

Corrigés des exercices donnés pour le mardi 19 mai 2020

Exercice 89 p. 30

Considérons trois entiers naturels impairs consécutifs : a , $a + 2$ et $a + 4$. Alors, leur somme est $S = a + (a + 2) + (a + 4) = 3a + 6 = 3(a + 2)$. De plus, $a \geq 1$ donc $a + 2 \geq 3$. Ainsi, S est divisible par 3 et $S > 3$ donc S n'est pas premier.

Exercice 92 p. 30

1. Supposons que $f : x \mapsto ax + b$ vérifie : pour tout entier naturel n , $f(n)$ est premier. Alors, en particulier, $f(0) = b$ est premier.
2. Avec les mêmes hypothèses, $f(b) = ab + b = (a + 1)b$ est premier donc, comme $b > 1$, cela impose que $a + 1 = 1$ i.e. $a = 0$.

Ainsi, si f est solution du problème alors f est constante égale à un nombre premier.

La réciproque est évidente donc les seules fonctions solutions sont les fonctions constantes égales à des nombres premiers.

Exercice 102 p. 31 Supposons que x et y sont deux entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = p$. Alors, $(x - y)(x + y) = p$ donc, comme p est premier et comme $x - y \leq x + y$ (car $y \geq 0$), on conclut que $x - y = 1$ et $x + y = p$. Dès lors, $x = \frac{(x+y)+(x-y)}{2} = \frac{p+1}{2}$ et $y = \frac{(x+y)-(x-y)}{2} = \frac{p-1}{2}$.

Réciproquement, considérons $x = \frac{p+1}{2}$ et $y = \frac{p-1}{2}$. Si $p = 2$ alors $x = \frac{3}{2}$ n'est pas entier donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{N}^2$. Si $p > 2$ alors p est impair donc $p + 1$ et $p - 1$ sont pairs et ainsi x et y sont entiers. De plus, $x - y = 1$ et $x + y = p$ donc $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = p$ et ainsi x et y sont solutions de l'équation.

On conclut que l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{N}^2$ si $p = 2$ et que l'unique solution de l'équation dans $\mathbb{N}^2$ est $(\frac{p+1}{2}; \frac{p-1}{2})$ si $p > 2$.

Sujet C p. 37

1. On a $u_1 = 10 \times 1 + 21 = 31$, $u_2 = 10 \times 31 + 21 = 331$ et $u_3 = 10 \times 331 + 21 = 3331$.

2. a. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P_n : \ll 3u_n = 10^{n+1} - 7 \gg$

Comme $10^{0+1} - 7 = 3 = 3 \times u_0$, P_0 est vraie.

Supposons que P_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors,

$$3u_{k+1} = 3(10u_k + 21) = 10 \times (3u_k) + 63 = 10 \times (10^{k+1} - 7) + 63 = 10^{k+2} - 70 + 63 = 10^{k+2} - 7$$

donc P_{k+1} est vraie.

On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

- b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre 10^{n+1} s'écrit $\underbrace{1000 \dots 0}_{n+1 \text{ fois}}$ donc $10^{n+1} - 7$ s'écrit $\underbrace{999 \dots 9}_{n \text{ fois}}3$. En divisant par 3, on en déduit que $u_n = \underbrace{333 \dots 3}_{n \text{ fois}}1$.

3. La partie entière de $\sqrt{331}$ est 18. On vérifie que 331 n'est pas divisible 2, 3, 5, 7, 11, 13 et 17 donc 331 est un nombre premier.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'écriture décimale de u_n se termine par 1 donc u_n n'est divisible ni par 2 ni par 5. De plus, la somme des chiffres de u_n est $3n + 1$ qui n'est pas divisible par 3 (puisque son reste modulo 3 est 1) donc u_n n'est pas divisible par 3.
5. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après la question 2.a., $3u_n = 10^{n+1} - 7$. Or, $10 \equiv -1 [11]$ et $-7 \equiv 4 [11]$ donc $3u_n \equiv (-1)^{n+1} + 4 [11]$ i.e. puisque $(-1)^{n+1} = (-1) \times (-1)^n = -(-1)^n$, $3u_n \equiv 4 - (-1)^n [11]$.

- b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n est pair alors $3u_n \equiv 4 - 1 [11] \equiv 3 [11]$ et si n est impair alors $3u_n \equiv 4 + 1 [11] \equiv 5 [11]$. Comme 3 et 5 sont compris entre 0 et 10, on en déduit que le reste de $3u_n$ modulo 11 est soit 3 soit 5. En tout cas, ce reste n'est pas 0 donc 11 ne divise pas $3u_n$. Il s'ensuit que 11 ne divise pas u_n .
6. a. Comme $10^4 = 17 \times 588 + 4$ et $0 \leq 4 < 17$, le reste de 10^4 modulo 17 est 4.
Dès lors $10^{16} = (10^4)^4 \equiv 4^4 [17] \equiv 256 [17]$. Or, $256 = 17 \times 15 + 1$ donc $256 \equiv 1 [17]$ et donc $10^{16} \equiv 1 [17]$.

b. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors,

$$3u_{16k+8} = 10^{(16k+8)+1} - 7 = 10^{16k+9} - 7 = (10^{16})^k \times 10^9 - 7 \equiv 1^k \times 10^9 - 7 [17] \equiv 10^9 - 7 [17].$$

Or, $10^9 = 10^{2 \times 4 + 1} = (10^4)^2 \times 10 = 4^2 \times 10 [17] \equiv 160 [17] \equiv 7 [17]$ donc $3u_{16k+8} \equiv 7 - 7 [17] \equiv 0 [17]$. Ainsi, 17 divise $3u_n$ donc, comme 17 est premier, par le lemme d'Euclide, 17 divise 3 ou divise u_{16k+8} . De plus, $0 < 3 < 17$ donc 17 ne divise pas 3 et ainsi 17 divise u_{16k+8} .

On a donc bien montré que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, 17 divise u_{16k+8} .