♦ Chapitre 8. – Équations polynomiales

I. — Équation polynomiales à coefficients réels

1) Équations du second degré à coefficients réels

Propriété 1

Soit $P : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré à coefficients dans $\mathbb{R}$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. Alors,

1. Si $\Delta > 0$, l'équation $P(z) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$ à savoir

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. Si $\Delta = 0$, l'équation $P(z) = 0$ admet exactement une solution dans $\mathbb{C}$ qui est la même que dans $\mathbb{R}$ à savoir

$$z_0 = \frac{-b}{2a}.$$

3. Si $\Delta < 0$, l'équation $P(z) = 0$ admet exactement deux solutions complexes conjuguées dans $\mathbb{C}$ qui sont

$$z_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

De plus, dans les cas **1.** et **3.**, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$ et, dans le cas **2.**, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = a(z - z_0)^2$.

Exemple 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : z^2 - 2z + 5 = 0 \qquad (E_2) : 2z^2 - z + 1 = 0 \qquad (E_3) : 2z^2 - z - 1 = 0.$$

2) Identités binomiales

Propriété 3. — Formule du binôme de Newton

Soit a et b deux nombres complexes. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple 4. Pour tous complexes a et b,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

Exercice 6. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \longmapsto \cos^4(x)$.

Propriété 7

Soit a et b deux complexes et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}.$$

Exemple 8. Pour tous complexes a et b,

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \qquad \text{et} \qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Exercice 9. Soit a et b deux entiers et n un entier naturel impair. Montrer que $a+b$ divise $a^n + b^n$.

3) Équation de degré supérieur

Définition 10

Soit $n \in \mathbb{N}$. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est appelée fonction polynôme de degré n s'il existe des réels a_0, a_1, ..., a_n avec $a_n \neq 0$ tels que, pour tout réel x,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Exemple 11.

1. $x \longmapsto 7x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ est une fonction polynôme de degré 3.
2. $x \longmapsto x^5 - 1$ est une fonction polynôme de degré 5.
3. Les fonctions affines non constantes sont les fonctions polynômes de degré 1.
4. Les fonctions polynômes du second degré sont les fonctions polynômes de degré 2.

Remarque 12. La forme adoptée dans la définition précédente est la forme développée de f et on peut montrer que l'écriture sous cette forme d'une fonction polynôme de degré n est unique. Les nombres a_0, a_1, ..., a_n sont appelés les coefficients de f. Le nombre a_0 est appelé le coefficient constant et le nombre a_n est appelé le coefficient dominant de f.

Définition 13

Soit f une fonction polynôme. On dit qu'un nombre complexe z est une racine complexe de f si $f(z) = 0$.

Exemple 14. Montrer que $1 + \mathrm{i}$ est une racine complexe de $f : x \longmapsto x^3 - 2x + 4$.

Propriété 15

Soit f une fonction polynôme (à coefficients réels). Si z est une racine complexe de f alors $\overline{z}$ est également une racine complexe de f.

Théorème 16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f une fonction polynôme de degré n et a une racine de f. Alors, il existe une fonction polynôme g de degré $n-1$ telle que, pour tout complexe z,

$$f(z) = (z-a)g(z).$$

Exemple 17. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + 3z^2 + z - 5 = 0$.

Corollaire 18

Soit $n \in \mathbb{N}$. Une fonction polynôme de degré n possède au plus n racines complexes distinctes.

II. — Racines de l'unité

Définition 19

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un nombre complexe z est une racine n-ième de l'unité si $z^n = 1$. Autrement dit, z est une racine n-ième de l'unité si et seulement si z est racine de la fonction polynôme $x \longmapsto x^n - 1$.

Notation 20. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Remarque 21. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \in \mathbb{U}_n$ et $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$ i.e. toute racine de l'unité est de module 1.

Propriété 22

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\mathbb{U}_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in [\![0\,;n-1]\!]\}.$$

En particulier, le cardinal de $\mathbb{U}_n$ est égal à n.

Exemple 23.

1. La seule racine 1-ième de l'unité est 1.
2. Les racines 2-ièmes de l'unité sont 1 et -1.
3. Les racines 3-ièmes de l'unité sont 1, j et $\overline{j} = j^2$.
4. Les racines 4-ièmes de l'unité sont 1, i, -1 et $-\mathrm{i} = \overline{\mathrm{i}}$.

Remarque 24. Pour $n \geqslant 3$, les racines n-ièmes de l'unité sont les affixes des sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.

Exercice 25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la somme et le produit de toutes les racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 26. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 16$.

Exercice 27. Soit un entier $n \geqslant 2$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^n = (z-1)^n$.

Exercice 28. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ un entier premier avec n. On pose $\omega = e^{i\frac{2m\pi}{n}}$. Montrer que $\mathbb{U}_n = \{\omega^k \mid k \in [\![0\,;n-1]\!]\}$.

Exercice 29. L'ensemble de toutes les racines de l'unité est-il égal à $\mathbb{U}$?