Corrigés des exercices donnés pour le mardi 12 mai 2020

Exercice 33 p. 27

1. Les nombres 2 et 3 sont deux nombres premiers consécutifs.
2. Supposons que p, $p+1$ et $p+2$ sont des nombres premiers. Si $p=2$ alors $p+2=4$ n'est pas premier donc $p>2$. Or, parmi les trois nombres p, $p+1$ et $p+2$, l'un au moins est pair et différent de 2 donc il n'est pas premier. Ainsi, il n'existe pas trois nombres premiers consécutifs.

Exercice 82 p. 27

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $f(n)=(n+7)(n+11)$. Or, comme $n \geqslant 0$, $n+7>1$ et $n+11>1$ donc $f(n)$ admet un diviseur autre 1 et lui-même. Ainsi, $f(n)$ n'est pas premier.
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n+7<n+11$ donc pour que $f(n)$ soit premier, il faut que $n+7=1$ i.e. $n=-6$. Réciproquement, $f(-6)=5$ est un nombre premier.

   Ainsi, l'unique entier relatif n tel que $f(n)$ est premier est $n=-6$.

Exercice 85 p. 30 Notons n_1 et n_2 les deux solutions entières de $x^2-px+q=0$ avec $n_1<n_2$. Alors, $(x-n_1)(x-n_2)=x^2-px+q$ i.e. $x^2-(n_1+n_2)x+n_1n_2=x^2-px+q$ donc $p=n_1+n_2$ et $q=n_1n_2$. Or, q est premier donc cela impose $n_1=1$ et $n_2=q$. Ainsi, $p=n_1+n_2=q+1$ donc p et q sont consécutifs et donc $q=2$ et $p=3$ (voir l'exercice 33 p. 27).

Exercice 86 p. 30

1. Supposons que n est premier. Si $n=2$ alors $n+7=9$ donc $n+7$ n'est pas premier. Sinon, n est impair donc $n+7$ est un nombre pair supérieur strictement à 2 : il n'est donc pas premier.

   Dans tous les cas, $n+7$ n'est pas premier.
2. La réciproque est : « pour tout entier naturel n, si $n+7$ n'est pas premier alors n est premier ».

   Cette réciproque est fausse. Par exemple, $1+7=8$ n'est pas premier mais 1 n'est pas premier non plus.
3. L'implication est fausse. Par exemple, 2 est premier et $2+11=13$ est premier aussi.

   Il est assez simple de voir, par le même raisonnement que dans la question 1, que c'est le seul contre-exemple possible.

Exercice 88 p. 30

1. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3 et r le reste de p modulo 3. Alors, $r \neq 0$ car sinon 3 diviserait p et comme $p>3$, p ne serait pas premier. Ainsi, $r=1$ ou $r=2$.

   Si $r=1$ alors $p \equiv 1\ [3]$ donc $8p^2+1 \equiv 8 \times 1^2+1\ [3] \equiv 0\ [3]$ donc 3 divise $8p^2+1$. De plus, $8p^2+1>3$ donc $8p^2+1$ n'est pas premier.

   Si $r=2$ alors $p \equiv 2\ [3]$ donc $8p^2+1 \equiv 8 \times 2^2+1\ [3] \equiv 0\ [3]$ donc 3 divise $8p^2+1$. De plus, $8p^2+1>3$ donc $8p^2+1$ n'est pas premier.

   Comme $8p^2+1 \geqslant 2$, on conclut que $8p^2+1$ est composé.
2. La réciproque est « pour tout entier $p>3$, si $8p^2+1$ est composé alors p est premier ».

   Cette réciproque est fausse. Par exemple, $8 \times 4^2+1=129=3 \times 43$ est composé mais 4 n'est pas premier.