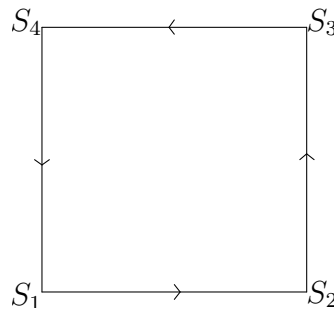


Cours de la séance du mardi 31 mars 2020

On considère le jeu suivant : initialement, on dispose un pion sur le sommet S_1 d'un carré. On lance une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Si on obtient pile, on déplace le pion au sommet suivant dans le sens des flèches : il se retrouve donc sur S_2 . Si on obtient face, on laisse le pion dans sa position : il reste donc sur S_1 . Ensuite, on répète le processus : on relance la pièce, si on obtient pile, on déplace le pion au sommet suivant dans le sens des flèches et si on obtient face, on laisse le pion dans sa position.



Pour tout entier $n \geq 1$, on note A_n l'évènement : « après le n -ième lancer, le pion se trouve sur le sommet S_1 ». On définit de même les évènements B_n , C_n et D_n respectivement pour S_2 , S_3 et S_4 .

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n , b_n , c_n et d_n les probabilités respectives des évènements A_n , B_n , C_n et D_n . On convient, de plus, que $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = d_0 = 0$.

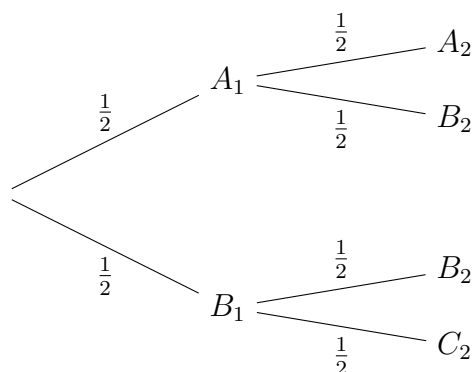
1. Déterminer a_1 , b_1 , c_1 et d_1 puis calculer a_2 , b_2 , c_2 et d_2 .

L'évènement A_1 est l'évènement « le pion se trouve sur S_1 après le premier lancer ». Ainsi, a_1 est la probabilité d'obtenir *face* au premier lancer donc $a_1 = \frac{1}{2}$.

De même, l'évènement B_1 est l'évènement « le pion se trouve sur S_2 après le premier lancer ». Ainsi, b_1 est la probabilité d'obtenir *pile* au premier lancer donc $b_1 = \frac{1}{2}$.

Enfin, comme après 1 lancer, le pion ne peut pas être S_3 ou S_4 à partir de S_1 , on a $c_1 = b_1 = 0$.

Pour déterminer a_2 , b_2 , c_2 et d_2 , on peut utiliser un arbre pondéré :



Grâce à la formule des probabilités totales, on a donc :

$$a_2 = P(A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$b_2 = P(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$c_2 = P(C_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$d_2 = P(D_2) = 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la probabilité de A_{n+1} sachant A_n , la probabilité de B_{n+1} sachant A_n , la probabilité de C_{n+1} sachant A_n et la probabilité de D_{n+1} sachant A_n .

Si A_n est réalisé alors le pion se trouve sur le sommet S_1 après n lancers. Au $(n+1)$ -ième lancer, soit on obtient *face* et le pion reste sur le sommet S_1 soit on obtient *pile* et le pion se déplace sur le sommet S_2 . Ainsi,

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

$$P_{A_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

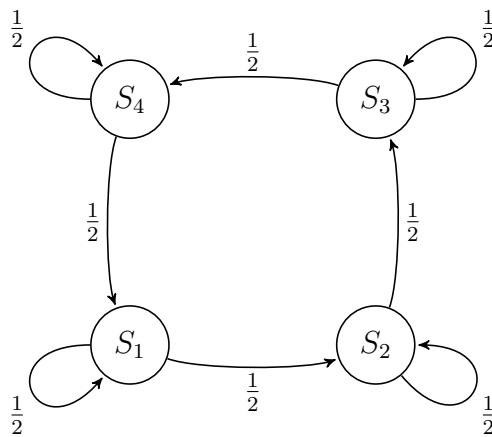
$$P_{A_n}(C_{n+1}) = 0$$

$$P_{A_n}(D_{n+1}) = 0$$

Ces probabilités s'appellent les *probabilités de transition* de l'état A_n aux états A_{n+1} , B_{n+1} , C_{n+1} et D_{n+1} .

On remarque que ces probabilités ne dépendent pas de n . On les appellera aussi les probabilités de transition d'un sommet à un autre.

3. Sur le schéma ci-dessous, indiquer à côté des flèches les probabilités de transition entre les différents sommets.



Cette représentation s'appelle un *graphe probabiliste*.

4. On note $M = (m_{ij})$ la matrice dont le coefficient m_{ij} est la probabilité de transition du sommet S_i au sommet S_j . Déterminer M .

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

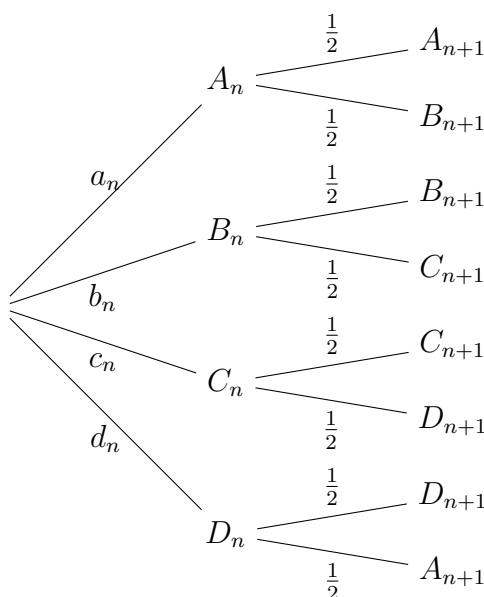
On dit que M est la *matrice de transition* associée au graphe précédent.

5. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice ligne $P_n = (a_n \ b_n \ c_n \ d_n)$. La matrice P_n s'appelle l'état probabiliste après n lancers.

a. Déterminer P_0 et justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n \times M$.

Par définition, $P_0 = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour montrer que $P_{n+1} = P_n \times M$, on peut utiliser un arbre de probabilité :



Grâce à la formule des probabilités totales, on a donc :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = a_n \times \frac{1}{2} + d_n \times \frac{1}{2} = \frac{a_n + d_n}{2}$$

$$b_{n+1} = P(B_{n+1}) = a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times \frac{1}{2} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$c_{n+1} = P(C_{n+1}) = b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2} = \frac{b_n + c_n}{2}$$

$$d_{n+1} = P(D_{n+1}) = c_n \times \frac{1}{2} + d_n \times \frac{1}{2} = \frac{c_n + d_n}{2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (a_{n+1} \ b_{n+1} \ c_{n+1} \ d_{n+1}) \\ &= \left(\frac{a_n + d_n}{2} \ \frac{a_n + b_n}{2} \ \frac{b_n + c_n}{2} \ \frac{c_n + d_n}{2} \right) \\ &= (a_n \ b_n \ c_n \ d_n) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i.e. $P_{n+1} = P_n \times M$.

b. En déduire l'expression de P_n en fonction n , M et P_0 .

Ainsi, (P_n) est une suite géométrique de matrices lignes de raison M .

Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_0 M^n$.

c. Utiliser la question précédente pour retrouver les résultats de la question 1.

On a $P_1 = P_0 M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P_2 = P_0 M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$ donc on retrouve les résultats de la question 1.

d. Déterminer la probabilité que le pion soit sur le sommet S_1 après 5 lancers puis la probabilité qu'il soit sur le sommet S_1 après 10 lancers.

On doit calculer a_5 et a_{10} .

Pour cela, on calcule P_5 puis P_{10} :

$$P_5 = P_0 M^5 = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} \end{pmatrix}$$

donc $a_5 = \frac{3}{16}$ et

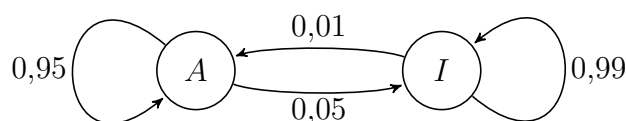
$$P_{10} = P_0 M^{10} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{17}{64} & \frac{1}{4} & \frac{15}{64} \end{pmatrix}$$

donc $a_{10} = \frac{1}{4}$.

Exemple 21

1. On note A l'état : « le client est un client d'agence » et I l'état : « le client est un client internet ».

On a alors le graphe probabiliste suivant :



2. D'après l'énoncé, $P_0 = \begin{pmatrix} 0,92 & 0,08 \end{pmatrix}$.

3. La matrice de transition est

$$M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}.$$

4. a. On a $P_1 = P_0 M$ donc $P_1 = \begin{pmatrix} 0,8748 & 0,1252 \end{pmatrix}$.

b. Comme $2015 = 2010 + 5$, on calcule P_5 . Or, $P_5 = P_0 M^5 \approx \begin{pmatrix} 0,72 & 0,28 \end{pmatrix}$.

Cela signifie qu'en 2015, environ 72% des clients seront des clients d'agence et 28% des clients seront des clients internet.

Exemple 24

1. Il suffit de vérifier (à la main ou la calculatrice) que $PM = P$ donc P est un état stable.

2. Tout état probabiliste est stable par I_2 car, pour tout état probabiliste P , $PI_2 = P$.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ un état probabiliste. Alors, $PM = \begin{pmatrix} b & a \end{pmatrix}$ donc $PM = P$ si et seulement si $a = b$. Comme, de plus, $a + b = 1$, on conclut que l'unique état stable de M est $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4. On vérifie (à la main ou la calculatrice) que $PM = P$ donc P est un état stable.

On peut vérifier que $P'M = P'$ cependant P' n'est pas un état stable car P' n'est pas un état probabiliste (la somme des coefficients de P' n'est pas égale à 1).

Exemple 27. Remarque : on suppose que a_n correspond à l'état A, b_n à l'état B et c_n à l'état C.

1. La matrice de transition est

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2. La matrice M contient des 0 mais la matrice M^2 n'en contient pas donc, par théorème, le système possède un unique état stable P et la suite de matrice (P_n) converge vers P .
3. Pour déterminer P , on dispose de deux méthodes : la première est rapide mais ne fonctionne pas tout le temps et la seconde est systématique mais beaucoup plus lourde.

1^{ère} méthode. On sait que (P_n) converge vers P donc si on calcule P_n pour une grande valeur de n , on aura une valeur proche de P . On peut à partir de cette valeur conjecturer la valeur de P . Il suffit alors de vérifier que l'état trouvé est stable puisque P est unique. Dans notre cas, pour $n = 100$, on trouve $P_{100} \approx \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{2}{13} & \frac{6}{13} \end{pmatrix}$.

Posons $Q = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{2}{13} & \frac{6}{13} \end{pmatrix}$. On vérifie que $QM = Q$ donc Q est un état stable pour M et donc, par unicité $Q = P$ i.e. $P = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{2}{13} & \frac{6}{13} \end{pmatrix}$.

2^{ème} méthode. On cherche l'état probabiliste stable P . Comme P est un état probabiliste, il est de la forme $P = \begin{pmatrix} a & b & 1-a-b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels compris entre 0 et 1. De plus, comme P est un état stable, il vérifie $PM = P$. Or,

$$PM = \begin{pmatrix} a & b & 1-a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{1-a-b}{3} & \frac{1-a-b}{3} & \frac{a}{2} + \frac{3b}{4} + \frac{1-a-b}{3} \end{pmatrix}$$

donc $PM = \begin{pmatrix} \frac{a}{6} - \frac{b}{12} + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{a}{3} - \frac{b}{3} & \frac{a}{6} + \frac{5b}{12} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$PM = P \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{6} - \frac{b}{12} + \frac{1}{3} = a \\ \frac{1}{3} - \frac{a}{3} - \frac{b}{3} = b \\ \frac{a}{6} + \frac{5b}{12} + \frac{1}{3} = 1-a-b \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par 12, la seconde par 3 et la troisième par 12, on obtient

$$\begin{aligned} PM = P &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b + 4 = 12a \\ 1 - a - b = 3b \\ 2a + 5b + 4 = 12 - 12a - 12b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -10a + 4 \\ a = -4b + 1 \\ 14a = -17b + 8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -10a + 4 \\ a = -4(-10a + 4) + 1 \\ 14a = -17(-10a + 4) + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -10a + 4 \\ a = 40a - 15 \\ 14a = 170a - 60 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -10a + 4 \\ 39a = 15 \\ 156a = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -10a + 4 \\ a = \frac{5}{13} \\ a = \frac{5}{13} \end{cases} \\ &=\Leftrightarrow \begin{cases} b = -10a + 4 \\ 39a = 15 \\ 156a = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -10 \times (\frac{5}{13}) + 4 \\ a = \frac{5}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{13} \\ a = \frac{5}{13} \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $1 - \frac{5}{13} - \frac{2}{13} = \frac{6}{13}$, on conclut donc que l'état stable est $P = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{2}{13} & \frac{6}{13} \end{pmatrix}$.