Corrigé du devoir surveillé n°1

Questions de cours.

1. On dit que a divise b s'il existe un entier k tel que $b = ka$.

2. Supposons que c divise a et c divise b. Alors, il existe deux entiers k et k' tels que $a = kc$ et $b = k'c$ donc $ua + vb = u(kc) + v(k'c) = (uk + vk')c$ et, comme $uk + vk'$ est un entier, on en déduit que c divise $ua + vb$.

Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Supposons que $3n + 2$ divise 17. Alors, $3n + 2 \in \{-17\,;-1\,;1\,;17\}$ donc $n \in \{-\frac{19}{3}\,;-1\,;-\frac{1}{3}\,;5\}$. Or n est entier donc $n \in \{-1\,;5\}$.
Réciproquement, si $n = -1$ alors $3n + 2 = -1$ divise 17 car $17 = (-1) \times (-17)$ et si $n = 5$ alors $3n + 2 = 17$ divise 17 car $17 = 1 \times 17$.
On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des entiers relatifs } n \text{ tels que } 3n+2 \text{ divise 17 est } \{-1\,;5\}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors, 17 divise $n+5$ si et seulement s'il existe un entier k tel que $n+5 = 17k$ i.e. $n = 17k - 5$.
Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des entiers relatifs } n \text{ tels que 17 divise } n+5 \text{ est } \{17k-5 \mid k \in \mathbb{Z}\}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Supposons que $n+5$ divise $3n+2$. Alors, $n+5$ divise $n+5$ et $3n+2$ donc $n+5$ divise $3(n+5) - (3n+2) = 13$. Ainsi, $n+5 \in \{-13\,;-1\,;1\,;13\}$ i.e. $n \in \{-18\,;-6\,;-4\,;8\}$.
Réciproquement,
- si $n = -18$ alors $n + 5 = -13$ et $3n + 2 = -52 = (-4) \times 13$;
- si $n = -6$ alors $n + 5 = -1$ et $3n + 2 = -16 = (-1) \times 16$;
- si $n = -4$ alors $n + 5 = 1$ et $3n + 2 = -10 = 1 \times (-10)$;
- si $n = 8$ alors $n + 5 = 13$ et $3n + 2 = 26 = 2 \times 13$;

donc, dans tous les cas, $n + 5$ divise $3n + 2$.
Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des entiers relatifs } n \text{ tels que } n+5 \text{ divise } 3n+2 \text{ est } \{-18\,;-6\,;-4\,;8\}}$.

Exercice 2.

1. $2\,019 = 15 \times 134 + 9$ donc $\boxed{r = 9}$.

2. $-2\,019 = 29 \times (-70) + 11$ donc $\boxed{r = 11}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $2n^2 + 5n + 1 = 2n(n + 2) + n + 1$ avec $0 \leqslant n + 1 < n + 2$ donc $\boxed{r = n + 1}$.

Exercice 3.

1. Comme n et $n+1$ sont deux entiers consécutifs, l'un d'eux est pair et donc $\boxed{n(n+1) \text{ est pair}}$.

2. Remarquons que $3n^2 + 3n = 3(n^2 + n) = 3n(n+1)$. Or, d'après la question précédente, il existe un entier k tel que $n(n + 1) = 2k$ donc $3n^2 + 3n = 3(2k) = 6k$ ce qui montre que $\boxed{3n^2 + 3n \text{ est un multiple de 6}}$.

Exercice 4.

1. **a.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$a(a^k - b^k) + b^k(a-b) = a^{k+1} - ab^k + b^k - b^{k+1} = a^{k+1} - b^{k+1}$$

donc $\boxed{a^{k+1} - b^{k+1} = a(a^k - b^k) + b^k(a-b)}$.

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}_n$: « $a-b$ divise $a^n - b^n$ ».

- Comme $a-b$ divise $a^1 - b^1 = a-b$, $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
- Alors, $a-b$ divise $a^k - b^k$ et $a-b$ donc $a-b$ divise $a(a^k - b^k) + b^k(a-b)$ i.e. d'après la question précédente, $a-b$ divise $a^{k+1} - b^{k+1}$. Ainsi, $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

  On a donc démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a-b \text{ divise } a^n - b^n}$.

2. Soit n un entier impair. Alors, $(-1)^n = -1$ donc $a^n + 1 = a^n - (-1)^n$ et $a - (-1) = a+1$ donc, en appliquant la question **1.b.** avec $b = -1$, on en déduit que $\boxed{a+1 \text{ divise } a^n + 1}$.

3. NOTA BENE : l'énoncé de cette question était incomplet : il manquait la quantification sur n : il s'agissait de $n \geqslant 2$.

   Supposons $a \geqslant 3$ et $n \geqslant 2$. Alors, $a^n - 1$ est divisible par 1, par $a^n - 1$ et, d'après la question **1.b.**, par $a-1$. De plus, ces trois nombres sont distincts car $1 < a-1 < a^n - 1$, la première inégalité découlant du fait que $a \geqslant 3$ et la seconde du fait que $n \geqslant 2$. Ainsi, $\boxed{a^n - 1 \text{ admet au moins 3 diviseurs positifs}}$.

4. NOTA BENE : il manquait là encore la quantification sur n : il s'agissait d'un entier naturel non nul.

   Supposons que a est un entier impair au moins égal à 3 et n est un entier naturel non nul. Alors, comme a est impair, a^n est également impair et donc $a^n + 1$ est pair. Ainsi, $a^n + 1$ est divisible par 1, 2 et $a^n + 1$ qui sont tous distincts car $a \geqslant 3$ et $n \geqslant 1$ donc $a^n \geqslant 3$ donc $1 < 2 < a^n + 1$. Ainsi, $\boxed{a^n + 1 \text{ admet au moins 3 diviseurs positifs}}$.

5. NOTA BENE : l'énoncé de cette question était faux : il fallait rajouter l'hypothèse $a \geqslant 2$.

   Comme p divise n, il existe un entier k tel que $n = kp$. Alors, comme p est impair, $(-1)^p = -1$ donc

$$a^n + 1 = a^{kp} + 1 = (a^k)^p + 1 = (a^k)^p - (-1)^p$$

   donc, d'après la question **1.b.**, $a^n + 1$ est divisible par $a^k - (-1) = a^k + 1$. Ainsi, $a^n + 1$ est divisible par 1, $a^k + 1$ et $a^n + 1$ et ces trois entiers sont distincts car $1 < a^k + 1 < a^n + 1$, la première inégalité venant du fait que $a > 0$ et la seconde du fait que $a > 1$ et $k < n$ puisque $p > 1$. Ainsi, $\boxed{a^n + 1 \text{ admet au moins 3 diviseurs positifs}}$.