Exercice 19 p. 149. Comme $2n+5-(2n+4)=1$, d'après le théorème de Bézout, $2n+4$ et $2n+5$ sont premiers entre eux. Ainsi, la fraction $\dfrac{2n+5}{2n+4}$ est irréductible.

Remarque. En fait, dans le cours, j'ai demandé, de plus, que le dénominateur soit positif, ce qui n'est pas nécessairement le cas ici car $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 26 2. p. 149. Soit $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $5(x-1)=2(y+3)$. Alors, 2 divise $5(x-1)$ et 2 et 5 sont premiers entre eux (car $5-2\times 2=1$) donc, par le théorème de Gauss, 2 divise $x-1$. Ainsi, il existe un entier k tel que $x-1=2k$ i.e. $x=1+2k$. Dès lors, en remplaçant dans l'égalité $5(x-1)=2(y+3)$, il vient $5\times 2k=2(y+3)$ donc $5k=y+3$ i.e. $y=-3+5k$. Ainsi, une solution est de la forme $(1+2k\,;-3+5k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, soit $k \in \mathbb{Z}$, $x=1+2k$ et $y=-3+5k$. Alors,

$$5(x-1)=5(1+2k-1)=5(2k)=2(5k)=2(-3+5k+3)=2(y+3)$$

donc $(x\,;y)$ est solution.

Ainsi, l'ensemble des solutions de $5(x-1)=2(y+3)$ dans $\mathbb{Z}^2$ est $\{(1+2k\,;-3+5k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 28 p. 149. Si i et j sont deux entiers naturels alors le nombre de minutes écoulées entre 6h et le passage de la $i-$ième rame de la ligne A est $12i$ et le nombre de minutes écoulées entre 6h et la $j-$ème rame de la ligne B est $21j$. On cherche donc deux entiers naturels i et j tels que $12i=21j$ i.e. $4i=7j$. Dans ce cas, 4 divise $7j$. Or, $2\times 4-7=1$ donc, grâce au théorème de Bézout, 4 et 7 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 4 divise j. Ainsi, il existe un entier k tel que $j=4k$ et, par suite, $4i=7(4k)=4(7k)$ donc $i=7k$. Ainsi, les solutions dans $\mathbb{N}^2$ de $4i=7j$ sont de la forme $(7k\,;4k)$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Réciproquement, si $k \in \mathbb{N}$ alors $4(7k)=7(4k)$ donc $(7k\,;4k)$ est solution de $4i=7j$.

Comme les fonctions $k \longmapsto 7k$ et $k \longmapsto 4k$ sont croissantes, on en déduit que la plus petite solution non nulle est obtenue pour $k=1$. Ainsi, les deux rames passeront en même temps à la gare pour la première fois au bout de $7\times 12=4\times 21=84$ minutes i.e. à 7h24.

Exercice 30 p. 149

1. On conjecture que le reste est nul.
2. **a.** On remarque que $A=n(n+1)^2(n+2)$.
   Si n est pair alors $n+2$ aussi donc A est divisible par $2\times 2=4$. Sinon, $n+1$ est pair donc A est divisible par $2^2=4$.
   Dans tous les cas, 4 divise A.

   b. Comme n, $n+1$ et $n+2$ sont trois entiers consécutifs, l'un d'eux est divisible par 3 donc 3 divise $n(n+1)(n+2)$ et donc 3 divise A car $A=n(n+1)(n+2)\times(n+1)$.

   c. Ainsi, 3 et 4 divise A donc, comme 3 et 4 sont premiers entre eux, $3\times 4=12$ divise A. On conclut que, quelle que soit la valeur de n, le reste de A modulo 12 est 0.

Exercice 46 p. 151

1. Supposons que a et b^2 sont premiers entre eux. Alors, par le théorème de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que $au+b^2v=1$ donc $au+b(bv)=1$. Comme u et bv sont des entiers, on déduit du théorème de Bézout que a et b sont premiers entre eux.
   On pouvait aussi raisonner directement. Soit d un entier positif divisant à la fois a et b. Alors, comme b divise b^2, d divise aussi b^2. Ainsi, d divise a et b^2 donc d divise $\mathrm{PGCD}(a,b^2)=1$. Ainsi, comme $d>0$, $d=1$ donc a et b sont premiers entre eux.

2. La réciproque est vraie. En effet, supposons que a et b sont premiers entre eux. Alors, par le théorème de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$. En élevant au carré, on en déduit que $(au + bv)^2 = 1^2$ i.e. $(au)^2 + 2(au)(bv) + (bv)^2 = 1$ donc $a(au^2 + 2ubv) + b^2v^2 = 1$. Ainsi, il existe deux entiers $U = au^2 + 2ubv$ et $V = v^2$ tels que $aU + b^2V = 1$ donc, par le théorème de Bézout, a et b^2 sont premiers entre eux.

On pouvait aussi utiliser le corollaire 22 du cours. Comme a et b sont premiers entre eux, $\mathrm{PGCD}(a, b^2) = \mathrm{PGCD}(a, b \times b) = \mathrm{PGCD}(a, b) = 1$ donc a et b^2 sont premiers entre eux.

Exercice 48 p. 151

Supposons que x et y soient deux entiers naturels tels que $x < y$, $x+y = 600$ et $\mathrm{PGCD}(x, y) = 50$. Alors, par théorème (le théorème 20 du cours), il existe deux entiers x' et y' premiers entre eux tels que $x = 50x'$ et $y = 50y'$ donc $50x' + 50y' = 600$ donc $x' + y' = \frac{600}{50} = 12$. De plus, comme $x < y$, $x' < y'$ donc, comme x' et y' sont premiers entre eux, on en déduit que $(x' ; y') \in \{(1 ; 11) ; (5 ; 7)\}$ donc $(x ; y) \in \{(50 ; 550) ; (250 ; 350)\}$.

Réciproquement, si $(x ; y) \in \{(50 ; 550) ; (250 ; 350)\}$ alors on a bien $x < y$, $x + y = 600$ et, de plus, il existe des entiers premiers entre eux x' et y' tels que $x = 50x'$ et $y = 50y'$ donc $\mathrm{PGCD}(x, y) = 50\mathrm{PGCD}(x', y') = 50$.

On conclut que l'ensemble des solutions est $\{(50 ; 550) ; (250 ; 350)\}$.

Exercice 51 p. 151

1. a. Le nombre x est un inverse de a modulo n si et seulement si $ax \equiv 1\ [n]$ si et seulement si n divise $ax - 1$ s si et seulement s'il existe un entier y tel que $ax - 1 = ny$ si et seulement s'il existe un entier y tel que $ax - ny = 1$.

b. Si $\mathrm{PGCD}(a, n) = 1$ alors, par le théorème de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que $au + vn = 1$ donc, d'après la question précédente, u est un inverse de a modulo n.

2. a. Puisque $5 \times 3 - 7 \times 2 = 1$, 3 est un inverse de 5 modulo 7.

b. Soit x un entier tel que $5x \equiv 3\ [7]$. Alors, $3 \times 5x \equiv 3 \times 3\ [7]$ donc, comme $3 \times 5 \equiv 1\ [7]$ et $3 \times 3 \equiv 2\ [7]$, $x \equiv 2\ [7]$.

Réciproquement, si $x \equiv 2\ [7]$ alors $5x \equiv 5 \times 2\ [7] \equiv 3\ [7]$.

On conclut que l'ensemble des entiers x tel que $5x \equiv 3\ [7]$ est $\{2 + 7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Remarque. En fait, si un entier b est un inverse d'un entier a modulo n alors, pour tout entier c, $ax \equiv c\ [n]$ équivaut à $x \equiv bc\ [n]$. En effet, si $ax \equiv c\ [n]$ alors, en multipliant par b, $bax \equiv bc\ [n]$ i.e. $x \equiv bc\ [n]$ car $ba \equiv 1\ [n]$. Réciproquement, si $x \equiv bc\ [n]$ alors, en multipliant par a, $ax \equiv abc\ [n] \equiv c\ [n]$ car $ab \equiv 1\ [n]$.

Exercice 53 p. 151

1. On a $4^5 - 1 = 1023$ et $4^6 - 1 = 4095$ donc, en utilisant l'algorithme d'Euclide,

$$4095 = 4 \times 1023 + 3$$
$$1023 = 341 \times 3 + 0$$

Ainsi, $\mathrm{PGCD}(4^5 - 1, 4^6 - 1) = 3$.

2. a. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,la proposition P_n : « $u_n \in \mathbb{Z}$ ».

Comme $u_0 = 0$, P_0 est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, $u_k \in \mathbb{Z}$ donc $4u_k + 1 \in \mathbb{Z}$ i.e. $u_{k+1} \in \mathbb{Z}$ i.e. P_{k+1} est vraie.

On conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Z}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $d_n = \mathrm{PGCD}(u_n, u_{n+1})$. Alors, d_n divise u_n et u_{n+1} donc d_n divise $u_{n+1} - 4u_n = 1$. Comme $d_n > 0$, on conclut que $d_n = 1$.

3. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{3} = 4u_n + 1 + \frac{1}{3} = 4u_n + \frac{4}{3} = 4\left(u_n + \frac{1}{3}\right) = 4v_n$$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison 4.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 4^n = \dfrac{4^n}{3}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - \dfrac{1}{3} = \dfrac{4^n - 1}{3}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\mathrm{PGCD}(4^{n+1} - 1, 4^n - 1) = \mathrm{PGCD}(3u_{n+1}, 3u_n) = 3\mathrm{PGCD}(u_{n+1}, u_n) = 3$$

car on a vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux.

Remarque. Il y a un moyen bien plus rapide d'obtenir le résultat de la dernière question. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $(4^{n+1} - 1) - 4(4^n - 1) = 4^{n+1} - 1 - 4^{n+1} + 4 = 3$. De plus, comme $4 \equiv 1$ [3], $4^n \equiv 1^n$ [3] $\equiv 1$ [3] i.e. 3 divise $4^n - 1$ et, de même, 3 divise $4^{n+1} - 1$. On déduit alors du théorème 20 du cours que $\mathrm{PGCD}(4^n - 1, 4^{n+1} - 1) = 3$.

Exercice 59 p. 152

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : « il existe des entiers positifs α_n et β_n tels que $x^n = \alpha_n + \beta_n\sqrt{15}$ et $y^n = \alpha_n - \beta_n\sqrt{15}$ ».
Comme $x^0 = 1 = 1 + 0\sqrt{15}$ et $y^0 = 1 = 1 - 0\sqrt{15}$, P_0 est vraie en posant $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = 0$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est vraie. Alors, il existe deux entiers positifs α_k et β_k tels que $x^k = \alpha_k + \beta_k\sqrt{15}$ et $y^k = \alpha_k - \beta_k\sqrt{15}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k \times x = (\alpha_k + \beta_k\sqrt{15})(4 + \sqrt{15}) \\ &= 4\alpha_k + \alpha_k\sqrt{15} + 4\beta_k\sqrt{15} + 15\beta_k \\ &= (4\alpha + 15\beta_k) + (\alpha_k + 4\beta_k)\sqrt{15} \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $\alpha_{k+1} = 4\alpha_k + 15\beta_k$ et $\beta_{k+1} = \alpha_k + 4\beta_k$, on obtient deux entiers positifs tels que $x^{k+1} = \alpha_{k+1} + \beta_{k+1}\sqrt{15}$.
De plus,

$$\begin{aligned} y^{k+1} &= y^k \times y = (\alpha_k - \beta_k\sqrt{15})(4 - \sqrt{15}) \\ &= 4\alpha_k - \alpha_k\sqrt{15} - 4\beta_k\sqrt{15} + 15\beta_k \\ &= (4\alpha + 15\beta_k) - (\alpha_k + 4\beta_k)\sqrt{15} \\ &= \alpha_{k+1} - \beta_{k+1}\sqrt{15} \end{aligned}$$

donc P_{k+1} est vraie.
Ainsi, on a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers positifs α_n et β_n tels que $x^n = \alpha_n + \beta_n\sqrt{15}$ et $y^n = \alpha_n - \beta_n\sqrt{15}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} \alpha_n^2 - 15\beta_n^2 &= (\alpha_n + \beta_n\sqrt{15})(\alpha_n - \beta_n\sqrt{15}) = x^n y^n = (xy)^n \\ &= \left[(4 + \sqrt{15})(4 - \sqrt{15})\right]^n \\ &= (16 - 15)^n = 1^n = 1 \end{aligned}$$

donc $\alpha_n^2 - 15\beta_n^2 = 1$.
De plus, on a vu que $\alpha_{n+1} = 4\alpha_n + 15\beta_n$ et $\beta_{n+1} = \alpha_n + 4\beta_n$ donc

$$\alpha_n\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}\beta_n = \alpha_n(\alpha_n + 4\beta_n) - (4\alpha_n + 15\beta_n)\beta_n = \alpha_n^2 + 4\alpha_n\beta_n - 4\alpha_n\beta_n - 15\beta_n^2 = \alpha_n^2 - 15\beta_n^2$$

donc, grâce au résultat précédent, $\alpha_n\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}\beta_n = 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $\alpha_n^2 - 15\beta_n^2 = 1$ donc $\alpha_n\alpha_n - (15\beta_n)\beta_n = 1$ et on déduit du théorème de Bézout que α_n et β_n sont premiers entre eux. Ainsi, la fraction $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ est irréductible.

   De plus, $\alpha_n\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}\beta_n = 1$ donc, grâce au théorème de Bézout, $\text{PGCD}(\alpha_n, \alpha_{n+1}) = \text{PGCD}(\beta_n, \beta_{n+1}) = 1$ donc les fractions $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ et $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}$ sont irréductibles.

Exercice 68 p. 153

1. **a.** Puisque $\frac{p}{q}$ est une solution de (E), $78(\frac{p}{q})^3 + 11(\frac{p}{q})^2 + 25\frac{p}{q} - 14 = 0$ i.e. $78\frac{p^3}{q^3} + 11\frac{p^2}{q^2} + 25\frac{p}{q} - 14 = 0$. En multipliant par q^3, on obtient $78p^3 + 11p^2q + 25pq^2 - 14q^3 = 0$ donc $78p^3 + 11p^2q + 25pq^2 = 14q^3$ i.e. $p(78p^2 + 11pq + 25q^2) = 14q^3$. Ainsi, p divise $14q^3$. Or, p et q sont premiers entre eux donc $\text{PGCD}(p, q^3) = \text{PGCD}(p, q \times q^2) = \text{PGCD}(p, q^2) = \text{PGCD}(p, q \times q) = \text{PGCD}(p, q) = 1$ donc p et q sont aussi premiers entre eux. Dès lors, par le théorème de Gauss, p divise 14.

   De même, on a $78p^3 = -11p^2q - 25pq^2 + 14q^3 = q(-11p^2 - 25pq + 14q^2)$ donc q divise $78p^3$. Or, comme p et q sont premiers entre eux, comme précédemment, p^3 et q sont premiers entre eux donc, par le théorème de Gauss, q divise 78.

   b. NB : la question telle qu'elle est posée n'a aucun sens. Il faut lire « En déduire le nombre de nombres rationnels non entiers pouvant être solutions de (E). »

   On déduit de ce qui précède que si $\frac{p}{q}$ est un rationnel non entier écrit sous forme irréductible et solution de (E) alors p divise 14 donc $p \in \{-14\,; -7\,; -2\,; -1\,; 1\,; 2\,; 7\,; 14\}$ et q est un diviseur de 78 strictement plus grand que 1 donc $q \in \{2\,; 3\,; 6\,; 13\,; 26\,; 39\,; 78\}$. Ainsi, il y a 8 choix pour p et 7 choix pour q donc $8 \times 7 = 56$ possibilités.

   Remarque. Je ne vois pas trop pourquoi l'énoncé exclu les solutions entières. Si on considère tous les rationnels (y compris entiers), il y a $8 \times 8 = 64$ possibilités. Attention cependant, on ne dit pas que ces solutions possibles sont effectivement solutions, il faut faire le réciproque pour le savoir. C'est ce qu'on fait dans la question suivante.

2. **a.** Si $\frac{p}{q}$ est une racine de A écrite sous forme irréductible alors p divise 4 et q divise 3 donc $p \in \{-4\,; -2\,; -1\,; 1\,; 2\,; 4\}$ et, comme $q > 0$, $q \in \{1\,; 3\}$. On en déduit que les racines rationnelles possibles pour A sont -4, -2, -1, 1, 2, 4, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$.

   Réciproquement, on vérifie que parmi ces 12 nombres, seuls 1 et $-\dfrac{2}{3}$ sont effectivement des racines de A.

   b. Si $\frac{p}{q}$ est une racine de B écrite sous forme irréductible alors p divise 8 et q divise 6 donc $p \in \{-8\,; -4\,; -2\,; -1\,; 1\,; 2\,; 4\,; 8\}$ et, comme $q > 0$, $q \in \{1\,; 2\,; 3\,; 6\}$. Sachant que p et q sont premiers entre eux, on en déduit que les racines rationnelles possibles pour B sont -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{8}{3}$, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{8}{3}$, $-\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{6}$.

   Réciproquement, on vérifie que parmi ces 20 nombres, seuls $\frac{4}{3}$ est effectivement une racine de B.