

Corrigés des exercices donnés pour le lundi 25 mai 2020

Exercice 28 p. 27

$$45 = 9 \times 5 = 3^2 \times 5$$

$$1400 = 14 \times 100 = 2 \times 7 \times (2 \times 5)^2 = 2^3 \times 5^2 \times 7$$

$$735 = 7 \times 105 = 7 \times 5 \times 21 = 3 \times 5 \times 7^2$$

Exercice 30 p. 27

$$\frac{76}{24} = \frac{2^2 \times 19}{2^3 \times 3} = \frac{19}{2 \times 3} = \frac{19}{6}$$

$$\frac{13650}{1785} = \frac{2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 13}{3 \times 5 \times 7 \times 17} = \frac{2 \times 5 \times 13}{17} = \frac{130}{17}$$

Exercice 32 p. 27

Un diviseur positif de a est de la forme $3^\alpha \times 5^\beta$ avec $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ et $\beta \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ donc a possède $3 \times 8 = 24$ diviseurs positifs.

Un diviseur positif de b est de la forme $2^\alpha \times 11^\beta$ avec $\alpha \in \{0, 1\}$ et $\beta \in \{0, 1, 2, 3\}$ donc b possède $2 \times 4 = 8$ diviseurs positifs.

Exercice 161 p. 39

1. L'écriture décimale d'un rep-unit se termine par un 1 donc un rep-unit n'est jamais divisible par 2 ni par 5.
2. $N_3 = 111 = 3 \times 37$, $N_4 = 11 \times 101$ et $N_5 = 41 \times 271$.
3. a. Dressons un tableau de restes modulo 10 :

Reste de n modulo 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Reste de n^2 modulo 10	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Comme on suppose que n^2 est un rep-unit, le chiffre des unités de n^2 est 1 donc $n^2 \equiv 1 [10]$. On déduit donc du tableau que $n \equiv 1 [10]$ ou $n \equiv 9 [10]$.

- b. Si $n \equiv 1 [10]$ alors il existe un entier m tel que $n = 1 + 10m$ donc

$$n^2 = (1 + 10m)^2 = 1 + 20m + 100m^2 = 1 + 20(m + 5m^2) \equiv 1 [20]$$

et si $n \equiv 9 [10]$ alors il existe un entier m tel que $n = 9 + 10m$ donc

$$n^2 = (9 + 10m)^2 = 81 + 180m + 100m^2 = 1 + 20(4 + 9m + 5m^2) \equiv 1 [20]$$

Ainsi, dans tous les cas, $n^2 \equiv 1 [20]$.

Remarque. Pour le cas $n \equiv 9 [10]$, on pouvait aussi remarquer que, dans ce cas, $n \equiv -1 [10]$ donc $n^2 \equiv (-1)^2 [10] \equiv 1 [10]$ et on se ramenait ainsi au premier cas.

- c. Par hypothèse, il existe un entier $k \geq 2$ tel que $n^2 = N_k$. Or,

$$N_k = \underbrace{11 \cdots 1}_{k-2 \text{ fois}} 00 + 11 = 11 + 100 \times \underbrace{11 \cdots 1}_{k-2 \text{ fois}} = 11 + 20 \times \underbrace{55 \cdots 5}_{k-2 \text{ fois}} \equiv 11 [20]$$

donc, comme $0 \leq 11 < 20$, le reste de N_k modulo 20 est 11 ce qui contredit le fait que $n^2 \equiv 1 [20]$.

On conclut que, pour tout entier $k \geq 2$, N_k n'est pas le carré d'un entier.