Exercice 8 p. 64. Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^p = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{8}}\right)^p = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{p\pi}{8}}.$$

Or, $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$ donc

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{4\pi}{8}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}\,.$$

Ainsi, $p = 4$ convient.

Exercice 15 p. 65

1. $a = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$.
2. $b = 11\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}$.
3. $c = \frac{7}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$.
4. $|d| = \sqrt{2}$ et $d = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$.

Exercice 17 p. 65

1. $a = -2\,\mathrm{i}\,.$
2. $b = -4$.
3. $c = 5\left(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{2\pi}{3})\right) = 5(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{5}{2} - \mathrm{i}\,\frac{5\sqrt{3}}{2}$.
4. $d = 7\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4})\right) = 7(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{7\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\,\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 19 p. 65

1. $a = \dfrac{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}} = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}}$.
2. $b = -5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}} = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}+\pi\right)} = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}}$.
3. $c = 4 \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{7}} = 4 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{7}\right)} = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{42}}$
4. $d = 2 \times \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{13\pi}{12}}$
5. $e = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}}\right)^5 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}\right)^5 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{12}}\right)^5 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{12}}$
6. $f = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}}\right)^5}{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}\right)^7} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{10\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{7\pi}{6}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{10\pi}{3}-\frac{7\pi}{6}\right)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{27\pi}{6}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{9\pi}{2}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$

Exercice 21 p. 65

1. $|a| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$. Ainsi, $a = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}$.
2. On pourrait chercher la forme exponentielle du numérateur et du dénominateur mais il est plus simple ici de d'abord calculer ici b sous forme algébrique : $b = \frac{2-2\,\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(2-2\,\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{1^2+1^2} = \frac{2-2\,\mathrm{i}-2\,\mathrm{i}-2}{2} = -2\,\mathrm{i}$ donc $b = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$.
3. $c = \left(\frac{i}{2}\right)^{18} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}\right)^{18} = \frac{1}{2^{18}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{18}{2}} = \frac{1}{2^{18}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,9\pi} = \frac{1}{2^{18}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}$.
4. $|1+\mathrm{i}\,| = \sqrt{2}$ et $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$ donc $d = (1+\mathrm{i}\,)^{13} = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right)^{18} = \left((\sqrt{2})^2\right)^9 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{18\pi}{4}} = 2^9\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{(2\times8+2)\pi}{4}} = 2^9\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 22 p. 64

1. $Z = 2(\sqrt{3}-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{5}}$ et, comme $2(\sqrt{3}-1) > 0$, $|Z| = 2(\sqrt{3}-1)$.

2. $Z' = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{11}}\right)^{23} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{23\pi}{11}}$ donc $|Z'| = 1$.

Exercice 29 p. 64

1. $|z_1| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$ et ainsi $z_1 = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) = 4\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}$

$|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et ainsi $z_2 = \sqrt{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$

2. **a.** $z_1 z_2 = 4\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}} \times \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} = 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})} = 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{12}}$

b. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{12}}$

c. $\frac{z_1^3}{z_2^4} = \frac{\left(4\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}\right)^3}{\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right)^4} = \frac{64\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{6}}}{4\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{4\pi}{4}}} = 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\left(-\frac{\pi}{2}+\pi\right)} = 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$

Exercice 31 p. 66

1. L'affirmation 1 est fausse car $1 + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ n'est pas réel alors que $\frac{2}{\sqrt{3}}$ est réel.

2. On a $\left|-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ et ainsi $-\sqrt{3}+\mathrm{i} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{6}}$ donc $\arg(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\,) = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$ et ainsi

$$\arg((-\sqrt{3}+\mathrm{i}\,)^8) = 8 \times \frac{5\pi}{6}\ [2\pi] = \frac{20\pi}{3}\ [2\pi] = \frac{(3\times 6+2)\pi}{3}\ [2\pi] = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$$

donc l'affirmation est fausse.

3. Par définition, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}) = \arg(-4\sqrt{3}+4\,\mathrm{i}\,)\ [2\pi]$ et $\left|-4\sqrt{3}+4\,\mathrm{i}\right| = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + 4^2} = 8$ donc $-4\sqrt{3}+4\,\mathrm{i} = 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{6}}$. Ainsi, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}) = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$ donc l'affirmation est fausse.

4. $\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{5}}\right)^{15} = 2^{15}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{15\pi}{5}} = 2^{15}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = -2^{15}$ donc l'affirmation est vraie.

Exercice 37 p. 66. — Évidemment, dans l'énoncé, il faut lire un nombre entier n.

1. L'utilisation de la forme exponentielle est ridicule ici. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 5^n est un réel non nul donc ce n'est pas un imaginaire pur.

2. Là aussi, on se demande bien ce qui est passé par la tête des auteurs car la réponse est évidemment oui avec $n = 1$.

3. Là encore, la réponse est oui avec $n = 0$.

4. On a $\left|1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$ et ainsi $1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n = 2^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n\pi}{3}}$ donc $\arg((1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n) = \frac{n\pi}{3}\ [2\pi]$. Si $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n$ est un imaginaire pur à partie imaginaire négative alors $\frac{n\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donc il existe un entier k tel que $\frac{n\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ i.e. en multipliant par $\frac{6}{\pi}$, $2n = -3 + 12k$ soit $3 = 2(6k - n)$ ce qui est absurde car 3 est impair. Ainsi, un tel n n'existe pas.

5. Pour tout entier n, $\left(\cos(\frac{\pi}{5}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{5})\right)^n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{5}}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n\pi}{5}}$ donc, pour $n = 5$, $\left(\cos(\frac{\pi}{5}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{5})\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = -1$ donc un tel entier existe.

Exercice 46 p. 67

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$, d'après les formules d'Euler,

$$z^n - \frac{1}{z^n} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x})^n - \frac{1}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x})^n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} - \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,nx} = 2\,\mathrm{i}\sin(nx).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. De même,

$$z^n + \frac{1}{z^n} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x})^n + \frac{1}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x})^n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,nx} = 2\cos(nx).$$

Exercice 47 p. 67

1. En notant θ et α des arguments respectivement de z et de z', on a $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$ car $|z| = |z'| = 1$.

2. Supposons $z' \neq z$. Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{zz'-1}{z'-z} &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta+\alpha)} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta+\alpha)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,0}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta+\alpha}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta+\alpha}{2}} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\theta+\alpha}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta+\alpha}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\alpha-\theta}{2}} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\alpha-\theta}{2}}\right)} \\
&= \frac{2\,\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)}{2\,\mathrm{i}\sin\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)} \qquad \text{(d'après les formules d'Euler)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

donc $\frac{zz'-1}{z'-z}$ est un réel.

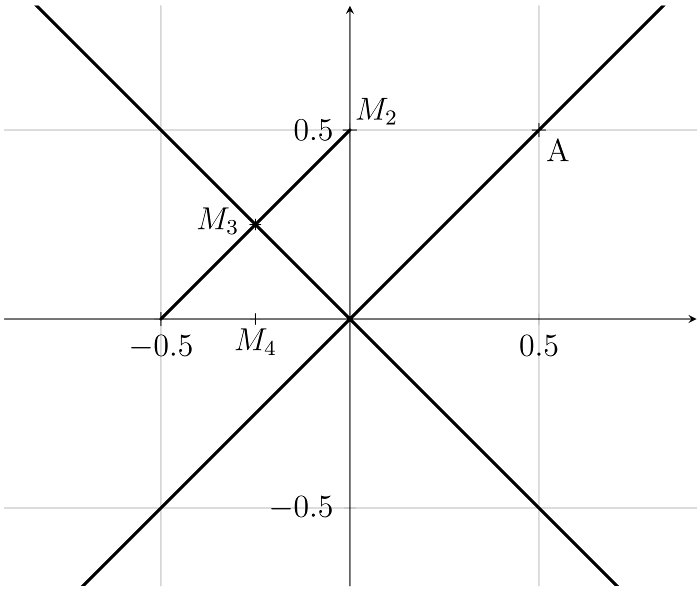
3. De même,

$$\frac{z^2-1}{z} = \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^2 - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,0}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\theta}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\theta} = 2\,\mathrm{i}\sin(\theta)$$

d'après les formules d'Euler. Ainsi, $\frac{z^2-1}{z}$ est un imaginaire pur.

Exercice 48 p. 67

1. Posons $z = \frac{1}{2}(1+\mathrm{i}\,)$ de sorte que $z_{\mathrm{A}} = z$, pour tout entier n, l'affixe de M_n est z^n. On a $|1+\mathrm{i}\,| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ et ainsi $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$ donc $z = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n\pi}{4}}$ donc $z^2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$, $z^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}}$ et $z^4 = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}$.



Les constructions de M_2 et M_4 sont évidentes puisque leurs affixes sont $\frac{1}{2}\,\mathrm{i}$ et $-\frac{1}{4}$. Pour construire M_3, on peut utiliser que son argument est $\frac{3\pi}{4}$ et son module est $\frac{\sqrt{2}}{4}$ donc c'est moitié de la diagonale d'un carré de côté $\frac{1}{2}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $n-1$ est un multiple de 4. Ainsi, il existe un entier k tel que $n-1 = 4k$ i.e. $n = 4k+1$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
z_{\overrightarrow{\mathrm{O}M_n}} = z^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right)^n &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n\pi}{4}} \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{(4k+1)\pi}{4}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)} \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}\right)^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n (-1)^k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} \\
&= (-1)^k \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} \\
&= (-1)^k \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} \\
&= (-1)^k \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} z \\
&= \underbrace{(-1)^k \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}}_{K} z_{\mathrm{A}}
\end{aligned}$$

Ainsi, il existe un réel K tel que $z_{\overrightarrow{\mathrm{O}M_n}} = Kz_{\mathrm{A}} = Kz_{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{O}M_n} = K\overrightarrow{\mathrm{OA}}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}M_n}$ sont colinéaires donc les points O, A et M_n sont alignés.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{O}M_n = |z^n| = |z|^n = |z|^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$. Or, $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$ i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{O}M_n = 0$.

Exercice 60 p. 67

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z' = z \Leftrightarrow z^2 = z \Leftrightarrow z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z(z-1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = 1.$$

Ainsi, les points M tels que $f(M) = M$ sont les points d'affixes 0 ou 1.

2. *Remarque.* La question est mal formulée. Il s'agit de trouver la forme exponentielle de l'affixe de $f(A)$ et $f(B)$.

a. On a $|1 - \mathrm{i}\,| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ et ainsi $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$ donc $(1 - \mathrm{i}\,)^2 = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right)^2 = \sqrt{2}^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{4}} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$. La forme exponentielle de l'affixe de $f(A)$ est $2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$.

b. On a $\left|2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$ et ainsi $2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i} = 4\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}$ donc $(2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}\,)^2 = \left(4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}}$. La forme exponentielle de l'affixe de $f(B)$ est $16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}}$.

3. Commençons par écrire $\sqrt{2} + \mathrm{i}\,\sqrt{2}$ sous forme exponentielle. On a

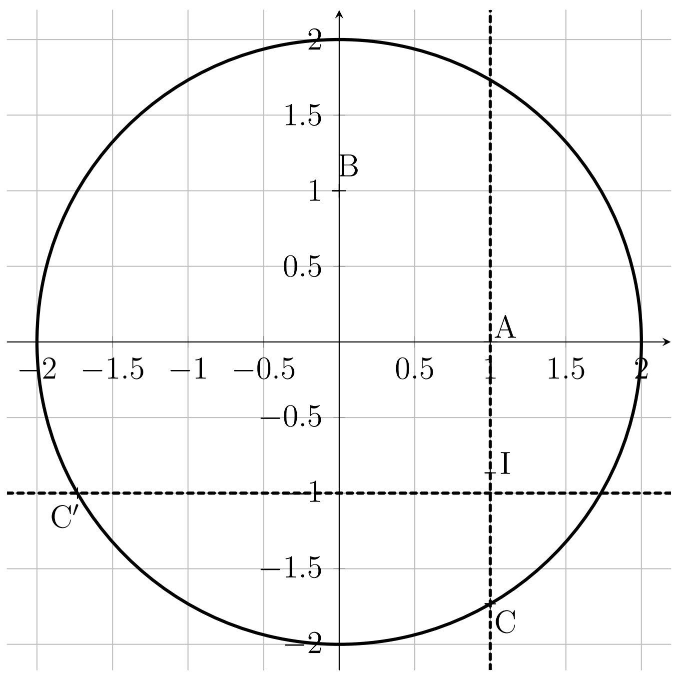
$$\left|\sqrt{2} + \mathrm{i}\,\sqrt{2}\right| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 2$$

et ainsi $\sqrt{2} + \mathrm{i}\,\sqrt{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$. On chercher donc $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ tel que $z^2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$ i.e. $r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\theta} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$. On en déduit que $r^2 = 2$ et $2\theta = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ donc $r = \sqrt{2}$ (car $r > 0$) et $\theta = \frac{\pi}{8}\ [\pi]$.

4. D'après la question précédent, il y a deux solutions possibles : $z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{8}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)} = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{8}} = -z_1$. Réciproquement, on a $z_1^2 = (-z_1)^2 = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{8}}\right)^2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + \mathrm{i}\,\sqrt{2}$ donc D possède deux antécédents par f : le point d'affixe $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{8}}$ et le point d'affixe $-\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{8}}$.

Exercice 63 p. 69

1.



2. **a.** On a $c' = -\mathrm{i}\,c = -\mathrm{i} \times 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = -\mathrm{i} \times 2\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\mathrm{i} \times (1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) = -\mathrm{i} - \sqrt{3}$ i.e. $c' = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

   b. On peut partir de la forme algébrique trouvée en question **a.** mais le plus court est de remarquer que $c' = -\mathrm{i}\,c = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2\mathrm{e} - \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ i.e. $c' = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

   c. D'une part,

$$\text{BC'} = |c' - \mathrm{i}| = \left|-\sqrt{3} - \mathrm{i} - \mathrm{i}\right| = \left|-\sqrt{3} - 2\mathrm{i}\right| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{7}.$$

   D'autre part, on a vu au cours du calcul de la question **2.a.** que $c = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ donc l'affixe de I est $\frac{1+1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 1 - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et ainsi

$$\text{OI} = \left|1 - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{7}$$

   donc on conclut que $\text{BC}' = 2\text{OI}$.

66 p. 70. — Commençons par remarquer que $u^{2019} + \overline{u}^{2019} = u^{2019} + \overline{u^{2019}} = 2\,\mathrm{Re}(u^{2019})$.
Or, $\left|\sqrt{3} + \mathrm{i}\right| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$ et ainsi $\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. Dès lors,

$$u^{2019} = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^{2019} = 2^{2019}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2019\pi}{6}} = 2^{2019}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(168\times12+3)\pi}{6}} = 2^{2019}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2^{2019}\,\mathrm{i}$$

donc l'affirmation est fausse.

Exercice 67 p. 70

1. **a.** Par définition, $\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$.

   b. On en déduit que $z_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times 1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et $z_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^2 = \frac{4}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : « $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$.

   Comme $z_0 = 1$ et $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{0\pi}{6}} = 1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,0} = 1$, P_0 est vraie.
   Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est vraie. Alors,

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_k = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}} \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+1)\pi}{6}} \end{aligned}$$

   donc P_{k+1} est vraie.
   Ainsi, on a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$.

3. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = |z_{n+1} - z_n| = M_nM_{n+1}$.

   b. $d_0 = |z_1 - z_0| = \left|1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right| = \left|\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

   c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_{n+1} - \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n).$$

d. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|\left(1 + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)\right| = \left|1 + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right| |z_{n+1} - z_n| = \frac{2}{\sqrt{3}} d_n.$$

Ainsi, (d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{\sqrt{3}}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = d_0(\frac{2}{\sqrt{3}})^n = \frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{2}{\sqrt{3}})^n$.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} |z_n|^2 + d_n^2 &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)^n = \frac{4}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2(n+1)} = |z_{n+1}|^2 \end{aligned}$$

donc $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2$.

b. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{O}M_{n+1}^2 = \mathrm{O}M_n^2 + M_nM_{n+1}^2$ donc, par la réciproque du théorème de Pythagore, $\mathrm{O}M_nM_{n+1}$ est un triangle rectangle en M_n.

c. Pour construire la suite de points (M_n), on peut commencer par construire les 12 demi-droites D_k définies par $\arg(z) = k\frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$ pour $k \in [\![0, 11]\!]$ (à l'aide du cercle trigonométrique). Ensuite, on place M_0. On construit alors la perpendiculaire à D_0 passant par M_0 : elle coupe D_1 en M_1. Ensuite, on construire la perpendiculaire à D_1 passant par M_1 : elle coupe D_2 en M_2. On continue ainsi le procédé pour construire M_3, M_4, etc.