

Exercice 23 p. 123

1. La matrice de transition du graphe est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.
2. À l'aide de la calculatrice, on trouve $M^2 = \begin{pmatrix} 0,06 & 0,62 & 0,32 \\ 0,05 & 0,63 & 0,32 \\ 0,08 & 0,56 & 0,36 \end{pmatrix}$.

Pour interpréter les coefficients de la première ligne, remarquons que si on note $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $P_0 M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ ce qui correspond exactement à la première ligne de M^2 . Or, d'après le cours, on sait que $P_0 M^2$ est l'état probabiliste de la marche aléatoire après 2 étapes en prenant comme état initial P_0 . Or, l'état P_0 correspond à une position initiale sur le sommet A. Ainsi, les coefficients de la première ligne de M^2 s'interprètent de la manière suivante : partant de A, la probabilité d'être sur A après 2 étapes est 0,06, la probabilité d'être sur B après 2 étapes est 0,62 et la probabilité d'être sur C est 0,32.

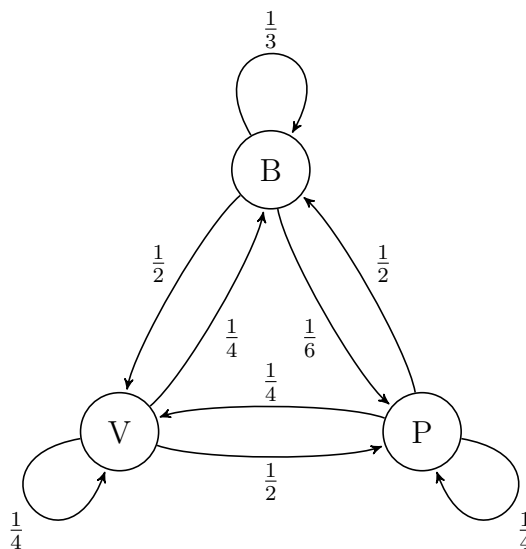
À retenir. La i -ème ligne d'une matrice s'obtient en multipliant cette matrice à gauche par la matrice ligne contenant un 1 en i -ème position et des 0 partout ailleurs et La j -ème ligne d'une matrice s'obtient en multipliant à droite cette matrice par la matrice ligne contenant un 1 en j -ème position et des 0 partout ailleurs.

Exercice 24 p. 123

1. La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.
2. La puce part de A donc l'état initial est $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'état probabilité après 3 sauts est $P_0 M^3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$ donc la probabilité que la puce se retrouve en A après trois sauts est $\frac{2}{9}$.

Exercice 63 p. 128

1. Même si cela n'est pas demandé, on peut représenter le graphe probabiliste pour visualiser la situation. On note B l'état « il fait beau », V l'état « le temps est variable » et P l'état « il pleut ». L'énoncé se traduit par le graphe suivant :



Ainsi, la matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

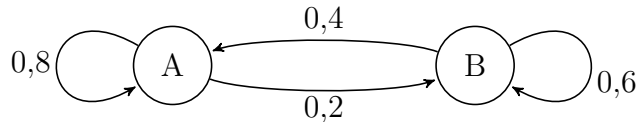
2. a. Notons P_0 l'état probabilité au 1er juillet et P_n l'état probabiliste n jour après le 1er juillet. D'après l'énoncé, $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour déterminer l'état probabiliste le 8 juillet, on calcule P_7 (car $8 = 1 + 7$). Or, $P_7 = P_0 M^7$ et à l'aide de la calculatrice, on trouve $P_7 \approx \begin{pmatrix} 0,356 & 0,339 & 0,305 \end{pmatrix}$. Ainsi, la probabilité qu'il fasse beau le 8 juillet est environ 0,356.
- b. Notons A_i l'évènement « il fait beau le i juillet ». Alors, comme la probabilité de A_{i+1} ne dépend que de A_i , la probabilité cherchée est

$$P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_7}(A_8) = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{2187}$$

soit environ $4,57 \cdot 10^{-4}$.

Exercice 67 p. 129

1. Les états sont assez mal définis dans l'énoncé. Il s'agit plutôt de A : « habiter dans le reste de l'île » et B : « habiter dans la capitale ». L'énoncé se traduit par le graphe suivant :



Ainsi, la matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.

2. Comme M ne contient pas de 0, on sait que la marche aléatoire possède un unique état stable $P = \begin{pmatrix} a & 1 - a \end{pmatrix}$. Cet état vérifie $P = PM$. Or,

$$\begin{aligned} PM &= \begin{pmatrix} a & 1 - a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8a + 0,4(1 - a) & 0,2a + 0,6(1 - a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,4a + 0,4 & -0,4a + 0,6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

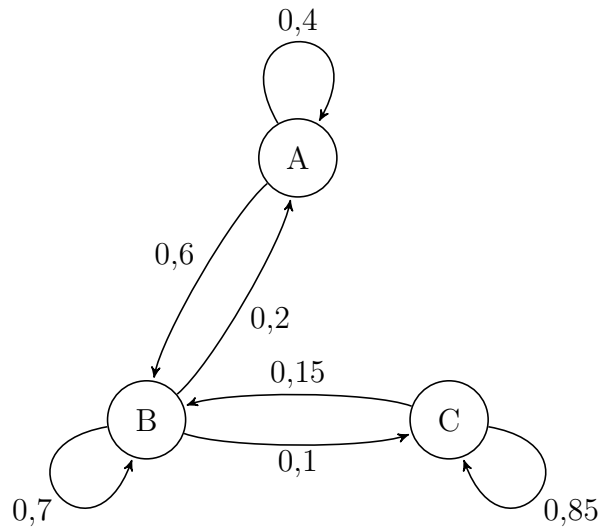
$$P = PM \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,4a + 0,4 \\ 1 - a = -0,4a + 0,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,6a = 0,4 \\ 0,4 = 0,6a \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{0,4}{0,6} \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$$

Comme l'état probabiliste converge vers l'état stable, à long terme, la population de l'île va se stabiliser avec environ $\frac{1}{3}$ des habitants dans la capitale et environ $\frac{2}{3}$ dans le reste de l'île.

Remarque. Les données sur l'état initial fournies par l'énoncé ne sont pas utiles puisque l'état stable est indépendant de l'état initial.

Exercice 72 p. 130

1. On peut représenter cette marche aléatoire par le graphe suivant :



2. La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

3. On vérifie à l'aide de la calculatrice que la matrice M^2 ne contient pas de 0 donc la marche aléatoire possède un unique état stable P .

4. Déterminons P . On écrit $P = \begin{pmatrix} a & b & 1 - a - b \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned}
 PM &= \begin{pmatrix} a & b & 1 - a - b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0,4a + 0,2b & 0,6a + 0,7b + 0,15(1 - a - b) & 0,1b + 0,85(1 - a - b) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0,4a + 0,2b & 0,45a + 0,55b + 0,15 & -0,85a - 0,75b + 0,84 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 P = PM &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,4a + 0,2b \\ b = 0,45a + 0,55b + 0,15 \\ 1 - a - b = -0,85a - 0,75b + 0,84 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0,6a - 0,2b = 0 \\ -0,45a + 0,45b = 0,15 \\ 0,15 = 0,15a + 0,25b \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0,6a - 0,2b = 0 & L_1 \\ -0,45a + 0,45b = 0,15 & L_2 \\ 0,15a + 0,25b = 0,15 & L_3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On voit que $L_1 = L_3 - L_2$ donc on peut supprimer cette ligne. On obtient alors, en multipliant la première ligne par $\frac{20}{3}$ et la seconde par 20

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 3b = 1 & L_1 \leftarrow \frac{20}{3}L_2 \\ 3a + 5b = 3 & L_2 \leftarrow 20L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24a = 4 & L_1 \leftarrow -5L_1 + 3L_2 \\ 8b = 4 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ i.e. $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Par théorème, on sait que la suite des états probabilistes converge vers P donc à long terme, environ la moitié des adhérents choisiront le niveau B. L'affirmation du président est donc fondée.