Exercices sur les nombres complexes (aspects algébriques)

Exercice 1. On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = 2 - 3\mathrm{i}$.
Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

a) $z_3 = z_1 + z_2$; *b)* $z_4 = z_1 z_2$; *c)* $z_5 = \dfrac{1}{z_1}$; *d)* $z_6 = \dfrac{z_1}{z_2}$

e) $z_7 = \overline{z_1}$; *f)* $z_8 = \overline{z_1 - z_2}$; *g)* $z_9 = \dfrac{1}{\overline{z_2}}$: *h)* $z_{10} = \dfrac{z_2}{z_1}$.

Exercice 2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que $z - \overline{z}(\mathrm{i}z + 1)$ est un imaginaire pur.

Exercice 3. Démonter que, si z est un imaginaire pur et si n est un entier naturel impair, alors z^n est également un imaginaire pur.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z_n = (2 - 2\mathrm{i})^{4n}$. Déterminer $\mathrm{Re}(z_n)$ et $\mathrm{Im}(z_n)$.

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(\mathrm{i}z + 1)(z - 1 + 3\mathrm{i}) = 0$.
Même question avec (F) : $(\mathrm{i}z - 1)(\overline{z} + 1 - 3\mathrm{i}) = 0$.

Exercice 6. Pour tout complexe z, on pose $Z = z - 2\overline{z} + \mathrm{i}$.

1. Calculer Z dans les cas suivants : $z = 0$; $z = \mathrm{i}$ puis $z = 1 - \mathrm{i}$.
2. On écrit z sous forme algébrique $z = x + \mathrm{i}\,y$. Déterminer la forme algébrique de Z en fonction de x et y.
3. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $Z = 1 - \mathrm{i}$.
4. En déduire que Z est imaginaire pur si et seulement si z imaginaire pur.

Exercice 7. À tout nombre complexe z différent de i, on associe le nombre complexe Z défini par

$$Z = \frac{z - 1 + 2\,\mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}.$$

1. Calculer la valeur de Z en prenant $z = 1 - \mathrm{i}$. (On donnera le résultat sous forme algébrique.)
2. Dans toute cette question z est un complexe quelconque différent de i. On pose $z = x + \mathrm{i}\,y$ et $Z = X + \mathrm{i}\,Y$ où x, y, X et Y sont des nombres réels.
   - **a.** Montrer que $X = \dfrac{x^2 - x + y^2 + y - 2}{x^2 + (y-1)^2}$ et $Y = \dfrac{3x + y - 1}{x^2 + (y-1)^2}$.
   - **b.** Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
   - **c.** Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

Corrigés

Exercice 1.

$z_3 = 1 + \mathrm{i} + 2 - 3\,\mathrm{i}$ soit $\boxed{z_3 = 3 - 2\,\mathrm{i}}$.

$z_4 = z_1 z_2 = (1+\mathrm{i})(2-3\,\mathrm{i}) = 2 - 3\,\mathrm{i} + 2\,\mathrm{i} + 3$ soit $\boxed{z_4 = 5 - \mathrm{i}}$.

$z_5 = \dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{1^2+1^2}$ soit $\boxed{z_5 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}}$.

$z_6 = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2-3\,\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})(2+3\,\mathrm{i})}{2^2+3^2} = \dfrac{2+3\,\mathrm{i}+2\,\mathrm{i}-3}{13}$ soit $\boxed{z_6 = -\dfrac{1}{13} + \dfrac{5}{13}\,\mathrm{i}}$.

$z_7 = \overline{1+\mathrm{i}}$ soit $\boxed{z_7 = 1 - \mathrm{i}}$.

$z_8 = \overline{1+\mathrm{i}-(2-3\,\mathrm{i})} = \overline{-1+4\,\mathrm{i}}$ soit $\boxed{z_8 = -1 - 4\,\mathrm{i}}$.

$z_9 = \dfrac{1}{\overline{2-3\,\mathrm{i}}} = \dfrac{1}{2+3\,\mathrm{i}} = \dfrac{2-3\,\mathrm{i}}{2^2+3^2}$ soit $\boxed{z_9 = \dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}\,\mathrm{i}}$.

$z_{10} = \overline{\left(\dfrac{2-3\,\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)} = \dfrac{\overline{2-3\,\mathrm{i}}}{\overline{1+\mathrm{i}}} = \dfrac{2+3\,\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(2+3\,\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{1^2+(-1)^2} = \dfrac{2+2\,\mathrm{i}+3\,\mathrm{i}-3}{2}$ soit $\boxed{z_{10} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\,\mathrm{i}}$.

Exercice 2. On peut écrire $z - \bar{z}(\mathrm{i}\,z+1) = z - \mathrm{i}\,\bar{z}z - \bar{z} = z - \bar{z} - \mathrm{i}\,z\bar{z} = 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z) - \mathrm{i}\,z\bar{z} = \mathrm{i}\,(2\,\mathrm{Im}(z) - z\bar{z})$. Or, par définition, $\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$ et, par propriété, $z\bar{z} \in \mathbb{R}$. On peut donc conclure que $\boxed{z - \bar{z}(\mathrm{i}\,z+1) \text{ est un imaginaire pur}}$.

Exercice 3. Soit z un imaginaire pur et n est un entier naturel impair. Alors, il existe un réel b tel que $z = \mathrm{i}\,b$ et un entier naturel k tel que que $n = 2k+1$. Dès lors, $z^n = (\mathrm{i}\,b)^{2k+1} = \mathrm{i}^{\,2k+1} b^{2k+1}$. Or, $\mathrm{i}^{\,2k+1} = \mathrm{i}^{\,2k}\mathrm{i}^{\,1} = (\mathrm{i}^{\,2})^k\,\mathrm{i} = (-1)^k\,\mathrm{i}$ donc $z^n = (-1)^k b^{2k+1}\,\mathrm{i}$ ce qui prouve que z^n est imaginaire pur car $(-1)^k b^{2k+1}$ est réel.

Exercice 4. On a

$$\begin{aligned} z_n &= \left[(2-2\mathrm{i})^4\right]^n = \left[\left((2-2\mathrm{i})^2\right)^2\right]^n = \left[\left(4 - 8\mathrm{i} + (2\mathrm{i})^2\right)^2\right]^n \\ &= \left[(4 - 8\mathrm{i} - 4)^2\right]^n = \left[(-8\mathrm{i})^2\right]^n = \left[64\mathrm{i}^2\right]^n = (-64)^n \end{aligned}$$

donc $\mathrm{Re}(z_n) = (-64)^n$ et $\mathrm{Im}(z_n) = 0$.

Exercice 5. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow \mathrm{i}z + 1 = 0 \text{ ou } z - 1 + 3\mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{i}z + 1 = 0 \text{ ou } z - 1 + 3\mathrm{i} = 0 \\ &\Leftrightarrow z = -\frac{1}{\mathrm{i}} \text{ ou } z = 1 - 3\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \mathrm{i} \text{ ou } z = 1 - 3\mathrm{i} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \{\mathrm{i}\ ;\ 1 - 3\,\mathrm{i}\}}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$(F) \Leftrightarrow \mathrm{i}z - 1 = 0 \text{ ou } \overline{z} + 1 - 3\mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\mathrm{i}} \text{ ou } \overline{z} = -1 + 3\mathrm{i} \Leftrightarrow z = -\mathrm{i} \text{ ou } z = -1 - 3\mathrm{i}$$

$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (F) \text{ est } \{-\mathrm{i}\ ;\ -1 - 3\,\mathrm{i}\}}$.

Exercice 6.

1. Si $z = 0$ alors $Z = \mathrm{i}$, si $z = \mathrm{i}$ alors $Z = \mathrm{i} - 2(-\mathrm{i}) + \mathrm{i} = 4\mathrm{i}$ et si $z = 1 - \mathrm{i}$ alors $Z = 1 - \mathrm{i} - 2(1 + \mathrm{i}) + \mathrm{i} = -1 - 2\mathrm{i}$.

2. $Z = x + \mathrm{i}y - 2\left(\overline{x + \mathrm{i}y}\right) + \mathrm{i} = x + \mathrm{i}y - 2(x - \mathrm{i}y) + \mathrm{i}$ soit $\boxed{Z = -x + (3y + 1)\mathrm{i}}$.

3. En gardant les mêmes notations, on en déduit que

$$Z = 1 - \mathrm{i} \Leftrightarrow -x + (3y + 1)\mathrm{i} = 1 - \mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 1 \\ 3y + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow z = -1 - \frac{2}{3}\mathrm{i}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des } z \text{ tels que } Z = 1 - \mathrm{i} \text{ est } \left\{-1 - \tfrac{2}{3}\mathrm{i}\right\}}$.

4. Z est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(Z) = 0$ donc si et seulement si $x = 0$. Or, $x = \mathrm{Re}(z)$ donc $x = 0$ si et seulement si z imaginaire pur. On a donc montré que <u>Z est imaginaire pur si et seulement si z est imaginaire pur</u>.

Exercice 7.

1. Si $z = 1 - \mathrm{i}$ alors

$$Z = \frac{z - 1 + 2\mathrm{i}}{z - \mathrm{i}} = \frac{1 - \mathrm{i} - 1 + 2\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i} - \mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}(1 + 2\mathrm{i})}{1^2 + (-2)^2} = \frac{\mathrm{i} - 2}{5}$$

soit $\boxed{Z = -\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}\mathrm{i}}$

2. a. Écrivons Z sous forme algébrique :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{x + \mathrm{i}y - 1 + 2\mathrm{i}}{x + \mathrm{i}y - \mathrm{i}} = \frac{(x - 1) + \mathrm{i}(y + 2)}{x + \mathrm{i}(y - 1)} = \frac{[(x - 1) + \mathrm{i}(y + 2)][x - \mathrm{i}(y - 1)]}{x^2 + (y - 1)^2} \\ &= \frac{(x - 1)x - \mathrm{i}(x - 1)(y - 1) + \mathrm{i}(y + 2)x + (y + 2)(y - 1)}{x^2 + (y - 1)^2} \\ &= \frac{x^2 - x + \mathrm{i}(-xy + x + y - 1) + \mathrm{i}(yx + 2x) + y^2 - y + 2y - 2}{x^2 + (y - 1)^2} \\ &= \frac{x^2 - x + y^2 + y - 2}{x^2 + (y - 1)^2} + \mathrm{i}\,\frac{3x + y - 1}{x^2 + (y - 1)^2} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{X = \mathrm{Re}(Z) = \frac{x^2 - x + y^2 + y - 2}{x^2 + (y - 1)^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{Y = \mathrm{Im}(Z) = \frac{3x + y - 1}{x^2 + (y - 1)^2}}.$$

b.

$$M \in \mathrm{E} \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Y = 0 \Leftrightarrow \frac{3x + y - 1}{x^2 + (y - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 1 \\ (x\ ;\ y) \neq (0\ ; 1) \end{cases}$$

donc l'ensemble $\boxed{\text{E est la droite d'équation } y = -3x + 1 \text{ privée du point A}(0\ ; 1)}$.

c.

$$M \in \mathrm{F} \Leftrightarrow Z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow X = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + y^2 + y - 2}{x^2 + (y - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + y^2 + y - 2 = 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = 0 \\ (x\ ; y) \neq (0\ ; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 \\ (x\ ;\ y) \neq (0\ ; 1) \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble $\boxed{\text{F est le cercle de centre I}\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right) \text{ et de rayon } R = \sqrt{\dfrac{5}{2}} \text{ privé du point A}}$.