Corrigés des exercices donnés pour le mardi 02 juin mai 2020

Exercice 48 p. 63

1. On a $E(\sqrt{113}) = 10$ et 113 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7 donc 113 est premier.
2. Comme 113 est premier, il est premier avec tout nombre qu'il ne divise pas. Il est donc premier avec 7 et ainsi, d'après le petit théorème de Fermat, $7^{112} \equiv 1\ [113]$. Comme $0 \leqslant 1 < 113$, on conclut que le reste de 7^{112} modulo 113 est 1.

Exercice 103 p. 67

1. **a.** Le nombre p divise $a+b$ et ab donc il divise toute combinaison linéaire de ces deux nombres. En particulier, il divise $a(a+b)-ab$ et $b(a+b)-ab$ i.e. p divise a^2 et b^2.

   b. Comme p est premier et p divise $a^2 = a \times a$, par le lemme d'Euclide, p divise a. De même, p divise b.

   c. Notons $d = \text{PGCD}(a,b)$. Comme p divise a et b, p divise d. Réciproquement, d divise a et b donc d divise $a+b$ et ab et ainsi d divise p. Comme d et p sont positifs, on conclut que $p = d$.
2. **a.** Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a \leqslant b$, $\text{PGCD}(a,b) = 5$ et $\text{PPCM}(a,b) = 170$. Alors, il existe des entiers a' et b' premiers entre eux tels que $a = 5a'$ et $b = 5b'$. De plus, $\text{PPCM}(a,b) = 5a'b'$ donc $a'b' = \frac{170}{5} = 34$. Comme a et b sont positifs et $a \leqslant b$, on a également a' et b' positifs et $a' \leqslant b'$ donc $(a',b') = (1,34)$ ou $(a',b') = (2,17)$ i.e. $(a,b) = (5,170)$ ou $(a,b) = (10,85)$.

   Réciproquement,

   - si $(a,b) = (5,170)$ alors $\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(5, 5\times 34) = 5\text{PGCD}(1,34) = 5$ et $\text{PPCM}(a,b) = \frac{5\times 170}{5} = 5$;
   - si $(a,b) = (10,85)$ alors $\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(5\times 2, 5\times 17) = 5\text{PGCD}(2,17) = 5$ et $\text{PPCM}(a,b) = \frac{10\times 85}{5} = 170$.

   Ainsi, les solutions du système sont $(5,170)$ et $(10,85)$.
3. Soit a et b deux entiers non nuls tels que $a \leqslant b$, $\text{PGCD}(a+b,ab) = 5$ et $\text{PPCM}(a,b) = 170$. Comme 5 est premier, d'après la question **1.**, $\text{PGCD}(a,b) = 5$ donc, d'après la question **2.a.**, $(a,b) = (5,170)$ ou $(a,b) = (10,85)$.

   Réciproquement,

   - si $(a,b) = (5,170)$ alors $\text{PGCD}(a+b,ab) = \text{PGCD}(175,850) = 25$ donc $(5,170)$ n'est pas solution ;
   - si $(a,b) = (10,85)$ alors $\text{PGCD}(a+b,ab) = \text{PGCD}(95,850) = 5$ et $\text{PPCM}(a,b) = \frac{10\times 85}{5} = 170$ donc $(10,85)$ est solution.

   Ainsi, l'unique solution du système est $(10,85)$.

Exercice 108 p. 68

1. Comme 5 est un nombre premier, d'après le petit théorème de Fermat, pour tout entier n, $n^5 \equiv n\ [5]$ donc 5 divise A.
2. Faisons un tableau de reste modulo 3,

Reste de n modulo 3	0	1	2
Reste de n^5 modulo 3	0	1	2
Reste de $n^5 - n$ modulo 3	0	0	0

Ainsi, dans tous les cas, $n^5 - n \equiv 0\ [3]$ donc 3 divise A.

3. Ainsi, 3 et 5 divise A donc $\mathrm{PPCM}(3, 5)$ divise A. Comme 3 et 5 sont premiers, ils sont premiers entre eux donc $\mathrm{PPCM}(3, 5) = 15$ donc 15 divise A.

Exercice 161 p. 39

1. On a $U_0 = 2^0 + 3^0 + 6^0 - 1 = 2$, $U_1 = 2^1 + 3^1 + 6^1 - 1 = 10$, $U_2 = 2^2 + 3^2 + 6^2 - 1 = 48$, $U_3 = 2^3 + 3^3 + 6^3 - 1 = 250$, $U_4 = 2^4 + 3^4 + 6^4 - 1 = 1392$ et $U_5 = 2^5 + 3^5 + 6^5 - 1 = 8050$.

2. 2 divise U_0, 3 divise U_2, 5 divise U_1 et 7 divise U_5 donc 2, 3, 5 et 7 appartiennent à (E).

3. **a.** Comme $p > 3$, p est premier avec 2 et avec 3 donc également avec 6. Ainsi, d'après le petit théorème de Fermat, $2^{p-1} \equiv 1\ [p]$, $3^{p-1} \equiv 1\ [p]$ et $6^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

b. On en déduit que

- $6 \times 2^{p-2} = 3 \times 2^{p-1} \equiv 3 \times 1\ [p] \equiv 3\ [p]$;
- $6 \times 3^{p-2} = 2 \times 3^{p-1} \equiv 2 \times 1\ [p] \equiv 2\ [p]$.

c. Ainsi,

$$\begin{aligned} 6U_{p-2} &= 6 \times 2^{p-2} + 6 \times 3^{p-2} + 6 \times 6^{p-2} - 1 \\ &\equiv 3 + 2 + 6 \times 1 - 1\ [p] \\ &\equiv 0\ [p] \end{aligned}$$

donc p divise $6U_{p-2}$. Or, p est premier avec 6 donc, par le lemme d'Euclide, p divise U_{p-2}. Ainsi, $p \in (E)$.