Corrigé du devoir à la maison n°1

Exercice 1

1. $a_0 = 3^3 - 27 = 0 = 0 \times 169$, $a_1 = 3^6 - 26 - 27 = 676 = 4 \times 169$, $a_2 = 3^9 - 52 - 27 = 19604 = 116 \times 169$ donc a_0, a_1 et a_2 sont tous divisibles par 169.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3^{3(n+1)+3} - 26(n+1) - 27 = 2^2 \times 3^{3n+3} - 26n - 52 \\ &= 27(3^{3n+3} - 26n - 27) + 27 \times 26n + 27^2 - 26n - 52 \\ &= 27a_n + 676n + 676 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 27a_n + 676(n+1)}$.

3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : « 169 divise a_n ».
On a vu que a_0 est divisible par 169 donc P_0 est vraie.
Supposons que P_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
Alors, il existe un entier d tel que $a_k = 169d$ donc

$$a_{k+1} = 27 \times 169d + 676(k+1) = 169(27d + 4(k+1)).$$

Comme $27d + 4(k+1)$ est un entier, on en déduit que 169 divise a_{k+1} i.e. P_{k+1} est vraie.
On a donc montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ 169 divise } a_n}$.

Exercice 2. — On considère l'équation (E) : $x^2 - 2y^2 = 1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

1. a. Si n est pair alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$ donc $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ et ainsi, comme $2k^2 \in \mathbb{Z}$, n^2 est pair.
Si n est impair alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$ donc $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ et ainsi, comme $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$, n^2 est impair.
On conclut donc que $\boxed{n \text{ et } n^2 \text{ ont la même parité}}$.

b. Par hypothèse, $a^2 - 2b^2 = 1$ donc $a^2 = 2b^2 + 1$. Comme $b^2 \in \mathbb{Z}$, a^2 est impair et donc, d'après la question **a.**, $\boxed{a \text{ est impair}}$. Par ailleurs, $2b^2 = a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$. Comme a est impair, il existe un entier k tel que $a = 2k+1$. Alors, $2b^2 = (2k+1-1)(2k+1+1) = 2k(2k+2)$ donc $b^2 = 2k(k+1)$. Comme $k(k+1) \in \mathbb{Z}$, il s'ensuit que b^2 est pair et donc, d'après la question **a.**, $\boxed{b \text{ est pair}}$.

2. Pour tout b entier pair compris entre 0 et 15, on calcule $2b^2 + 1$ et on examine si le résultat est le carré d'un entier a.
Ainsi, on trouve que $\boxed{\text{les solutions cherchées sont } (1,0),\ (3,2) \text{ et } (17,12)}$.

3. Supposons que (a, b) et (a', b') sont solutions de (E). Alors, a, b, a' et b' sont des entiers naturels donc $aa' + 2bb'$ et $ab' + a'b$ sont également des entiers naturels. De plus,

$$\begin{aligned} (aa' + 2bb')^2 - 2(ab' + a'b)^2 &= a^2a'^2 + 4aa'bb' + 4b^2b'^2 - 2(a^2b'^2 + 2ab'a'b + a'^2b^2) \\ &= a^2a'^2 + 4b^2b'^2 - 2a^2b'^2 - 2a'^2b^2 \\ &= a^2(a'^2 - 2b'^2) - 2b^2(a'^2 - 2b'^2) \\ &= (a^2 - 2b^2)(a'^2 - 2b'^2) \\ &= 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

donc $\boxed{(aa' + 2bb', ab' + a'b) \text{ est également solution de } (E)}$.

4. On déduit des questions **2.** et **3.** que $(3 \times 17 + 2 \times 2 \times 12, 3 \times 12 + 2 \times 17)$ est solution de (E). Ainsi, $\boxed{(99, 70) \text{ est une nouvelle solution de } (E)}$.

5. Raisonnons par l'absurde en supposant que (E) n'admette qu'un nombre fini de solutions dans $\mathbb{N}^2$. Parmi ces solutions, notons (a, b) une solution telle que, pour tout autre solution (a', b'), $b \geqslant b'$. (Autrement dit, on considère la solution ayant la valeur de b maximale, ce qui est possible puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de solutions). Alors, d'après les questions **2.** et **3.**, $(3 \times a + 2 \times 2 \times b, 3 \times b + a \times 2) = (3a + 4b, 3b + 2a)$ est aussi solution de (E). Or, $b \geqslant 12$ car $(17, 12)$ est solution de (E). Dès lors, comme $a \geqslant 0$, $3b + 2a \geqslant 3b = b + 2b \geqslant b + 2 \times 12 > b$. C'est absurde par maximalité de b.

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ dans } \mathbb{N}^2 \text{ est infini}}$.