>8</del>  | 9  | <del>10</del>  |
| 11 | <del>12</del> | 13 | <del>14</del> | 15 | <del>16</del> | 17 | <del>18</del> | 19 | <del>20</del>  |
| 21 | <del>22</del> | 23 | <del>24</del> | 25 | <del>26</del> | 27 | <del>28</del> | 29 | <del>30</del>  |
| 31 | <del>32</del> | 33 | <del>34</del> | 35 | <del>36</del> | 37 | <del>38</del> | 39 | <del>40</del>  |
| 41 | <del>42</del> | 43 | <del>44</del> | 45 | <del>46</del> | 47 | <del>48</del> | 49 | <del>50</del>  |
| 51 | <del>52</del> | 53 | <del>54</del> | 55 | <del>56</del> | 57 | <del>58</del> | 59 | <del>60</del>  |
| 61 | <del>62</del> | 63 | <del>64</del> | 65 | <del>66</del> | 67 | <del>68</del> | 69 | <del>70</del>  |
| 71 | <del>72</del> | 73 | <del>74</del> | 75 | <del>76</del> | 77 | <del>78</del> | 79 | <del>80</del>  |
| 81 | <del>82</del> | 83 | <del>84</del> | 85 | <del>86</del> | 87 | <del>88</del> | 89 | <del>90</del>  |
| 91 | <del>92</del> | 93 | <del>94</del> | 95 | <del>96</del> | 97 | <del>98</del> | 99 | <del>100</del> |



Ensuite, on barre les multiples stricts de 3 (non déjà barrés) :

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
|    | ②  | ③  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30  |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50  |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60  |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70  |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80  |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90  |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

On continue avec les multiples stricts de 5 :

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
|    | ②  | ③  | 4  | ⑤  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30  |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50  |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60  |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70  |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80  |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90  |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

On continue avec les multiples stricts de 5 :

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
|    | ②  | ③  | 4  | ⑤  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30  |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50  |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60  |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70  |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80  |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90  |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

Et on termine avec les multiples de 7 :

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
|    | ②  | ③  | 4  | ⑤  | 6  | ⑦  | 8  | 9  | 10  |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30  |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50  |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60  |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70  |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80  |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90  |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

Et on termine avec les multiples de 7 :

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
|    | ②  | ③  | 4  | ⑤  | 6  | ⑦  | 8  | 9  | 10  |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30  |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50  |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60  |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70  |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80  |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90  |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

Les nombres qui n'ont pas été barrés sont exactement les nombres premiers inférieurs ou égaux à 100.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
|    | ②  | ③  | 4  | ⑤  | 6  | ⑦  | 8  | 9  | 10  |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30  |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50  |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60  |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70  |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80  |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90  |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

Les nombres qui n'ont pas été barrés sont exactement les nombres premiers inférieurs ou égaux à 100.

|               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
|               | 2             | 3             | <del>4</del>  | 5             | <del>6</del>  | 7             | <del>8</del>  | <del>9</del>  | <del>10</del> |
| 11            | <del>12</del> | 13            | <del>14</del> | <del>15</del> | <del>16</del> | 17            | <del>18</del> | 19            | <del>20</del> |
| <del>21</del> | <del>22</del> | 23            | <del>24</del> | <del>25</del> | <del>26</del> | <del>27</del> | 28            | 29            | <del>30</del> |
| 31            | <del>32</del> | <del>33</del> | <del>34</del> | <del>35</del> | <del>36</del> | 37            | <del>38</del> | <del>39</del> | 40            |
| 41            | <del>42</del> | 43            | <del>44</del> | <del>45</del> | <del>46</del> | 47            | <del>48</del> | <del>49</del> | 50            |
| <del>51</del> | <del>52</del> | 53            | <del>54</del> | <del>55</del> | <del>56</del> | <del>57</del> | 58            | 59            | <del>60</del> |
| 61            | <del>62</del> | <del>63</del> | <del>64</del> | <del>65</del> | <del>66</del> | 67            | <del>68</del> | <del>69</del> | <del>70</del> |
| 71            | <del>72</del> | 73            | <del>74</del> | <del>75</del> | <del>76</del> | <del>77</del> | <del>78</del> | 79            | <del>80</del> |
| <del>81</del> | <del>82</del> | 83            | <del>84</del> | <del>85</del> | <del>86</del> | <del>87</del> | 88            | 89            | <del>90</del> |
| <del>91</del> | <del>92</del> | <del>93</del> | <del>94</del> | <del>95</del> | <del>96</del> | 97            | <del>98</del> | <del>99</del> | 100           |

Les nombres qui n'ont pas été barrés sont exactement les nombres premiers inférieurs ou égaux à 100.

|               |               |               |               |               |               |               |               |               |                |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|
|               | 2             | 3             | <del>4</del>  | 5             | <del>6</del>  | 7             | <del>8</del>  | <del>9</del>  | <del>10</del>  |
| 11            | <del>12</del> | 13            | <del>14</del> | <del>15</del> | <del>16</del> | 17            | <del>18</del> | 19            | <del>20</del>  |
| <del>21</del> | <del>22</del> | 23            | <del>24</del> | <del>25</del> | <del>26</del> | <del>27</del> | 28            | 29            | <del>30</del>  |
| 31            | <del>32</del> | <del>33</del> | <del>34</del> | <del>35</del> | <del>36</del> | 37            | <del>38</del> | <del>39</del> | <del>40</del>  |
| 41            | <del>42</del> | 43            | <del>44</del> | <del>45</del> | <del>46</del> | 47            | <del>48</del> | <del>49</del> | <del>50</del>  |
| <del>51</del> | <del>52</del> | 53            | <del>54</del> | <del>55</del> | <del>56</del> | <del>57</del> | 58            | 59            | <del>60</del>  |
| 61            | <del>62</del> | <del>63</del> | <del>64</del> | <del>65</del> | <del>66</del> | 67            | <del>68</del> | <del>69</del> | <del>70</del>  |
| 71            | <del>72</del> | 73            | <del>74</del> | <del>75</del> | <del>76</del> | <del>77</del> | <del>78</del> | 79            | <del>80</del>  |
| <del>81</del> | <del>82</del> | 83            | <del>84</del> | <del>85</del> | <del>86</del> | <del>87</del> | 88            | 89            | <del>90</del>  |
| <del>91</del> | <del>92</del> | <del>93</del> | <del>94</del> | <del>95</del> | <del>96</del> | 97            | <del>98</del> | <del>99</del> | <del>100</del> |

Il y en a 25. En voici la liste : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 et 97.



### 3. Théorème d'Euclide

### 3. Théorème d'Euclide

#### **Théorème 11. — Théorème d'Euclide**

L'ensemble des nombres premiers est infini.

### 3. Théorème d'Euclide

#### **Théorème 11. — Théorème d'Euclide**

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration.

On raisonne par l'absurde en supposant que l'ensemble des nombres premiers est fini.

### 3. Théorème d'Euclide

#### **Théorème 11. — Théorème d'Euclide**

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration.

On raisonne par l'absurde en supposant que l'ensemble des nombres premiers est fini. Ainsi, on peut écrire la liste ordonnée de tous les nombres premiers :  $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n$  (avec  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 5$ , ...).

### 3. Théorème d'Euclide

#### **Théorème 11. — Théorème d'Euclide**

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration.

On raisonne par l'absurde en supposant que l'ensemble des nombres premiers est fini. Ainsi, on peut écrire la liste ordonnée de tous les nombres premiers :  $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n$  (avec  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 5$ , ...).

Considérons alors le nombre entier  $N = p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$ .

### 3. Théorème d'Euclide

#### **Théorème 11. — Théorème d'Euclide**

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration.

On raisonne par l'absurde en supposant que l'ensemble des nombres premiers est fini. Ainsi, on peut écrire la liste ordonnée de tous les nombres premiers :  $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n$  (avec  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 5$ , ...).

Considérons alors le nombre entier  $N = p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$ .

Clairement  $N \geq 2$  donc, par la propriété 5,  $N$  admet un diviseur premier  $p$ .

### 3. Théorème d'Euclide

#### **Théorème 11. — Théorème d'Euclide**

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration.

On raisonne par l'absurde en supposant que l'ensemble des nombres premiers est fini. Ainsi, on peut écrire la liste ordonnée de tous les nombres premiers :  $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n$  (avec  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 5$ , ...).

Considérons alors le nombre entier  $N = p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$ .

Clairement  $N \geq 2$  donc, par la propriété 5,  $N$  admet un diviseur premier  $p$ . Ainsi,  $p$  figure dans la liste  $p_1, p_2, \dots, p_n$  donc  $p$  divise le produit  $p_1 p_2 \dots p_n$  i.e.  $p$  divise  $N - 1$ .

### 3. Théorème d'Euclide

#### **Théorème 11. — Théorème d'Euclide**

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration.

On raisonne par l'absurde en supposant que l'ensemble des nombres premiers est fini. Ainsi, on peut écrire la liste ordonnée de tous les nombres premiers :  $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n$  (avec  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 5$ , ...).

Considérons alors le nombre entier  $N = p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$ .

Clairement  $N \geq 2$  donc, par la propriété 5,  $N$  admet un diviseur premier  $p$ . Ainsi,  $p$  figure dans la liste  $p_1, p_2, \dots, p_n$  donc  $p$  divise le produit  $p_1 p_2 \dots p_n$  i.e.  $p$  divise  $N - 1$ . Or, par définition,  $p$  divise  $N$  donc  $p$  divise  $N - (N - 1) = 1$ .



### 3. Théorème d'Euclide

#### **Théorème 11. — Théorème d'Euclide**

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration.

On raisonne par l'absurde en supposant que l'ensemble des nombres premiers est fini. Ainsi, on peut écrire la liste ordonnée de tous les nombres premiers :  $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n$  (avec  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 5$ , ...).

Considérons alors le nombre entier  $N = p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$ .

Clairement  $N \geq 2$  donc, par la propriété 5,  $N$  admet un diviseur premier  $p$ . Ainsi,  $p$  figure dans la liste  $p_1, p_2, \dots, p_n$  donc  $p$  divise le produit  $p_1 p_2 \dots p_n$  i.e.  $p$  divise  $N - 1$ . Or, par définition,  $p$  divise  $N$  donc  $p$  divise  $N - (N - 1) = 1$ . C'est absurde car  $p \geq 2$  et le seul diviseur positif de 1 est 1.

### 3. Théorème d'Euclide

#### **Théorème 11. — Théorème d'Euclide**

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration.

On raisonne par l'absurde en supposant que l'ensemble des nombres premiers est fini. Ainsi, on peut écrire la liste ordonnée de tous les nombres premiers :  $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n$  (avec  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 5$ , ...).

Considérons alors le nombre entier  $N = p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$ .

Clairement  $N \geq 2$  donc, par la propriété 5,  $N$  admet un diviseur premier  $p$ . Ainsi,  $p$  figure dans la liste  $p_1, p_2, \dots, p_n$  donc  $p$  divise le produit  $p_1 p_2 \dots p_n$  i.e.  $p$  divise  $N - 1$ . Or, par définition,  $p$  divise  $N$  donc  $p$  divise  $N - (N - 1) = 1$ . C'est absurde car  $p \geq 2$  et le seul diviseur positif de 1 est 1.

On conclut donc que l'ensemble des nombres premiers est infini.

### 3. Théorème d'Euclide

#### **Théorème 11. — Théorème d'Euclide**

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration.

On raisonne par l'absurde en supposant que l'ensemble des nombres premiers est fini. Ainsi, on peut écrire la liste ordonnée de tous les nombres premiers :  $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n$  (avec  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 5$ , ...).

Considérons alors le nombre entier  $N = p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$ .

Clairement  $N \geq 2$  donc, par la propriété 5,  $N$  admet un diviseur premier  $p$ . Ainsi,  $p$  figure dans la liste  $p_1, p_2, \dots, p_n$  donc  $p$  divise le produit  $p_1 p_2 \dots p_n$  i.e.  $p$  divise  $N - 1$ . Or, par définition,  $p$  divise  $N$  donc  $p$  divise  $N - (N - 1) = 1$ . C'est absurde car  $p \geq 2$  et le seul diviseur positif de 1 est 1.

On conclut donc que l'ensemble des nombres premiers est infini.  $\square$

## Remarque 12

Une autre façon de procéder est la suivante.

## Remarque 12

Une autre façon de procéder est la suivante.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la factorielle de  $n$ , notée  $n!$ , par  $0! = 1$  et  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$  si  $n > 0$ .

## Remarque 12

Une autre façon de procéder est la suivante.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la factorielle de  $n$ , notée  $n!$ , par  $0! = 1$  et  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$  si  $n > 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Posons  $A_n = n! + 1$ .

## Remarque 12

Une autre façon de procéder est la suivante.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la factorielle de  $n$ , notée  $n!$ , par  $0! = 1$  et  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$  si  $n > 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Posons  $A_n = n! + 1$ . Alors,  $A_n \geq 2$  donc, par la propriété 5,  $A_n$  admet un diviseur premier  $p_n$ .

## Remarque 12

Une autre façon de procéder est la suivante.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la factorielle de  $n$ , notée  $n!$ , par  $0! = 1$  et  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$  si  $n > 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Posons  $A_n = n! + 1$ . Alors,  $A_n \geq 2$  donc, par la propriété 5,  $A_n$  admet un diviseur premier  $p_n$ . Or, pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n$ ,  $k$  divise  $n!$  donc  $A_n \equiv 1 \pmod{k}$ .



## Remarque 12

Une autre façon de procéder est la suivante.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la factorielle de  $n$ , notée  $n!$ , par  $0! = 1$  et  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$  si  $n > 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Posons  $A_n = n! + 1$ . Alors,  $A_n \geq 2$  donc, par la propriété 5,  $A_n$  admet un diviseur premier  $p_n$ . Or, pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n$ ,  $k$  divise  $n!$  donc  $A_n \equiv 1 [k]$ . Comme  $A_n \equiv 0 [p_n]$ , on en déduit que  $p_n > n$ .

## Remarque 12

Une autre façon de procéder est la suivante.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la factorielle de  $n$ , notée  $n!$ , par  $0! = 1$  et  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$  si  $n > 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Posons  $A_n = n! + 1$ . Alors,  $A_n \geq 2$  donc, par la propriété 5,  $A_n$  admet un diviseur premier  $p_n$ . Or, pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n$ ,  $k$  divise  $n!$  donc  $A_n \equiv 1 [k]$ . Comme  $A_n \equiv 0 [p_n]$ , on en déduit que  $p_n > n$ .

Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ , il existe un nombre premier  $p_n$  tel que  $p_n > n$  donc l'ensemble des nombres premiers n'est pas borné et donc il est infini.

## Exercice 13

Soit un entier  $n \geq 2$ . Montrer qu'il existe  $n$  entiers naturels consécutifs dont aucun n'est premier.

## Exercice 13

Soit un entier  $n \geq 2$ . Montrer qu'il existe  $n$  entiers naturels consécutifs dont aucun n'est premier.

**Solution.** Posons  $A_n = (n + 1)!$  et considérons les  $n$  entiers consécutifs  $A_n + 2, A_n + 3, A_n + 4, \dots, A_n + (n + 1)$  i.e. tous les entiers de la forme  $A_n + k$  avec  $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$ .

## Exercice 13

Soit un entier  $n \geq 2$ . Montrer qu'il existe  $n$  entiers naturels consécutifs dont aucun n'est premier.

**Solution.** Posons  $A_n = (n + 1)!$  et considérons les  $n$  entiers consécutifs  $A_n + 2, A_n + 3, A_n + 4, \dots, A_n + (n + 1)$  i.e. tous les entiers de la forme  $A_n + k$  avec  $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$ . Alors, pour tout  $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$ ,  $k$  divise  $A_n$  et  $k$  divise  $k$  donc  $k$  divise  $A_n + k$ .

## Exercice 13

Soit un entier  $n \geq 2$ . Montrer qu'il existe  $n$  entiers naturels consécutifs dont aucun n'est premier.

**Solution.** Posons  $A_n = (n + 1)!$  et considérons les  $n$  entiers consécutifs  $A_n + 2, A_n + 3, A_n + 4, \dots, A_n + (n + 1)$  i.e. tous les entiers de la forme  $A_n + k$  avec  $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$ . Alors, pour tout  $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$ ,  $k$  divise  $A_n$  et  $k$  divise  $k$  donc  $k$  divise  $A_n + k$ . Or,  $1 < k < A_n + k$  donc  $A_n + k$  n'est pas premier.

### Exercice 13

Soit un entier  $n \geq 2$ . Montrer qu'il existe  $n$  entiers naturels consécutifs dont aucun n'est premier.

**Solution.** Posons  $A_n = (n + 1)!$  et considérons les  $n$  entiers consécutifs  $A_n + 2, A_n + 3, A_n + 4, \dots, A_n + (n + 1)$  i.e. tous les entiers de la forme  $A_n + k$  avec  $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$ . Alors, pour tout  $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$ ,  $k$  divise  $A_n$  et  $k$  divise  $k$  donc  $k$  divise  $A_n + k$ . Or,  $1 < k < A_n + k$  donc  $A_n + k$  n'est pas premier. Ainsi, les entiers  $A_n + k$  pour  $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$  forment une suite de  $n$  entiers naturels consécutifs dont aucun n'est premier.