

◆ Chapitre 2. — Matrices et applications

Dans tout le chapitre, n et m désignent des entiers naturels non nuls.

I. — Définition

Définition 1

Une matrice de taille $n \times m$ (ou de format (n, m)) est un « tableau » de nombres ayant n lignes et m colonnes. Ce tableau est délimité par des parenthèses (ou des crochets).

Exemple 2. — $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & \frac{1}{3} \\ \pi & \sqrt{7} \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 3×2 et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 2×3 .

Cas particuliers. — Si $n = 1$, on dit que la matrice est une *matrice ligne*. Si $m = 1$, on dit que la matrice est une *matrice colonne*. Si $m = n$, on dit que la matrice est une *matrice carrée d'ordre n* .

Exemple 3. — $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -10 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est une matrice ligne, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de colonne et $C = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{17} & -\sin \frac{\pi}{17} \\ \sin \frac{\pi}{17} & \cos \frac{\pi}{17} \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

Définition 4

Les nombres composant une matrice sont appelés les coefficients (ou les termes ou les éléments) de la matrice. Le coefficient se trouvant à l'intersection de la i -ème ligne et la j -ème colonne est appelé le coefficient d'indices i et j . Si la matrice est notée A , on notera en général ce coefficient $a_{i,j}$ (ou a_{ij}).

Exemple 5. — Si on reprend les matrices de l'exemple 2, $a_{1,1} = 2$, $b_{1,1} = 0$, $a_{1,2} = -3$, $b_{1,2} = 0$, $a_{3,1} = \pi$ et $a_{1,3}$ n'existe pas.

Définition 6

On dit que deux matrices sont égales si elles ont la même taille et les mêmes coefficients.

II. — Addition et soustraction

Définition 7

On considère deux matrices A et B de même taille.

1. On définit la somme de A et B , notée $A + B$, comme la matrice obtenue en additionnant terme à terme les coefficients des matrices A et B (i.e. les coefficients ayant les mêmes indices).
2. On définit la différence de A et B , notée $A - B$, comme la matrice obtenue en soustrayant terme à terme les coefficients des matrices A et B (i.e. les coefficients ayant les mêmes indices).

Les matrices $A + B$ et $A - B$ ont la même taille que A et B .

Exemple 8. — Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ alors $A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & -3+4 \\ 2+(-1) & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $A - B = \begin{pmatrix} 1-2 & -3-4 \\ 2-(-1) & 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Définition 9

On appelle matrice nulle de taille $n \times m$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls. On la note $O_{n,m}$ (et simplement O_n si $n = m$).

Exemple 10. — $O_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriété 11

Pour toute matrice A de taille $n \times m$,

1. $A + O_{n,m} = O_{n,m} + A = A$;
2. $A - O_{n,m} = A$;
3. $A - A = O_{n,m}$.

III. — Produit par un réel

Définition 12

Soit k un réel et A une matrice. On définit la matrice kA comme la matrice obtenue en multipliant tous les coefficients de A par k . Elle est de même taille que A .

Exemple 13. — Si $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{2}{6} & -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ alors $6A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 5 & -6 & -4 \end{pmatrix} = B$. On a alors $A = \frac{1}{6}B$.

Définition 14

Soit A une matrice. On appelle opposée de A la matrice $(-1)A$. On la note $-A$. Elle est de même taille que A et formée des coefficients opposés de ceux de A .

Propriété 15

Soit A , B et C des matrices de même taille $n \times m$ et k et k' des réels. Alors,

1. $A + (-B) = A - B$ et, en particulier, $A + (-A) = A - A = O_{n,m}$.
2. $O_{n,m} - A = -A$.
3. $A + B = B + A$ (l'addition des matrices est commutative).
4. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (l'addition des matrices est associative).
5. $k(A + B) = kA + kB$, $(k + k')A = kA + k'A$ et $k(k'A) = (kk')A$.

Corollaire 16

Soit A , B et C trois matrices de même taille et k un réel non nul. Alors

1. $A = B + C$ si et seulement si $A - C = B$
2. $kA = B$ si et seulement si $A = \frac{1}{k}B$.

Exercice 17. — On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $C = 3A - 2B$.
2. Déterminer les matrices X de taille 3×2 alors que $2X + C = A$.

IV. — Produit de deux matrices

Définition 18

Soit $L = (\ell_1 \ \ell_2 \ \cdots \ \ell_p)$ une matrice ligne ayant p colonnes et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne ayant p lignes. On définit le produit de L par C noté $L \times C$ ou LC comme la matrice carrée d'ordre 1 ayant comme seul coefficient le nombre $\ell_1 \times c_1 + \ell_2 \times c_2 + \cdots + \ell_p \times c_p = \sum_{i=1}^p \ell_i c_i$.

Exemple 19. — Calculer $L \times C$ si $L = (1 \ -2 \ 0 \ -3)$ et $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Remarque 20. — Pour des raisons pratiques, on assimile cette matrice à son seul coefficient.

Définition 21

Soit A une matrice de taille $n \times p$ et B une matrice de taille $p \times m$. On définit le produit des matrices A et B , noté $A \times B$ ou AB , comme la matrice de taille $n \times m$ dont le coefficient d'indices i et j est le produit de la i -ème ligne de A avec la j -ème colonne de B (au sens de la définition précédente). Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, le coefficient d'indices i et j de la matrice AB est

$$a_{i,1} \times b_{1,j} + a_{i,2} \times b_{2,j} + \cdots + a_{i,p} \times b_{p,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}.$$

Remarque 22. — Le produit AB n'existe que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

Exemple 23. — Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer tous les produits de

deux matrices possibles avec A , B et C .



- 1) Ce n'est pas parce qu'on peut calculer AB qu'on peut automatiquement calculer BA .
- 2) Même si AB et BA existent, en général $AB \neq BA$. Le produit de matrice n'est pas commutatif.

Exemple 24. — Calculer AB et BA si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Définition 25

Si A et B sont deux matrices telles que $AB = BA$, on dit que A et B commutent.

Exercice 26. — Quelles sont les matrices qui commutent avec la matrice A de l'exemple 24 ?

Propriété 27

Soit A , B et C trois matrices et k un réel. Sous l'hypothèse que les produits écrits ont un sens alors

1. $A(BC) = (AB)C$ (associativité du produit) ;
2. $A(B + C) = AB + AC$ et $(A + B)C = AC + BC$ (distributivité du produit sur la somme) ;
3. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

Propriété 28

Soit A une matrice de taille $n \times m$. Alors, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, $A \times O_{m,p} = O_{n,p}$ et $O_{p,n} \times A = O_{p,m}$.
En particulier, si A est une matrice carrée d'ordre n alors $A \times O_n = O_n \times A = O_n$.



Un produit de deux matrices peut être nul sans qu'aucune des deux matrices ne soit nulle.

Exercice 29. — Déterminer deux matrices A et B non nulles dont le produit est une matrice nulle.

Définition 30

Soit A une matrice carrée d'ordre n .

1. On appelle diagonale principale de A l'ensemble des coefficients de A dont les deux indices sont égaux i.e. les coefficients de la forme $a_{i,i}$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ces coefficients sont appelés les coefficients diagonaux de A .
2. On dit que A est une matrice diagonale si tous les coefficients de A qui ne sont pas diagonaux sont nuls.

Exemple 31. — Les matrices (3) , $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et O_n sont diagonales.

Définition 32

On appelle matrice identité (ou matrice unité) d'ordre n la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1. On la note I_n .

Exemple 33. — $I_1 = (1)$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété 34

Pour toute matrice carrée A d'ordre n , $A \times I_n = I_n \times A = A$.

Définition 35

Soit A une matrice carrée. On définit le carré de A , noté A^2 , par $A^2 = A \times A$. De manière plus générale, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la puissance k -ième de A , notée A^k , comme le produit de A par elle-même k fois c'est-à-dire $A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$.

Remarque 36. — Si A est une matrice carrée non nulle d'ordre n , on convient que $A^0 = I_n$. On peut alors définir la puissance k par récurrence : $A^0 = I_n$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{k+1} = A^k \times A$.

Exemple 37.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Que peut-on dire des puissances de A ?
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer B^2 , B^3 et B^4 . Conjecturer l'expression de B^k en fonction de B et de k et le démontrer.
3. Même question avec la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété 38

Soit A une matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont $a_1, a_2, \dots, a_n$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A^k est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k$. Autrement dit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1}^k & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n^k \end{pmatrix}$$

Exemple 39. — On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -16 & 9 \\ -42 & 23 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A = PDQ$.
2. Calculer QP .
3. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kQ$.
4. Donner, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la forme explicite de A^k en fonction de k .
5. On considère les deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -16u_n + 9v_n$ et $v_{n+1} = -42u_n + 23v_n$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
 - a. Déterminer X_0 et démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
 - b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
 - c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n et v_n en fonction de n .

V. — Matrice inverse d'une matrice carrée

Théorème et définition 40. — (Admis)

Soit A une matrice carrée d'ordre n . On dit que A est inversible s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$. Si tel est le cas, alors la matrice B est unique et cette matrice est appelée l'inverse de la matrice A . On la note A^{-1} .

Remarque 41.

1. Par définition, une matrice et son inverse commutent.

2. Si A est inversible alors A^{-1} est également inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. La matrice I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.
4. La matrice O_n n'est pas inversible car, pour toute matrice B carrée d'ordre n , $O_n B = B O_n = O_n \neq I_n$.

Propriété 42. — (Admise)

Soit A est une matrice carrée d'ordre n . Si B est une matrice carrée d'ordre n telle que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$) alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

Exemple 43. — Démontrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 44. — Soit A une matrice carrée d'ordre n . Montrer que, s'il existe une matrice colonne non nulle X de taille $n \times 1$ telle que $AX = O_{n,1}$ alors A n'est pas inversible.

En déduire que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Propriété 45

Une matrice diagonale D est inversible si et seulement si aucun de ses coefficients diagonaux $a_1, a_2, \dots, a_n$ n'est nul et alors D^{-1} est la matrice diagonale donc les coefficients diagonaux sont $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$. Autrement dit, si aucun des nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ n'est nul alors

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

Propriété 46

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. Alors, A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et, dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Définition 47

Avec les notations précédentes, le nombre $ad - bc$ est appelé le déterminant de A . On le note $\det A$.

Exemple 48. — Déterminer, si possible, les inverses de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 49.

1. Soit A une matrice carrée d'ordre n . On suppose qu'il existe un entier $k \geq 2$ tel que $A^k = I_n$. Démontrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .

2. *Application.* — Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer que $A = \begin{pmatrix} -2 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & b & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

VI. — Ecriture matricielle d'un système et application

Exemple 50. — On considère le système de deux équations à deux inconnues

$$(S) \begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 5x + 7y = -2 \end{cases}.$$

1. Déterminer trois matrices A , X et B de tailles respectives 2×2 , 2×1 et 2×1 telles que le système (S) soit équivalent à l'égalité matricielle $AX = B$.
2. La matrice A est-elle inversible ?
3. En déduire que le système (S) admet une unique solution qu'on déterminera.

Définition 51

On considère un système linéaire de n équations à n inconnues c'est-à-dire un système de la forme

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

On peut alors associer à (S) les trois matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

appelées respectivement *matrice des coefficients*, *matrice des inconnues* et *matrice des seconds membres* telles que le système (S) soit équivalent à l'égalité matricielle $AX = B$.

Cette égalité est appelée *écriture matricielle de (S)* .

Propriété 52

Si (S) est un système linéaire dont l'écriture matricielle est $AX = B$ et si A est une matrice carrée inversible alors (S) admet une unique solution donnée par la matrice $X = A^{-1}B$.

Exemple 53. — Résoudre le système (S) de 3 équations à 3 inconnues suivant

$$(S) \begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \\ -x + 2y + z = 6 \end{cases}.$$

Remarque 54. — Par contraposée de la proposition précédente, si un système n'admet pas une unique solution alors la matrice des coefficients A n'est pas inversible.

Théorème 55. — (Admis)

Un système linéaire dont l'écriture matricielle est $AX = B$ admet une unique solution si et seulement si A est inversible.