

Exemple 8

Avec les notations de l'exemple 3,

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ et, comme $-1 < 0,5 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. Ainsi, les deux suites de coefficients (u_n) et (v_n) convergent donc la suite de matrice (A_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Comme $\lim n^2 = +\infty$, la suite (a_n) diverge donc la suite de matrice (B_n) diverge.

Avec les notations de l'exemple 5,

1. Les deux suites des coefficients de (C_n) sont constantes donc convergentes. Ainsi, (C_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n+2 = +\infty$, la suite $(n+2)$ diverge donc la suite de matrices (D_n) diverge.

Preuve de la propriété 11

1. On suppose que les matrices X_n sont de taille $k \times 1$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrons que, pour tout entier $n \geq p$, $X_n = A^{n-p}X_p$. Pour cela on raisonne par récurrence. On considère, pour tout entier $n \geq p$, la proposition H_n : « $X_n = A^{n-p}X_p$. Comme $A^0 = I_k$, $X_p = A^0X_p$ donc H_p est vraie.

Supposons que H_m est vraie pour un certain entier $m \geq p$.

Alors, par définition et par hypothèse de récurrence,

$$X_{m+1} = AX_m = A(A^{m-p}X_p) = (AA^{m-p})X_p = A^{m+1-p}X_p$$

donc H_{m+1} est vraie.

On a donc montré par récurrence que, pour tout entier $n \geq p$, $X_n = A^{n-p}X_p$.

2. On suppose que les matrices X_n sont de taille $1 \times k$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrons que, pour tout entier $n \geq p$, $X_n = X_pA^{n-p}$. Pour cela, on raisonne par récurrence. On considère, pour tout entier $n \geq p$, la proposition H_n : « $X_n = X_pA^{n-p}$. Comme $A^0 = I_k$, $X_p = X_pA^0$ donc H_p est vraie.

Supposons que H_m est vraie pour un certain entier $m \geq p$.

Alors, par définition et par hypothèse de récurrence,

$$X_{m+1} = X_mA = (X_pA^{m-p})A = X_p(A^{m-p}A) = X_pA^{m+1-p}$$

donc H_{m+1} est vraie.

On a donc montré par récurrence que, pour tout entier $n \geq p$, $X_n = X_pA^{n-p}$.

Exemple 12

1. Par définition, $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n + 1 \\ -\frac{5}{3}u_n + \frac{4}{3}v_n + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ -\frac{5}{3}u_n + \frac{4}{3}v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, en posant $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on a $X_{n+1} = AX_n + B$.

3. Soit C une matrice de taille 2×1 . Alors,

$$C = AC + B \Leftrightarrow C - AC = B \Leftrightarrow (I_2 - A)C = B.$$

Posons $E = I_2 - A$. Alors, $E = \begin{pmatrix} 1 - (-\frac{1}{2}) & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{3} & 1 - \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est une matrice inversible car $\det(E) = \frac{3}{2} \times (-\frac{1}{3}) - \frac{5}{3} \times (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{3} \neq 0$ et $E^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ -5 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$C = AC + B \Leftrightarrow C = E^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

donc il existe une unique matrice C telle que $C = AC + B$, il s'agit de la matrice $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $Y_{n+1} = X_{n+1} - C = AX_n + B - C$. Or, par définition, $C = AC + B$ donc

$$Y_{n+1} = AX_n + B - (AC + B) = AX_n + B - AC - B = AX_n - AC = A(X_n - C) = AY_n.$$

Ainsi, (Y_n) est une suite géométrique de matrices colonnes de raison A .

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = A^n Y_0$ i.e. $Y_n = A^n(X_0 - C)$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = Y_n + C$ on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n(X_0 - C) + C$.

5. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $H_n : \ll A^n = \begin{pmatrix} \frac{6}{3^n} - \frac{5}{2^n} & -\frac{3}{3^n} + \frac{3}{2^n} \\ \frac{10}{3^n} - \frac{10}{2^n} & -\frac{5}{3^n} + \frac{6}{2^n} \end{pmatrix} \gg$.

$$\text{On a } A^0 = I_2 \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{6}{3^0} - \frac{5}{2^0} & -\frac{3}{3^0} + \frac{3}{2^0} \\ \frac{10}{3^0} - \frac{10}{2^0} & -\frac{5}{3^0} + \frac{6}{2^0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 5 & -3 + 3 \\ 10 - 10 & -5 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \text{ donc } H_0$$

est vraie.

Supposons que H_k est vraie pour un certain rang $k \in \mathbb{N}$.

Alors,

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= AA^k = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{6}{3^k} - \frac{5}{2^k} & -\frac{3}{3^k} + \frac{3}{2^k} \\ \frac{10}{3^k} - \frac{10}{2^k} & -\frac{5}{3^k} + \frac{6}{2^k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \left(\frac{6}{3^k} - \frac{5}{2^k} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{10}{3^k} - \frac{10}{2^k} \right) & -\frac{1}{2} \left(-\frac{3}{3^k} + \frac{3}{2^k} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{5}{3^k} + \frac{6}{2^k} \right) \\ -\frac{5}{3} \left(\frac{6}{3^k} - \frac{5}{2^k} \right) + \frac{4}{3} \left(\frac{10}{3^k} - \frac{10}{2^k} \right) & -\frac{5}{3} \left(-\frac{3}{3^k} + \frac{3}{2^k} \right) + \frac{4}{3} \left(-\frac{5}{3^k} + \frac{6}{2^k} \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{3^k} + \frac{5}{2^{k+1}} + \frac{5}{3^k} - \frac{10}{2^{k+1}} & \frac{3}{2 \times 3^k} - \frac{3}{2^{k+1}} - \frac{5}{2 \times 3^k} + \frac{6}{2^{k+1}} \\ -\frac{30}{3^{k+1}} + \frac{25}{3 \times 2^k} + \frac{40}{3^{k+1}} - \frac{40}{3 \times 2^k} & \frac{15}{3^{k+1}} - \frac{5}{2^k} - \frac{20}{3^{k+1}} + \frac{8}{2^k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3^k} - \frac{5}{2^{k+1}} & -\frac{1}{3^k} + \frac{3}{2^{k+1}} \\ \frac{10}{3^{k+1}} - \frac{15}{3 \times 2^k} & -\frac{5}{3^{k+1}} + \frac{3}{2^k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En remarquant que $\frac{2}{3^k} = \frac{6}{3^{k+1}}$, $-\frac{1}{3^k} = -\frac{3}{3^{k+1}}$, $\frac{15}{3 \times 2^k} = \frac{5}{2^k} = \frac{10}{2^{k+1}}$ et $\frac{3}{2^k} = \frac{6}{2^{k+1}}$, on conclut que H_{k+1} est vraie.

On a donc montré par récurrence que H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Remarquons que $X_0 - C = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X_n &= \begin{pmatrix} \frac{6}{3^n} - \frac{5}{2^n} & -\frac{3}{3^n} + \frac{3}{2^n} \\ \frac{10}{3^n} - \frac{10}{2^n} & -\frac{5}{3^n} + \frac{6}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\left(\frac{6}{3^n} - \frac{5}{2^n}\right) - 2\left(-\frac{3}{3^n} + \frac{3}{2^n}\right) \\ -\left(\frac{10}{3^n} - \frac{10}{2^n}\right) - 2\left(-\frac{5}{3^n} + \frac{6}{2^n}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{6}{3^n} + \frac{5}{2^n} + \frac{6}{3^n} - \frac{6}{2^n} + 2 \\ -\frac{10}{3^n} + \frac{10}{2^n} + \frac{10}{3^n} - \frac{12}{2^n} + 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2^n} \\ 4 - \frac{2}{2^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On conclut donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2^n} \\ 4 - \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix}$.

7. Comme $2 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n-1} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$. Par

somme, on conclut que (X_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

8. Finalement, on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4$.