

## Nombres complexes – Aspects géométriques

**Exercice 1.** — Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère l'application  $f$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  non nulle associe le point  $M' = f(M)$  d'affixe  $z' = \frac{z}{|z|} (2 - |z|)$ .

On note  $\mathcal{C}_1$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

Pour tout complexe  $z$  non nul, on note  $z = re^{i\alpha}$ ,  $r$  étant le module de  $z$  et  $\alpha$  un argument de  $z$ .

1. Montrer que  $z' = (2 - r)e^{i\alpha}$ .
2. Déterminer l'affixe  $a'$  du point  $A'$ , image par  $f$  du point  $A$  d'affixe  $a = 3$ .
3. Soit  $B$  le point d'affixe  $b = -\sqrt{3} + i$ .
  - a. Écrire  $b$  sous forme exponentielle.
  - b. Déterminer l'affixe  $b'$  du point  $B'$ , image du point  $B$  par  $f$ .
4. Déterminer l'ensemble  $E$  des points  $M$  du plan privé du point  $O$  dont l'image par  $f$  est  $O$ .
5. Montrer que le cercle  $\mathcal{C}_1$  est l'ensemble des points  $M$  du plan distincts de  $O$  tels que  $f(M) = M$ .
6. Pour cette question,  $M$  est un point du plan, distinct de  $O$ , n'appartenant pas au cercle  $\mathcal{C}_1$ .  
On appelle  $I$  le milieu du segment  $[MM']$  où  $M'$  est l'image de  $M$  par  $f$ .
  - a. Montrer que  $I$  appartient à  $\mathcal{C}_1$ .
  - b. Montrer que  $I$  appartient à la demi-droite  $[OM)$ .
  - c. En déduire une méthode de construction du point  $M'$ .

**Exercice 2.** — Le plan est rapporté au repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

À tout point  $M$  d'affixe  $z$  du plan, on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par  $z' = \frac{(3 + 4i)z + 5\bar{z}}{6}$ .  
On dira que  $M'$  est l'image de  $M$ .

1. On considère les points  $A, B, C$  d'affixes respectives  $z_A = 1 + 2i, z_B = 1$  et  $z_C = 3i$ .  
Déterminer les affixes des points  $A', B', C'$  images respectives de  $A, B, C$ .  
Placer les points  $A, B, C, A', B', C'$  sur une figure en prenant 3 cm comme unité graphique.
2. On pose  $z = x + iy$  (avec  $x$  et  $y$  réels).  
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de  $z'$  en fonction de  $x$  et  $y$ .
3. On dit qu'un point  $M$  est invariant si  $M' = M$ .  
Montrer que l'ensemble des points  $M$  invariants est la droite  $(D)$  d'équation  $y = \frac{1}{2}x$ .  
Tracer  $(D)$ . Quelle remarque peut-on faire ?
4. Soit  $M$  un point quelconque du plan et  $M'$  son image. Montrer que  $M'$  appartient à  $(D)$ .
5. a. Montrer que, pour tout nombre complexe  $z$  :

$$\frac{z' - z}{z_A} = \frac{z + \bar{z}}{6} + i \frac{z - \bar{z}}{3}.$$

En déduire que le nombre  $\frac{z' - z}{z_A}$  est réel puis que, si  $M' \neq M$ , alors les droites  $(OA)$  et  $(MM')$  sont parallèles.

- b. Un point quelconque  $N$  étant donné, déduire des questions précédentes un procédé de construction de son image  $N'$ . (On étudiera deux cas suivant que  $N$  appartient ou non à  $(D)$ ).  
Effectuer la construction sur la figure pour un point  $N$  quelconque n'appartenant pas à  $(D)$ .

**Exercice 3.** — Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On pose  $z_0 = 8$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4} z_n.$$

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$ .

1. Déterminer la forme algébrique de  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ .
2. a. Écrire  $\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$  sous forme exponentielle.  
b. En déduire, en raisonnant par récurrence, que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_n = \frac{1}{2^{n-3}} e^{i\frac{n\pi}{3}}$ .
3. Démontrer que la distance  $OA_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
4. a. Existe-t-il des entiers  $n \geq 1$  tels que  $A_n$  appartienne à l'axe des abscisses? Si oui, les déterminer tous.  
b. Existe-t-il des entiers  $n \geq 1$  tels que  $A_n$  appartienne à l'axe des ordonnées? Si oui, les déterminer tous.
5. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Démontrer que le triangle  $OA_n A_{n+1}$  est rectangle en  $A_{n+1}$ .
6. On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n$  le milieu de  $[OA_n]$ .  
a. Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'affixe  $t_n$  de  $B_n$ .  
b. On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$Z_n = \frac{z_{n+1}}{t_n}.$$

Déterminer une forme exponentielle de  $Z_n$ .

- c. En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le triangle  $OB_n A_{n+1}$  est équilatéral.
- d. Sur une figure, placer  $A_0$  puis construire, en utilisant seulement la règle et le compas et sans aucun calcul, les points  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ . On laissera apparents les traits de construction.

**Exercice 4.** — Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère des points A, B, C et D distincts d'affixes respectives  $z_A$ ,  $z_B$ ,  $z_C$  et  $z_D$  tels que :

$$\begin{cases} z_A + z_C = z_B + z_D \\ z_A + iz_B = z_C + iz_D \end{cases}.$$

Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

**Exercice 5.** — Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

1. Soit  $\Omega$  un point du plan complexe et  $\theta$  un réel. On note  $\omega$  l'affixe de  $\Omega$ . Soit A un point du plan complexe d'affixe  $a$ . On note  $A'$  l'image de A par la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$ .  
Démontrer que l'affixe de  $A'$  est  $a' = \omega + e^{i\theta}(a - \omega)$ .
2. Le but de cette question est de montrer que  $\sqrt{3}$  est irrationnel. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe deux entiers  $p$  et  $q$  premiers entre eux tels  $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ .  
a. Montrer que 3 divise  $p^2$  puis que 3 divise  $p$ .  
b. Montrer que 3 divise  $q$  et conclure.
3. Démontrer que les sommets d'un triangle équilatéral ne peuvent pas tous avoir des coordonnées rationnelles.