

Corrigés des exercices donnés pour le mardi 24 mars 2020

Exercice 3 p. 122

1. $X_1 = X_0 + B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = X_1 + B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X_3 = X_2 + B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = X_0 + nB$.

Comme $X_0 + 0B = X_n$, l'égalité est vraie pour $n = 0$.

Supposons qu'elle soit vraie pour un certain entier k . Alors,

$$X_{k+1} = X_k + B = (X_0 + kB) + B = X_0 + (k+1)B$$

donc l'égalité est vraie au rang $k+1$.

Ainsi, on a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = X_0 + nB$ i.e. $X_n = \begin{pmatrix} 2n \\ 1+n \end{pmatrix}$.

3. Comme la suite $(2n)$ diverge vers $+\infty$, (X_n) diverge.

Exercice 4 p. 122

1. $X_1 = \frac{1}{2}X_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $X_2 = \frac{1}{2}X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $X_3 = \frac{1}{2}X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = (\frac{1}{2})^n X_0$.

Comme $(\frac{1}{2})^0 X_0 = X_n$, l'égalité est vraie pour $n = 0$.

Supposons qu'elle soit vraie pour un certain entier k . Alors, $X_{k+1} = \frac{1}{2}X_k = \frac{1}{2}((\frac{1}{2})^k X_0) = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^k X_0 = (\frac{1}{2})^{k+1} X_0$ donc l'égalité est vraie au rang $k+1$.

Ainsi, on a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = (\frac{1}{2})^n X_0$ i.e. $X_n = \begin{pmatrix} -(\frac{1}{2})^n \\ (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$.

3. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$, (X_n) converge vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque. La suite (X_n) n'est pas géométrique au sens du cours. Cependant, on peut remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = (\frac{1}{2}I_2)X_n$ donc (X_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}I_2$.

Exercice 6 p. 122

1. On raisonne par récurrence sur n .

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2^0} & 2 - \frac{1}{2^{0-1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = A^0 \text{ donc l'égalité est vraie au rang } n = 0.$$

Supposons qu'elle soit vraie pour un certain rang k .

Alors,

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} & 2 - \frac{1}{2^{k-1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{2} + 0 & \frac{1}{2^k} + 2 - \frac{1}{2^{k-1}} \\ 0 + 0 & 0 + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{k+1}} & 2 + \frac{1}{2^k} - \frac{2}{2^k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{k+1}} & 2 - \frac{1}{2^k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc l'égalité est vraie au rang $k+1$.

On a donc démontré que, $\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. La suite (X_n) est une suite géométrique de matrices colonnes de raison A donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$ i.e.

$$X_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} \times 2 - (2 - \frac{1}{2^{n-1}}) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{n-2}} - 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Comme $2 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n-2} = +\infty$ donc, par inverse et somme (X_n) converge vers la matrice $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 p. 122

1. La question est assez mal posée. Il faut comprendre : montrer que la matrice C vérifie la relation $AC + B = C$.

Or, $AC + B = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ i.e. $AC + B = C$.

2. a. On a $\frac{1}{2}N = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc, en posant $N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $A = I_2 + N$.

- b. On vérifie que $N^2 = O_2$. Dès lors,

$$D^2 = (I_2 + N)^2 = (I_2 + N)(I_2 + N) = I_2^2 + I_2N + NI_2 + N^2 = I_2 + 2N + N^2 = I_2 + 2N$$

$$D^3 = D^2D = (I_2 + 2N)(I_2 + N) = I_2^2 + I_2N + 2NI_2 + 2N^2 = I_2 + 3N$$

$$D^4 = D^3D = (I_2 + 3N)(I_2 + N) = I_2^2 + I_2N + 3NI_2 + 3N^2 = I_2 + 4N$$

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = I_2 + nN$.

Comme $I_2 + 0N = I_2 = D^0$, l'égalité est vraie au rang $n = 0$.

Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $D^k = I_2 + kN$.

Alors, comme $N^2 = O_2$,

$$\begin{aligned} D^{k+1} &= D^k D = (I_2 + kN)(I_2 + N) = I_2 + I_2N + kNI_2 + kN^2 \\ &= I_2 + N + kN = I_2 + (k+1)N \end{aligned}$$

donc l'égalité est vraie au rang $k+1$.

On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = I_2 + nN = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (2D)^n = 2^n(I_2 + nN)$ i.e. $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

3. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = X_n - C$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_{n+1} = X_{n+1} - C = AX_n + B - (AC + B) = AX_n + B - AC - B = AX_n - AC = A(X_n - C) = AY_n$$

donc la suite (Y_n) est une suite géométrique de matrices colonnes de raison A . Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = A^n Y_0 = A^n(X_0 - C)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n - C = A^n(X_0 - C)$ donc $X_n = A^n(X_0 - C) + C$ i.e.

$$\begin{aligned} X_n &= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 1 - (-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+2} + 3n \times 2^{n-1} - 1 \\ 3 \times 2^n - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme $2 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times 2^n - 2 = +\infty$. Ainsi, la suite (X_n) diverge.

Problème 2 p. 112

1. a. On a $u_1 = (1 - \frac{50}{100}) - \frac{25}{100}u_0 + \frac{200}{100}v_0 + 20 = 0,5 \times 400 - 0,25 \times 400 + 2 \times 100 + 20$ donc $u_1 = 320$ et $v_1 = (1 - \frac{75}{100})v_0 + \frac{50}{100}u_0 = 0,25 \times 100 + 0,5 \times 400$ donc $v_1 = 225$.
- b. De manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{50}{100}\right)u_n - \frac{25}{100}u_n + \frac{200}{100}v_n + 20 = 0,5u_n - 0,25u_n + 2v_n + 20$$

donc $\boxed{u_{n+1} = 0,25u_n + 2v_n + 20}$ et

$$v_{n+1} = (1 - \frac{75}{100})v_n + \frac{50}{100}u_n$$

donc $\boxed{v_{n+1} = 0,5u_n + 0,25v_n}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25u_n + 2v_n + 20 \\ 0,5u_n + 0,25v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25u_n + 2v_n \\ 0,5u_n + 0,25v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,25 & 2 \\ 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $A = \begin{pmatrix} 0,25 & 2 \\ 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n + B$.

3. a. On a $E = I_2 - A = \begin{pmatrix} 0,75 & -2 \\ -0,5 & 0,75 \end{pmatrix}$ donc $\det(E) = 0,75^2 - (-0,5) \times (-2) = -0,4375 \neq 0$ ainsi E est inversible et, à l'aide de la calculatrice, on trouve $E^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 12 & -32 \\ -8 & -12 \end{pmatrix}$.

- b. Pour toute matrice X de taille 2×1 ,

$$X = AX + B \Leftrightarrow X - AX = B \Leftrightarrow (I_2 - A)X = B \Leftrightarrow EX = B \Leftrightarrow X = E^{-1}B$$

Or, $E^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{240}{7} \\ -\frac{160}{7} \end{pmatrix}$ donc l'unique matrice C telle que $C = AC + B$ est $C = \begin{pmatrix} -\frac{240}{7} \\ -\frac{160}{7} \end{pmatrix}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$V_{n+1} = U_{n+1} - C = AU_n + B - (AC + B) = AU_n + B - AC - B = AU_n - AC = A(U_n - C)$$

donc $\boxed{V_{n+1} = AV_n}$.

5. À l'aide de la calculatrice, $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Comme $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = A^0$, l'égalité est vraie au rang $n = 0$.

Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$.

Comme $D = P^{-1}AP$, on a $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = I_2AI_2 = A$ donc

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k A = (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^k(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^kI_2P^{-1} = PD^kDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1} \end{aligned}$$

donc l'égalité est vraie au rang $k + 1$.

Ainsi, on a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} (\frac{5}{4})^n & 0 \\ 0 & (-\frac{3}{4})^n \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{5}{4})^n & 0 \\ 0 & (-\frac{3}{4})^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{5}{4})^n & 0 \\ 0 & (-\frac{3}{4})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{5}{4})^n & 2(\frac{5}{4})^n \\ (-\frac{3}{4})^n & -2(-\frac{3}{4})^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2(\frac{5}{4})^n + 2(-\frac{3}{4})^n & 4(\frac{5}{4})^n - 4(-\frac{3}{4})^n \\ (\frac{5}{4})^n - (-\frac{3}{4})^n & 2(\frac{5}{4})^n + 2(-\frac{3}{4})^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7. a. La suite (V_n) est une suite géométrique de matrices colonnes de raison A donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $V_n = A^n V_0$. Or, $V_0 = U_0 - C = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3040 \\ 860 \end{pmatrix}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2(\frac{5}{4})^n + 2(-\frac{3}{4})^n & 4(\frac{5}{4})^n - 4(-\frac{3}{4})^n \\ (\frac{5}{4})^n - (-\frac{3}{4})^n & 2(\frac{5}{4})^n + 2(-\frac{3}{4})^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3040 \\ 860 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 6080(\frac{5}{4})^n + 6080(-\frac{3}{4})^n + 3440(\frac{5}{4})^n - 3440(-\frac{3}{4})^n \\ 3040(\frac{5}{4})^n - 3040(-\frac{3}{4})^n + 1720(\frac{5}{4})^n + 1720(-\frac{3}{4})^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 9520(\frac{5}{4})^n + 2640(-\frac{3}{4})^n \\ 4760(\frac{5}{4})^n - 1320(-\frac{3}{4})^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 340(\frac{5}{4})^n + \frac{660}{7}(-\frac{3}{4})^n \\ 170(\frac{5}{4})^n - \frac{330}{7}(-\frac{3}{4})^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - C$ donc $U_n = V_n + C$ i.e. $U_n = \begin{pmatrix} 340(\frac{5}{4})^n + \frac{660}{7}(-\frac{3}{4})^n - \frac{240}{7} \\ 170(\frac{5}{4})^n - \frac{330}{7}(-\frac{3}{4})^n - \frac{160}{7} \end{pmatrix}$

- c. On conclut donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = 340(\frac{5}{4})^n + \frac{660}{7}(-\frac{3}{4})^n - \frac{240}{7}}$ et que $\boxed{v_n = 170(\frac{5}{4})^n - \frac{330}{7}(-\frac{3}{4})^n - \frac{160}{7}}$.

8. a. Comme $-1 < -\frac{3}{4} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\frac{3}{4})^n = 0$ et, comme $\frac{5}{4} > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{5}{4})^n = +\infty$. Ainsi, par somme, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty}$.

- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{u_n}{v_n} = \frac{340(\frac{5}{4})^n + \frac{660}{7}(-\frac{3}{4})^n - \frac{240}{7}}{170(\frac{5}{4})^n - \frac{330}{7}(-\frac{3}{4})^n - \frac{160}{7}} \\ &= \frac{(\frac{5}{4})^n \left[340 + \frac{660}{7}(-\frac{3}{5})^n - \frac{240}{7}(\frac{4}{5})^n \right]}{(\frac{5}{4})^n \left[170 - \frac{330}{7}(-\frac{3}{5})^n - \frac{160}{7}(\frac{4}{5})^n \right]} \\ &= \frac{340 + \frac{660}{7}(-\frac{3}{5})^n - \frac{240}{7}(\frac{4}{5})^n}{170 - \frac{330}{7}(-\frac{3}{5})^n - \frac{160}{7}(\frac{4}{5})^n} \end{aligned}$$

Comme $-1 < -\frac{3}{5} < 1$ et $-1 < \frac{4}{5} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\frac{3}{5})^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{4}{5})^n = 0$, par produit, somme et quotient, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{340}{170} = 2}$.

Ainsi, à long terme, il y aura approximativement deux fois plus de « jeunes » que de « vieux ».