Devoir surveillé n°1

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Questions de cours. (2 points) Soit a, b, c, u et v des entiers.

1. Rappeler la définition de « a divise b ».

2. Démontrer que si c divise a et c divise b alors c divise $ua + vb$.

Exercice 1. (4 points)

1. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $3n + 2$ divise 17.

2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que 17 divise $n + 5$.

3. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n + 5$ divise $3n + 2$.

Exercice 2. (4 points) — Dans chaque cas, déterminer le reste r dans la division euclidienne de A par B.

1. $A = 2\,019$ et $B = 15$;

2. $A = -2\,019$ et $B = 29$;

3. $A = 2n^2 + 5n + 1$ et $B = n + 2$ où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. (2 points) — Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $n(n + 1)$ est un nombre pair.

2. En déduire que $3n^2 + 3n$ est un multiple de 6.

Exercice 4. (8 points) — Soit a et b deux entiers.

1. **a.** Vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a^{k+1} - b^{k+1} = a(a^k - b^k) + b^k(a - b)$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a - b$ divise $a^n - b^n$.

2. En utilisant la question **1.b.**, montrer que si n est un entier naturel impair alors $a + 1$ divise $a^n + 1$.

3. Montrer que si $a \geqslant 3$ et si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 alors $a^n - 1$ admet au moins 3 diviseurs positifs.

4. Montrer que si a est un entier impair au moins égal à 3 et n un entier naturel non nul alors $a^n + 1$ admet au moins 3 diviseurs positifs.

5. Soit n un entier naturel au moins égal à 3. On suppose que n admet un diviseur impair $p \geqslant 3$ et que $a \geqslant 2$. Montrer que $a^n + 1$ admet au moins 3 diviseurs positifs.